آنالیزعددی دو

مدرس :دکتر رشیدی نیا

فهرست مطالب

عنوان

صفحات

فصل اول : حل سیستمهای خطی

فصل دوم : مقادیر و بردارهای ویژه

فصل سوم : حل عددی معادلات دیفرانسیل

روشهای تک گامی

فصل اول

حل سیستمهای خطی

مقدمه:

سیستم n معادله و n مجهول خطی زیر را درنظر می گیریم

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&a_{na}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_x = b_n
\end{aligned} \qquad (1)$$

به طوری که $i, j = 1(1)n$ و (a_{ij}) و b_i مقادیر حقیقی و معلوم باشند ، x_i مجهولات سیستم خطی (۱)هستند که بایستی محاسبه شوند.این سیستم را به فرم ماتریسی زیر می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AX = b$$

اگر $i = 1(1)n$, $(b_i) = 0$ باشند سیستم را همگن می نامیم و اگر حداقل یک b_i ناصفر باشد در این صورت سیستم را سیستم ناهمگن خوانند.سیستم ناهمگن (۱) دارای جواب یکتاست اگر و فقط اگر دترمینان A صفر نباشد یعنی:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

در این صورت جواب سیستم(۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$X = A^{-1}b$$

سیستم همگن $AX=\overline{0}$ دارای جواب $X=\overline{0}$ است اگر $\det(A)\neq 0$ باشد.بنابراین در مسائل عملی ما با سیستمهای همگن مواجه هستیم و جواب $X=\overline{0}$ برای ما عملا پذیرفتنی نیست. لذا چنان چه سیستم را برحسب پارامتر l به صورت زیر بنویسیم

$$AX = lX$$

و l را چنان بیابیم که

$$\det(A - lI) = 0$$

باشد آنگاه جواب ناصفر را برای X می یابیم.این مسئله ما را به مبحث مقادیر ویژه و بردارهای ویژه رهنمون می سازد. l را مقدار ویژه و X را بردار ویژه متناظر با آن می نامیم .

$$AX = lX \quad \Rightarrow \quad AX - lX = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - lI)X = 0 \qquad (2)$$

برای اینکه جواب ناصفر بگیریم بایستی $\det(A - lI) = 0$ باشد.از بسط دترمینان یک چندجمله ای درجه n ام بر حسب l خواهیم داشت که به معادله ویژه معروف است. از آنجا که سیستم خطی n معادله و n مجهول دارد این معادله دارای n ریشه است که $l_1, l_2, ..., l_n$ می باشند. ریشه های این معادله می توانند جملگی مجزا و حقیقی باشند،می توانند تکراری و مختلط نیز باشند. مقدار ویژه ای که از لحاظ کمی بیشترین مقدار را داشته باشد شعاع طیفی نامیم و با $r(A)$ نشان داده می شود.

روشهای حل سیستم(۱) به طور اجمالی به دو دسته کلی تقسیم می شوند که عبارتند از:

۱- روشهای مستقیم ۲- روشهای تکراری

روشهای مستقیم روشهایی هستند که هم زمان همه جوابهای سیستم (۱) را به دست خواهند داد و روشهای تکراری روشهایی هستند که جواب سیستم(۱) را بایک معیار دقت تقریب می زنند.در زیر ابتدا روشهای مستقیم را بررسی می کنیم.

روشهای مستقیم

اساس کار روشهای مستقیم این است که اگر با استفاده از تمهیداتی (تبدیلاتی) سیستم را به سیستمهای مشروح زیر برگردانیم می توانیم مستقیما تمامی جوابها را هم زمان بیابیم.

I- چنانچه بتوانیم ماتریس ضرایب سیستم را به ماتریس قطری یا به عبارتی سیستم را به سیستم قطری تبدیل کنیم یعنی اگر $A \to D$ یعنی:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= 0 \qquad if\, i \neq j \\ d_{ij} &\neq 0 \qquad if\, i = j \end{aligned}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} &a_{11} x_1 = b_1 \quad \Rightarrow x_1 = b_1 / a_{11} \\ &a_{22} x_2 = b_2 \quad \Rightarrow x_2 = b_2 / a_{22} \\ &\vdots \\ &a_{nn} x_n = b_n \quad \Rightarrow x_n = b_n / a_{nn} \end{aligned}$$

به طوری که اگر $i = 1(1)n$, $a_{ii} \neq 0$ باشد می توان $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را همزمان یافت.

