

## انتگرالگیری رامبرگ

هدف از این روش انتگرالگیری ایجاد روش تقریبی با مرتبه بالا با استفاده از روش‌های از مرتبه پائین است.

فرض کنید  $f \in C^{2m+2}[a, b]$  و فرض کنیم بازه را به  $N$  قسمت مساوی تقسیم کرده باشیم. قرار دهید

$$g(t) = f(a + \frac{t}{N}(b - a)) \quad (\circ \leq t \leq N)$$

آنگاه

$$g^{(k)}(t) = \left(\frac{b-a}{N}\right)^k f^{(k)}(a + \frac{t}{N}(b-a)) = h^k f^{(k)}(a + \frac{t}{N}(b-a))$$

پس

$$g^{(2l-1)}(N) - g^{(2l-1)}(\circ) = h^{2l-1} [f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)]$$

از طرفی با قرار دادن  $x = a + \frac{t}{N}(b - a)$  داریم

$$\int_{\circ}^N g(t) dt = \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx$$

$$\frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx = \left[ \frac{f(x_{\circ})}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right] - \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} h^{2l-1} [f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)]$$

$$- \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \frac{b-a}{h} h^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b)$$

با ضرب طرفین در  $h$  به دست می‌آید

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(b)}{2} \right] - \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} h^{2l} [f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)]$$

$$- \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} (b-a) h^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

سپس به دلیل  $f^{(2m+2)}$  کراندار است لذا برای آن می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x) dx = T_h^1(f) + \gamma_1 h^2 + \dots + \gamma_m h^{2m} + O(h^{2m+2})$$

که در آن  $T_h^1(f)$  قاعده ذوزنقه‌ای مرکب است:

$$T_h^1(f) = h \left[ \frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{f(b)}{2} \right]$$

اگر فرض شود که  $f \in C^4[a, b]$ , آنگاه بنابه بسط اویلر–مکلورن می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x)dx = T_h^1(f) + \gamma_1 h^4 + O(h^4)$$

که در آن ثابت  $\gamma_1$  به  $f$  بستگی دارد و به  $h$  وابسته نیست. پس با تبدیل  $h$  به  $\frac{h}{3}$  در این تساوی بدست

می‌آوریم:

$$\int_a^b f(x)dx = T_{\frac{h}{3}}^1(f) + \gamma_1 \frac{h^4}{4} + O(h^4)$$

حال تساوی اول را در  $\frac{1}{3}$  و تساوی دوم را در  $\frac{4}{3}$  ضرب کنید تا بدست آید

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3} \left[ 4T_{\frac{h}{3}}^1(f) - T_h^1(f) \right] + O(h^4)$$

به این ترتیب مرتبه خطای  $O(h^4)$  کاهش یافته است. قرار دهید

$$T_h^2(f) = \frac{1}{3} \left[ 4T_{\frac{h}{3}}^1(f) - T_h^1(f) \right]$$

فرمول‌های اویلر–مکلورن برای گام‌های  $h$  و  $\frac{h}{3}$  بدست می‌آوریم

$$\int_a^b f(x)dx = T_h^2(f) + \gamma_2 h^4 + O(h^4)$$

که در آن  $\gamma_2$  تنها به  $f$  بستگی دارد. با تبدیل  $h$  به  $\frac{h}{3}$ :

$$\int_a^b f(x)dx = T_{\frac{h}{3}}^2(f) + \gamma_2 \frac{h^4}{16} + O(h^4)$$

سپس با ترکیب کردن:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{15} \left[ 16T_{\frac{h}{3}}^2(f) - T_h^2(f) \right] + O(h^4)$$

و خطای اینجا از مرتبه  $O(h^4)$  است. حال تعریف کنید

$$h_k = \frac{h}{3^k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$T_{k,1}(f) = T_{h_k}^1(f)$$

$$T_{k,m+1}(f) = \frac{1}{4^m - 1} [4^m T_{k+1,m}(f) - T_{k,m}(f)] \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \dots \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

۱. قضیه . فرض کنید  $f \in C^{\gamma m}[a, b]$ . آنگاه برای کوادراتور رامبرگ خطای زیر را داریم

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_{k,m}(f) \right| \leq C_m \|f^{(\gamma m)}\|_{\infty} \left( \frac{h}{\gamma k} \right)^{\gamma m} \quad k = 0, 1, \dots$$

که در آن  $C_m$  بستگی به  $m$  دارد.