در این حالت الگوریتم برای سیستم داده شده $AX = b$ عبارت است از:

۱- مرحله اول :برای $i = 1(1)n$.

۲- مرحله دوم: محاسبه می کنیم $x_i = b_i / a_{ii}$.

II- چنانچه بتوان سیستم را به سیستم پائین مثلثی تبدیل کنیم یعنی ماتریس ضرایب A را به یک ماتریس پائین مثلثی برگردانیم:

$$A \to L \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} l_{ij} &\neq 0 \quad if\ j \leq i \\ l_{ij} &= 0 \quad if\ j > i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 &&= b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &&= b_2 \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &&= b_n \end{aligned}$$

از رابطه اول ابتدا می توان x_1 را به صورت زیر به دست آورد:

$$x_1 = b_1 / a_{11}$$

و اگر x_1 را در رابطه دوم قرار دهیم x_2 را می توان یافت:

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1) / a_{22}$$

و به همین طریق سرانجام می توان x_3، x_4 تا x_n را یافت .یعنی:

$$x_n = \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\right) \Big/ a_{nn}$$

لذا می توان الگوریتم جایگزینی از بالا را به صورت زیر بنویسیم.

برای سیستم $AX = b$ الگوریتم جایگزینی از بالا را به شرح زیر می نویسیم:

۱- مرحله اول: برای $k = 1(1)n$.

۲- مرحله دوم: محاسبه کن $x_k = \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right) \Big/ a_{kk}$.

III- اگر ماتریس ضرایب سیستم را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم یعنی:

$$\begin{aligned} U_{ij} &\neq 0 \quad if\ i \leq j \\ U_{ij} &= 0 \quad if\ i > j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ddots \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

با استفاده از جایگزینی از پائین ابتدا x_n را ($x_n = b_n / a_{nn}$) را محاسبه می کنیم و در روابط بالا قرار می دهیم و سرانجام همه مقادیر x را محاسبه می کنیم.الگوریتم این حالت را که الگوریتم جایگزینی از پائین می نامیم به شرح زیر است:

۱- مرحله اول: برای $k = n(-1)1$.

۲- مرحله دوم: محاسبه کن $x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j) / a_{kk}$.

نتیجه می گیریم که در سه حالت فوق عملا مقدور است جوابهای سیستم را بیابیم. پس اساس کار روشهای مستقیم و هدف آنها تبدیل سیستم به سه حالت فوق است.در زیر روش حذفی گاوس را بررسی می کنیم.

روش حذفی گاوس

اساس این روش مستقیم بر حذف ساده مجهولات و تبدیل سیستم به سیستم بالا مثلثی است و با استفاده از الگوریتم جایگزینی از پائین دستگاه معادلات را می توان به آسانی حل نمود.برای توضیح این روش ابتدا فرض می کنیم سیستم $AX = b$ یک سیستم $n \times n$ و خوش وضع باشد.ابتداسیستم را مرتب می کنیم و تمام ضرایب سیستم را در محلهای مناسب به حافظه کامپیوتر می سپاریم و طرف راست سیستم را نیز به حافظه کامپیوتر وارد می کنیم.سپس رابطه اول را نگه می داریم و به کمک این رابطه و مضربهای مناسب ضریب x_1 را حذف می نمائیم .همه ضرایب مجهولات در $(n-1)$ رابطه باقیمانده تغییر می نمایند و در همان محلهای قبلی به جای ضرایب قبلی به حافظه سپرده می شوند. $(n-1)$ رابطه

$$b_i = b_i^{(1)} \qquad i = 1(1)n$$

$$m_{i1}^{(1)} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad i = 2(1)n$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}^{(1)} a_{1j}^{(1)} \qquad i = 2(1)n\,,\ j = 1(1)n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}^{(1)} b_1^{(1)} \qquad i = 2(1)n$$

$$a_{i1}^{(2)} = 0 \qquad i = 2(1)n$$

را که دستخوش تغییر شدند را مجددا مرتب می کنیم. در دور بعد به کمک رابطه ۲ ضریب x_2 را از $(n-2)$ رابطه باقیمانده صفر می سازیم و این عمل را ادامه می دهیم.

حال فرض می کنیم به مرحله k ام رسیده ایم یعنی می خواهیم ضریب x_k را از $n-k$ رابطه باقیمانده صفر بسازیم. مضرب مناسب در این حالت عبارت است از:

$$m_{ik}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad i = k+1(1)n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)} \qquad i = k+1(1)n$$

$$j = k(1)n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}^{(k)} b_k^{(k)} \qquad i = k+1(1)n$$

$$a_{ik}^{(k+1)} = 0 \qquad i = k+1(1)n$$

بدین طریق وقتی که $k = 1(1)n$ تغییر کند سیستم را به سیستم بالامثلثی تبدیل می کنیم.

چنانچه ماتریس ضرایب سیستم بزرگ باشد این روش شامل تعداد اعمال حسابی قابل توجهی است و در هر مرحله از روند محاسبات ، اعداد محاسبه شده را در مرحله بعد به کار می بریم.این موقعیتی را ایجاد می کند که در آن انباشتگی خطا محتمل است و می تواند منشاء خطای بزرگی شود.پس باید سعی شود که خطا را Min سازیم.این کار زمانی عملی است که عنصر محور $a_{kk}^{(k)}$ بزرگترین عنصر

$a_{ik}^{(k)}$ در همان ستون برای $i \geq k$ باشد یعنی مضربهای به کار رفته از یک کوچکتر باشند تا خطای محاسباتی به حداقل مقدار ممکن برسد.

برای نیل به این هدف ، لازم است که سیستم را مرتب کنیم .یعنی جای سطرها را عوض نماییم .این نوع مرتب کردن را محورگیری جزئی می نامیم.با محورگیری جزئی ممکن است در حین عملیات تقسیم بر صفر صورت گیرد. چنانچه پس از محورگیری جزئی لازم باشد تا از تقسیم بر صفر جلوگیری کنیم آنگاه می توان جای ستونها را عوض نماییم این عمل رامحورگیری کلی می نامند.

این روش را با مثال زیر توضیح می دهیم.

$$\begin{aligned} 2x_1+5x_2+8x_3&=36 \\ 4x_1+8x_2-12x_3&=-16 \\ x_1+8x_2+x_3&=20 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 4x_1+8x_2-12x_3&=-16 && (1)\\ 2x_1+5x_2+8x_3&=36 && (2)\\ x_1+8x_2+x_3&=20 && (3)\end{aligned}$$

مرحله اول: با استفاده از رابطه (1) ضریب x_1 را از روابط (2) و (3) صفر می سازیم.

$$\begin{aligned} & & 4x_1+8x_2-12x_3&=-16 && (1)' \\ m&=-\tfrac{1}{2} & x_2+14x_3&=44 && (2)' \\ m&=-\tfrac{1}{4} & 6x_2+4x_3&=24 && (3)' \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 4x_1+8x_2-12x_3&=-16 \\ 6x_2+4x_3&=24 \\ x_2+14x_3&=44 \end{aligned}$$

مرحله دوم:با استفاده از معادله $(2)'$ x_2 را از معادله $(3)'$ حذف می کنیم.

$$\begin{aligned} & & 4x_1+8x_2-12x_3&=-16 && (1)'' \\ & & 6x_2+4x_3&=24 && (2)'' \\ m&=-\tfrac{1}{6} & \tfrac{40}{3}x_3&=40 && (3)'' \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از الگوریتم جایگزینی از پائین

$$x_3=3$$

$$x_2=\frac{24-12}{6}=2$$

$$x_1=1$$

روش تجزیه مثلثی LU

فرض می کنیم که سیستم خطی دارای n معادله و n مجهول باشد و ماتریس ضرایب سیستم نامنفرد باشد و کهادهای اصلی پیشرو آن ناصفر باشند. در این صورت ماتریس ضرایب سیستم رامی توان به دو سیستم بالا و پایین مثلثی به صورت زیر تجزیه کنیم.

$$A = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

با استفاده از قانون ضرب ماتریسی ، L را در U ضرب می کنیم و عناصر حاصله را با درایه های متناظر ماتریس A مقایسه می کنیم.

حاصل ضرب سطر i ام از L وستون j ام از U عبارت است از:

$$l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \ldots + l_{in}u_{nj} = a_{ij} \qquad i, j = 1(1)n$$
$$l_{ij} = 0 \qquad j \succ i$$
$$u_{ij} = 0 \qquad i \succ j$$

در رابطه فوق تعداد مجهولات از تعداد روابط بیشتر است (n مجهول بیشتر) لذا برای این که درایه هایی به صورت منحصر به فرد بیابیم لازم است که:

$$u_{ii} = 1 \; i = 1(1)n$$

در این صورت می دانیم که همه درایه های اولین ستون U معلوم هستند .لذا می توان همه سطرهای L را در ستون اول U ضرب کرد .بنابراین داریم :

$$l_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1(1)n$$
$$u_{1j} = a_{1j} / l_{11} \qquad j = 2(1)n$$