برهان . در واقع به استقراء بر  $m$  و بر هر  $i$  که ثابت می کنیم که ثابت های  $\gamma_{l,i}$  وجود دارند که

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x)dx - T_{k,i}(f) + \sum_{l=i}^{m-1} \gamma_{l,i} [f^{(\gamma l-1)}(b) - f^{(\gamma l-1)}(a)] \left( \frac{h}{\gamma k} \right)^{\gamma l} \right| \\ & \leq \gamma_{m,i} \|f^{(\gamma m)}\|_{\infty} \left( \frac{h}{\gamma k} \right)^{\gamma m} \end{aligned}$$

برای  $i = 0, 1, \dots, m$  و  $k = 0, 1, \dots, m-1$  جمع بالا را مساوی صفر بگیرید . برای  $i = 0$  داریم

$$\begin{aligned} T_{k,0}(f) &= T_{h_k}^0(f) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \sum_{l=1}^{m-1} h_k^{\gamma l} \frac{B_{\gamma l}}{(\gamma l)!} [f^{(\gamma l-1)}(b) - f^{(\gamma l-1)}(a)] \\ &\quad + h_k^{\gamma m} \frac{B_{\gamma m}}{(\gamma m)!} (b-a) f^{(\gamma m)}(\xi) \end{aligned}$$

پس کافی است که برای  $l = 1, \dots, m-1$  بگیریم  $\gamma_{l,0} = \frac{B_{\gamma l}}{(\gamma l)!}$  و بگیریم  $\gamma_{m,0}$  . فرض استقراء بگیرید که برای  $m$  و برای هر  $i \leq m$  برقرار است . آنگاه تعریف کنید :

$$\gamma_{l,i+1} = \frac{\gamma_{i-l}-1}{\gamma_i-1} \gamma_{l,i} \quad l = i+1, \dots, m-1$$

سپس با قرارداد

$$F_l = f^{(\gamma l-1)}(b) - f^{(\gamma l-1)}(a) \quad l = 1, \dots, m-1$$

داریم

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}} \left[ \int_a^b f(x)dx - T_{k+1,i}(f) + \sum_{l=i}^{m-1} \left( \frac{h}{\gamma_{k+1}} \right)^{\gamma l} \gamma_{l,i} F_l \right]$$

$$-\frac{1}{\gamma_{i+1}} \left[ \int_a^b f(x)dx - T_{k,i}(f) + \sum_{l=i}^{m-1} \left( \frac{h}{\gamma_k} \right)^{\gamma l} \gamma_{l,i} F_l \right] =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - T_{k,i+1}(f) + \sum_{l=i+1}^{m-1} \left( \frac{h}{\gamma_k} \right)^{\gamma l} \gamma_{l,i+1} F_l$$

پس از فرض استقراء نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b f(x)dx - T_{k,i+1}(f) + \sum_{l=i+1}^{m-1} \left( \frac{h}{\varphi^k} \right)^{\gamma_l} \gamma_{l,i+1} F_l \right| \leq \\
 & = \frac{\varphi^i}{\varphi^i - 1} \gamma_{m,i} \|f^{(\gamma_m)}\|_\infty \left( \frac{h}{\varphi^{k+1}} \right)^{\gamma_m} + \frac{1}{\varphi^i - 1} \gamma_{m,i} \|f^{(\gamma_m)}\|_\infty \left( \frac{h}{\varphi^k} \right)^{\gamma_m} \\
 & = \frac{\varphi^{i-m} + 1}{\varphi^i - 1} \gamma_{m,i} \|f^{(\gamma_m)}\|_\infty \left( \frac{h}{\varphi^k} \right)^{\gamma_m} \\
 & = \gamma_{m,i+1} \|f^{(\gamma_m)}\|_\infty \left( \frac{h}{\varphi^k} \right)^{\gamma_m}
 \end{aligned}$$