ابتدا اولین ستون L و سپس اولین سطر U را تعیین کردیم.حال دومین ستون L و آنگاه دومین سطر U را پیدا می کنیم.

$$l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12} \qquad i = 2(1)n$$
$$u_{2j} = (a_{2j} - l_{21}u_{1j}) / l_{22} \qquad j = 3(1)n$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \qquad i \geq j$$

$$u_{ij} = \left. \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) \middle/ l_{ii} \right. \qquad i < j$$

و سپس سومین ستون L و

سومین سطر U را محاسبه می کنیم و ادامه می دهیم .یعنی به ترتیب:

پس از تعیین درایه های L و U سیستم را به صورت زیر تجزیه می کنیم.

$$AX = b$$
$$LUX = b$$

وسیستم را به دو سیستم بالا و پائین مثلثی تبدیل می کنیم.

$$UX = Z \qquad (1)$$
$$LZ = b \qquad (2)$$

ابتدا سیستم (2) را که سیستم پائین مثلثی است حل کرده و با استفاده از الگوریتم جایگزینی از بالا

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ را می یابیم.سپس سیستم (1) را با استفاده از الگوریتم جایگزینی از پائین حل می کنیم و

$x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ را به دست می آوریم.

<u>مثال ۱:</u>

سیستم داده شده زیر را با روش تجزیه مثلثی حل کنید.

$$\begin{Bmatrix} 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = 8 \quad , \quad l_{21} = 1 \quad , \quad l_{31} = 2$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad , \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -8 - 1 \times \frac{1}{4} = \frac{-33}{4}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{13} = 1 - 2 \times (\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13}) / l_{22} = \frac{3 - 1 \times (-\frac{1}{4})}{-\frac{33}{4}} = -\frac{13}{33}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 9 \quad \Rightarrow \quad l_{33} = 9 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 9 - 2(\frac{-1}{4}) - \frac{1}{2}(-\frac{13}{33}) = \frac{320}{33}$$

$$\begin{Bmatrix} LZ = b \\ UX = Z \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{33}{4} & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{320}{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = 1 \quad , z_2 = \frac{20}{33} \quad , z_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{20}{33} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{Bmatrix}$$

مثال۲:

سیستم داده شده زیر را با روش تجزیه مثلثی حل کنید.

$$\begin{Bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = 1 \quad , \quad l_{21} = 4 \quad , \quad l_{31} = 3$$

$$u_{12} = {a_{21}}/{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$u_{13} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 4(1) = -1$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 5 - 3 = 2$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 1$$

$$u_{23} = {(a_{23} - l_{21}u_{13})}/{l_{22}} = \frac{-1-4}{-1} = 5$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3 - 3 - 2 \times 5 = -10$$

$$LZ = b \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow z_1 = 1 \quad , z_2 = -2 \quad , z_3 = -\frac{1}{2}$$

$$UX = Z \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} \quad , x_2 = {1}/{2} \quad , x_1 = 1$$

مثال ۳ :

سیستم داده شده را با روش LU حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$l_{11} = 4 \quad , \quad l_{21} = 1 \quad , \quad l_{31} = 2 \quad , \quad l_{41} = -1$

$$u_{12} = {a_{12}}/{l_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = -{1}/{4}$$

$$u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = 0$$

$$l_{21}u_{12} + l_{22} = -2 \qquad \Rightarrow l_{22} = -{5}/{2}$$

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 3 \qquad \Rightarrow u_{23} = \frac{3 + \frac{1}{4}}{-{5}/{2}} = \frac{-13}{10}$$

$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = 1 \qquad \Rightarrow u_{24} = \frac{1-0}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$$

$$l_{21}u_{12} + l_{32} = -3 \qquad \Rightarrow l_{32} = -3 - 1 = -4 \quad , \quad l_{42} = {5}/{2}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 5 \quad \Rightarrow l_{33} = {3}/{10}$$

$$l_{21}u_{12} + l_{22}u_{24} = 1 \qquad \Rightarrow u_{24} = -{2}/{5}$$

$$l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + l_{33}u_{34} = 1 \Rightarrow u_{34} = -2 \quad , \quad l_{42} = {5}/{2} \quad , \quad l_{43} = 2$$

$$l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{44} = -1 \quad \Rightarrow l_{44} = 11$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5/2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & \frac{3}{10} & 0 \\ -1 & 5/2 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = 0 \quad , z_2 = 2 \quad , z_3 = 10 \quad , z_3 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{10} & -\frac{4}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -3 \quad , x_2 = 9 \quad , x_3 = 6 \quad , x_4 = -2$$

استفاده از حداقل سازی خطا

یک دستگاه معادلات خطی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - b_1 &= R_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_x + a_{23}x_3 - b_2 &= R_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - b_3 &= R_3 \end{aligned}$$

جملات R_1 و R_2 و R_3 اصطلاحا باقیمانده نامیده می شوند و هنگامی صفر می شوند که x_1 و x_2 و x_3 مقادیر دقیق خود را داشته باشند.بنابراین روشهای حدس اولیه طوری با تکرار تصحیح می شوند که مقادیر R تا دقت مطلوب به صفر نزدیک شوند.

مثال:

دستگاه زیر را با روش حداقل سازی حل کنید.

$$\begin{aligned} &10x_1 - 2x_2 + x_3 - 185 = R_1 \\ &-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 93 = R_2 \\ &x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 49 = R_3 \end{aligned}$$

با تقریب اولیه $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$ شروع می کنیم.$(R_1 = -185, R_2 = -93, R_3 = -49)$

چون R_1 بزرگترین کمیت را داراست و x_1 بیشترین سهم را در تغییـر آن دارد x_1 را طـوری تغییـر مـی دهیم تا R_1 مقداری نزدیک به صفر داشته باشد.

$x_1 = 18 \qquad R_1 = -5$

$x_2 = 0 \qquad R_2 = -147$ بزرگتر

$x_3 = 0 \qquad R_3 = -31$

$x_1 = 18 \qquad R_1 = 43$

$x_2 = -24 \qquad R_2 = -3$

$x_3 = 0 \qquad R_3 = 17$

مجددا برای کاهش R_1 به عنوان بزرگترین باقیمانده ناچـارا x_1 را تغییـر مـی دهـیم .ایـن عملیـات را بـه همین ترتیب ادامه داده تا $\sum R^2$ با دقت مطلوب به صفر نزدیک شود.

۱- نشان دهید که ماتریس زیر نامنفرد است اما نمی توان به صورت LU تجزیه شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

راهنمایی:[چون $l_{22}=0$ است] نمی توان u_{23} را محاسبه کرد.با این که $|A|=10\neq 0$ چون زیرماتریسی با دترمینان صفر دارد این روش جواب نمی دهد.

۲- دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر را درنظر می گیریم.با روشهای حذفی گاوس و LU حل کنید.

$$\begin{cases} 4x+y+2z=4 \\ 3x+5y+z=7 \\ x+y+3z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=-1 \\ -x_1+3x_2+2x_3=12 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

۳- سیستمهای خطی زیر را بار وش حذفی گوس با محورگیری جزئی حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+4x_2-2x_3=4 \\ 3x_1+2x_2-4x_3=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-3 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=6 \end{cases}$$

۴- سیستمهای تمرین ۳ را بار وش تجزیه مثلثی حل کنید.

۵- دستگاه زیر را با محورگیری جزئی حل کرده و کلیه عملیات محاسباتی را تا چهار رقم اعشار انجام دهید.

$$\begin{aligned} 4.01x_1+1.23x_2+1.43x_3-0.73x_4&=5.94 \\ 1.23x_1+7.41x_2+2.41x_3+3.02x_4&=14.07 \\ 1.43x_1+2.41x_2+5.79x_3-1.11x_4&=8.52 \\ -0.73x_1+3.02x_2-1.11x_3-16.41x_4&=7.59 \end{aligned}$$

۶- ماتریس B به صورت زیر تعریف شده است:

$$B = I + irA^2$$

در اینجا I ماتریس واحد و A ماتریسی هرمیتی و $\|.\|$ بیانگر نرم هیلبرت است.هم چنین $i^2 = -1$.

نشان دهید برای تمام مقادیر حقیقی $r \neq 0$ ، $\|B\| > 1$.

روشهای تکراری

این روشها با توجه به سادگی و عدم حساسیتشان نسبت به خطای گرد کردن ($Round \quad Error$) برای کاربرد با برنامه های کامپیوتری مناسبتر از روشهای مستقیم می باشند، زیرا در مقایسه با روشهای مستقیم حافظه کمتری را اشغال می کنند و می توانند عملیات تکرار را تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه دهند.برای آشنایی با این روشها ابتدا روش تکرار ژاکوبی را فرامی گیریم.