که در آن  $\gamma_{m,i} = \frac{\varphi^{i-m} + 1}{\varphi^i - 1}$  (توجه کنید که نحوه استقرایی تعریف کردن  $\gamma_{m,i+1}$  برای اندیس اول

■ با نحوه استقرایی تعریف آن برای اندیس اول مساوی  $m \leq i < 1$  فرق می‌کند).

**۲. قضیه.** وزن‌های موجود در کوادراتور رامبرگ همگی مثبت هستند.

برهان. قرار دهید

$$Q_{k,m} = (\varphi^m - 1)T_{k,m+1} - T_{k,m}$$

معادلاً

$$T_{k,m+1} = \frac{1}{\varphi^m - 1} [T_{k,m} + Q_{k,m}] \quad (*)$$

سپس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 Q_{k,m+1} &= (\varphi^{m+1} - 1)T_{k,m+2} - T_{k,m+1} \\
 &= [\varphi^{m+1}T_{k+1,m+1} - T_{k,m+1}] - T_{k,m+1} \\
 &= \varphi^{m+1}T_{k+1,m+1} - 2T_{k,m+1} \\
 &= \varphi^{m+1}T_{k+1,m+1} - \frac{1}{\varphi^m - 1} [\varphi^m T_{k+1,m} - T_{k,m}] \\
 &= \varphi^{m+1} \frac{1}{\varphi^m - 1} [T_{k+1,m} + Q_{k+1,m}] + \frac{-2 \times \varphi^m}{\varphi^m - 1} T_{k+1,m} + \frac{1}{\varphi^m - 1} T_{k,m} \\
 &= \frac{1}{\varphi^m - 1} [2 \times \varphi^m T_{k+1,m} + 2T_{k,m} + \varphi^{m+1} Q_{k+1,m}]
 \end{aligned} \tag{**}$$

حال از روابط (\*) و (\*\*) می‌توان به استقراء نتیجه گرفت که وزن‌های معرفی  $T_{k,m}$  ها مثبت‌اند و وزن‌های

■ معرفی کننده  $Q_{k,m}$  ها نامنفی هستند (چگونه؟).

۳. تعریف. یک دنباله  $Q_n$  از فرمول‌های کوادراتور گفته می‌شود که همگرا است در صورتی که برای هر

تابع پیوسته  $f \in C[a, b]$  داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x) dx$$

۴. قضیه. فرض کنید

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{m_n} a_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

یک دنباله از فرمول‌های کوادراتور باشد که برای هر چند جمله‌ای همگرا است و بعلاوه بطور یک‌شکل کراندار باشد، بدین معنی که ثابت  $C > 0$  موجود باشد که

$$\sum_{k=0}^{m_n} |a_k^{(n)}| \leq C \quad (\forall n)$$

آنگاه دنباله  $Q_n$  از کوادراتورها همگرا است.

برهان. برای  $f \in C[a, b]$ ، چند جمله‌ای  $p$  را بزرگ‌بینید که

$$\|f - p\|_\infty \leq \epsilon$$

حال  $N$  را اختیار کنید که

$$|Q_n(p) - Q(p)| \leq \epsilon \quad (\forall n \geq N)$$

(در اینجا برای چند جمله‌ای  $p$  منظور از  $\int_a^b p(x) dx$  همان  $Q(p)$  است). حال

$$|Q_n(f) - Q(f)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k^{(n)}| |f(x_k^{(n)}) - p(x_k^{(n)})| + |Q_n(p) - Q(p)| + \int_a^b |p(x) - f(x)| dx$$

$$\leq C\epsilon + \epsilon + (b-a)\epsilon = (C+b-a+1)\epsilon$$

■ و این برای هر  $n \leq N$  برقرار است. پس  $Q_n(f) \rightarrow Q(f)$

عکس قضیه بالا هم برقرار است: برای آن احتیاج به قضیه کاملاً شناخته شده زیر داریم که اثبات آن را در درس آنالیز حقیقی برایتان می‌گویند:

۵. قضیه . (قضیه کرانداری یکشکل) فرض کنید  $T_n : X \rightarrow Y$  یک دنباله از اپراتورهای خطی از فضای باناخ  $X$  به فضای نرماندار  $Y$  باشد. فرض کنید که این دنباله نقطه به نقطه کراندار باشد:

$$\sup_{n=1,2,\dots} \|T_n x\| < \infty \quad (\forall x)$$

آنگاه این دنباله از اپراتورها بطور یکشکل کراندار است، بدین معنی که عدد  $C$  موجود است که برای هر  $m$

$$\|T_n\| \leq C$$

حال نشان می‌دهیم که برای هر کوادراتور  $Q(f) = \sum_{k=0}^m a_k f(x_k)$  داریم

$$\|Q\|_\infty = \sum_{k=0}^m |a_k|$$

در واقع برای هر  $f \in C[a, b]$

$$|Q(f)| \leq \sum_{k=0}^m |a_k| |f(x_k)| \leq \|f\|_\infty \sum_{k=0}^m |a_k|$$

چون این برای هر  $f \in C[a, b]$  برقرار است، پس  $\|Q\|_\infty \leq \sum_{k=0}^m |a_k|$ . از طرفی می‌توان تابع  $f \in C[a, b]$  را یافت که اولًا  $\|f\|_\infty = 1$  و در شانس  $|a_k| = f(x_k) a_k$ . در واقع اگر  $a_k = 0$  آنگاه بگیرید  $f(x_k) = 1$  ولی اگر  $a_k \neq 0$  آنگاه بگیرید  $f(x_k) = \frac{|a_k|}{a_k}$ . آنگاه برای این  $f$  داریم  $\|Q\|_\infty \geq Q(f) = \sum_{k=0}^m a_k f(x_k) = \sum_{k=0}^m |a_k|$  ثابت می‌شود.

حال همه چیز آماده است که عکس قضیه بالا را ثابت کنیم: فرض کنید که  $Q_n$  یک دنباله همگرا از کوادراتورها روی  $[a, b]$  باشد. پس برای هر  $f \in C[a, b]$ ، دنباله  $\{Q_n(f)\}$  همگرا است. پس دنباله  $Q_n : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  نقطه به نقطه کراندار است، پس باید که بطور یکشکل کراندار باشد، لذا  $C$  ای هست که برای هر  $n$  داریم  $\|Q_n\|_\infty \leq C$ . پس  $\sum_{k=0}^{m_n} |a_k^{(n)}| \leq C$ . و این عکس قضیه بالا است.

۶. تیجه . [Steklov] فرض کنید که دنباله  $\{Q_n\}$  از فرمولهای کوادراتور برای هر چند جمله‌ای همگرا باشد و بعلاوه وزن‌ها همگی نامنفی باشند. آنگاه دنباله  $\{Q_n\}$  همگرا است.

برهان . در واقع،

$$\sum_{k=0}^{m_n} |a_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^{m_n} a_k^{(n)} = Q_n(1) \rightarrow \int_a^b dx = b - a \quad , \text{ as } n \rightarrow \infty$$

مثال روش رامبرگ را برای تخمین زدن  $\int_0^\pi \sin x dx$  (که مقدار واقعی آن ۲ است) بکار می‌بریم:

$h$	$R_{i,\backslash}$	$R_{i,\gamma}$	$R_{i,\Gamma}$
3.14159265	0.00000000		
1.57079633	1.57079633	2.09439510	
0.78539816	1.89611890	2.00455975	1.99857073
0.39269908	1.97423160	2.00026917	1.99998313 2.00000555
0.19634954	1.99357034	2.00001659	1.99999975 2.00000002 1.99999999
0.09817477	1.99839336	2.00000103	2.00000000 2.00000000 2.00000000