الف) روش تکراری ژاکوبی

سیستم خطی

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

مفروض است.این روش در حقیقت تعمیم روش تکرار ساده در حل معادلات غیر خطی و یک متغیره است.ابتدا سیستم خطی را مرتب می کنیم به طریقی که درایه های روی قطر ناصفر باشند و از لحاظ کمی نسبت به سایر درایه های هم سطر آن بیشترین کمیت را داشته باشد سپس دستگاه معادلات خطی را طوری بازنویسی می کنیم که هرکدام از روابط یکی از مجهولات را برحسب مجهولات دیگر بیان نماید.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n)/a_{11}\\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n)/a_{22}\\
&\vdots\\
x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn}
\end{aligned}
$$

بـا تقریـب اولیـه دلخـواه $X^{(0)} = [x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}]$ شـروع مـی کنـیم و دور تکـراری را آغـاز مـی نماییم.فرض می کنیم تقریب $X^{(1)}$ را محاسبه کرده ایم .سپس این مقـدار را بـه عنـوان تقریـب در دور بعد به کار می گیریم و $X^{(2)}$ را می یابیم و این عمل را ادامه می دهیم .پس:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(0)})/a_{11}\\
x_2^{(1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(0)})/a_{22}\\
&\vdots\\
x_n^{(1)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)})/a_{nn}
\end{aligned}
$$

سپس $X^{(1)}$ را در رابطه فوق قرار می دهیم.داریم:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(1)})/a_{11}\\
x_2^{(2)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(1)})/a_{22}\\
&\vdots\\
x_n^{(2)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)})/a_{nn}
\end{aligned}
$$

اگر فرض کنیم این عملیات $k-1$ مرتبه تکرار شود سرانجام X^k را به شرح زیر می یابیم.

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)})/a_{11} = \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k-1)}\right)\Big/a_{11}\\
x_2^{(k)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)})/a_{22} = \left(b_2 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} a_{2j}x_j^{(k-1)}\right)\Big/a_{22}\\
&\vdots\\
x_n^{(k)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)})/a_{nn} = \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k-1)}\right)\Big/a_{nn}
\end{aligned}
$$

الگوریتم روش ژاکوبی

سیـــستم $AX = b$ داده شـــده،یک تقریـــب اولیـــه $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}]$ انتخـــاب مـــی کنیم.دستگاه را مرتب کرده تا تقسیم برصفر صورت نگیرد.

۱- مرحله اول: برای $k=0$.

۲- مرحله دوم: برای $i=1(1)n$ محاسبه می کنیم :

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}$$

۳- مرحله سوم: اگر $x_i^{(k+1)}$ به اندازه کافی دقیق باشد یعنی به معیار دقت حل مسئله $\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\| \le x$ رسیده باشد به مرحله چهارم می رویم.در غیر این صورت $k=k+1$ به مرحله دوم برگردیم.

۴- روند را متوقف کنید.

حال الگوریتم فوق را با نماد ماتریسی نشان می دهیم که جهت کارهای نظری مانند همگرایی روش به آن نیاز داریم.

اگر طرفین رابطه فوق را در a_{ii} ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1^{(k)} = b_1 - a_{12} x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k-1)} \\
&a_{22} x_2^{(k)} = b_2 - a_{21} x_1^{(k-1)} - \dots - a_{2n} x_{n-1}^{(k-1)} \\
&\vdots \\
&a_{nn} x_n^{(k)} = b_n - a_{n1} x_1^{(k-1)} - \dots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & U \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ L & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad DX^{(k)} = -(L+U)X^{(k-1)} + b$$

$$X^{(k)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k-1)} + D^{-1}b$$

که $-D^{-1}(L+U)$ را برابر با H می گیرند و ماتریس روش تکراری ژاکوبی گویند.معمولا $D^{-1}b$ را هم برابر با C می گیرند.پس داریم:

$$X^{(k)} = H_j X^{(k-1)} + C_j \qquad k=1,2,3,\dots$$

می توان H_j را هم به صورت زیر نوشت:

$$H_j = -D^{-1}(-D+D+L+U) = -D^{-1}(-D+A)$$
$$H_j = (I - D^{-1}A)$$

ب) روش تکراری گاوس- سایدل

این روش اصلاح شده روش ژاکوبی است.در این روش آخرین مقدار محاسبه شده برای مجهولات (برای هریک از مجهولات) در معادلات بعدی مورد استفاده قرار می گیرند.این روش در عین حال زودتر از روش قبل به جواب می رسد و حافظه کمتری از کامپیوتر را اشغال می کند.زیرا هر بار از متغیرهای جدید استفاده می کند و نیازی به ذخیره سازی مقادیر $x^{(k)}$ نمی باشد.حدس اولیه هیچ گونه تاثیری بر سرعت همگرایی نخواهد داشت.

اگر ضرایب روی قطر سیستم در هر سطر از مجموع سایر ضرایب همان سطر بزرگتر باشد عملیات خیلی زودتر به جواب خواهد رسید.

حال اگر سیستم مرتب شده ژاکوبی را درنظر بگیریم:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(0)})/a_{11} \\
x_2^{(1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(0)})/a_{22} \\
&\vdots \\
x_n^{(1)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)})/a_{nn}
\end{aligned}$$

که $X^{(1)}$ به دست می آید.مجددا این روش را ادامه می دهیم. این بار:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(1)})/a_{11} \\
x_2^{(2)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(2)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(1)})/a_{22} \\
&\vdots \\
x_n^{(2)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(2)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(2)})/a_{nn}
\end{aligned}$$

و $X^{(2)}$ حاصل می شود.فرض کنیم این عمل $k-1$ بار انجام شود داریم:

$$x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) / a_{11} = (b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{11}$$

$$x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) / a_{22} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) / a_{nn} = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)} \Big/ a_{nn}$$

الگوریتم روش گاوس - سایدل

برای سیستم $AX = b$ و برای تقریب اولیه مفروض $X^{(0)}$ و با انتخاب z معیار دقت داده شده الگوریتم روش گاوس –سایدل به شرح زیر است:

۱- مرحله اول: برای $k = 1$.

۲- مرحله دوم: برای $i = 1(1)n$ محاسبه کن :

$$x_i^{(k)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{ii}$$

۳- مرحله سوم: اگر $X^{(k)}$ به اندازه کافی دقیق باشد یا به عبارت دیگر $\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\| \le z$ باشد به مرحله چهارم برو.در غیر این صورت $k = k+1$ و به مرحله دوم برو.

۴- روند را متوقف کنید.

برای نشان دادن فرم ماتریسی آن اگر $x^{(k)}$ را در طرف چپ و $x^{(k-1)}$ را درطرف راست رابطه فوق قرار دهیم بدین صورت مرتب خواهد شد.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1^{(k)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\
&a_{22}x_2^{(k)} = b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_{n-1}^{(k-1)} \\
&\vdots \\
&a_{nn}x_n^{(k)} = b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} \\
&-------------------- \\
&a_{11}x_1^{(k)} = -a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\
&a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} = -a_{23}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k)} = b_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & (L+D)X^{(k)} = -UX^{(k-1)} + b \\
& X^{(k)} = -(L+D)^{-1}UX^{(k-1)} + (L+D)^{-1}b \\
& X^{(k)} = H_g X^{(k-1)} + C_g \qquad k = 1,2,3,\ldots \\
& H_g = -(D+L)^{-1}U \quad , \quad C_g = (D+L)^{-1}b
\end{aligned}
$$

ادامه روش تکرار به صورت فوق برای کارهای نظری بهتر است.برای کاربرد عملی ار فرم زیر بهتر است استفاده شود

$$
x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii} \qquad i = 1(1)n
$$

<u>مثال:</u>

دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را با روش گاوس- سایدل و ژاکوبی حل کنید.مراحل تکرار را تا ۱۴ مرحله در نظر بگیرید و درصد خطای نسبی را بیابید.

$$
\begin{Bmatrix}
2x_1 - x_2 \qquad\quad = 7 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\
\qquad -x_2 + 2x_3 = 1
\end{Bmatrix}
$$

حل به روش ژاکوبی:

$$
\begin{Bmatrix}
x_1 = (7 + x_2)/2 \\
x_2 = (1 + x_3 + x_1)/2 \\
x_3 = (1 + x_2)/2
\end{Bmatrix}
$$

حال تقریب دلخواه اولیه $X^{(0)} = [0,0,0]$ را درنظر می گیریم.پس داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(1)} = 3.5 \\ x_2^{(1)} = 0.5 \\ x_3^{(1)} = 0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow X^{(1)} = [3.5,0.5,0.5]$$

حال $X^{(1)}$ تقریبی برای مرحله بعدی می شود.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(2)} = 3.75 \\ x_2^{(2)} = 2.5 \\ x_3^{(2)} = 0.75 \end{array}\right\} \Rightarrow X^{(2)} = [3.75,2.5,0.75]$$

و این روند را مجددا ادامه می دهیم تا جایی که $\left\| X^{(m)} - X^{(m-1)} \right\| \le 3\times10^{-4}$ شود.

حل به روش گاوس – سایدل:

$$\begin{array}{ll} x_1^{(1)} = 3.5 & \\ x_2^{(1)} = (1 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)})/2 = 2.25 & \Rightarrow X^{(1)} = [3.5,2.25,1.625] \\ x_3^{(1)} = (1 + x_2^{(1)})/2 = 1.625 & \left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\| = \max_{1\le i\le 3}\{|x_i|\} = 3.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_1^{(2)} = \dfrac{7 + 2.2.5}{2} = 4.625 & \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1 + 4.625 + 1,625}{2} = 3.625 & \Rightarrow X^{(2)} = [4.625,3.625,2.3125] \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1 + 3.625}{2} = 2.3125 & \left\| X^{(2)} - X^{(1)} \right\| = 1.375 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1^{(3)} = 5.3125 \\ x_2^{(3)} = 4.3125 \\ x_3^{(2)} = 2.65625 \\ \vdots \end{array}$$

بالاخره در مرحله ۱۳ داریم:

$$\begin{array}{l} x_1^{(13)} = 5.9993 \\ x_2^{(13)} = 4.9993 \\ x_3^{(13)} = 2.9996 \end{array}$$

ودر تکرار ۱۴ :

$$x_1^{(14)} = 5.9996$$
$$x_2^{(14)} = 4.9996$$
$$x_3^{(14)} = 2.9998$$

حـال خطـای مطلـق $\left\| X^{(14)} - X^{(13)} \right\| = \left\| (0.0003, 0.0003, 0.0002)^T \right\| = 3\times 10^{-4}$ ودرصـد خطـای نسبی $\frac{\left\| X^{(14)} - X^{(13)} \right\|}{\left\| X^{(14)} \right\|}\times 100 = \frac{0.0003}{5.9996}\times 100$ به دست می آید.

مثال:

آیا روش ژاکوبی یا گاوس –سایدل برای حل سیستم زیر همگراست؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

حل

چون $\|H\| = \max_i \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = 4 \succ 1$ روش ژاکوبی واگراست.

$$H_g = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\|H_g\| = \max\{4,5,2\} = 5 \succ 1$$

یعنی این روش هم همگرا نیست.

روش تخفیف

ما در قبل بررسی کردیم که سرعت همگرایی یـک رونـد بـه شـعاع طیفـی مـاتریس تکـراری آن روش بستگی دارد.یک راه حلی که منجر به همگرایی سریع می شود ،آن است که روشـی انتخـاب شـود کـه ماتریس تکراری آن کوچکترین شعاع طیفی را داشته باشد.

برای تسریع، روش گاوس - سایدل را درنظر می گیریم.چنان چه جواب تقریبی در مرحله k ام

$$X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})^T$$

باشد ودر روابط صدق نماید این جوابها جواب دقیق سیستم هستند.درغیر این صورت اگر در روابط صدق نکنند در هر رابطه یک مانده خواهیم داشت.بنابراین بردار مانده را با R نمایش می دهیم:

$$R_i^{(k)} = (r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \ldots, r_{ni}^{(k)})^T$$

مولفه i ام این بردارهای مانده عبارت است از:

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \qquad i = 1(1)n$$

$$r_{ii}^{(k)} + a_{ii} x_i^{(k-1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \qquad i = 1(1)n$$

$$a_{ii} x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \qquad i = 1(1)n \qquad (1)$$

ما از روش گاوس- سایدل داریم:

$$x_i^{(K)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right) \Big/ a_{ii} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)\ \ in\ \ (1)} a_{ii} x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii} x_i^{(k)}$$

$$\therefore \quad x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \qquad (3)$$

پس اگر مانده را در یک فاکتور w ضرب کنیم داریم:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{w\, r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \qquad i = 1(1)n \quad , k = 1,2,\ldots \quad (4)$$

که در آن

۱- اگر فاکتور $0 < w < 1$ باشد دراین صورت روش را تحت تخفیف گوییم و می توان آن را جهت به دست آوردن همگرایی دستگاههایی که به روش گاوس - سایدل همگرا نیستند به کار برد.

۲-اگر فاکتور $1 < w < 2$ باشد در این صورت روش را فوق تخفیف یا SOR می نامیم و برای سرعت بخشیدن به همگرایی دستگاههایی که به روش گاوس - سایدل همگرا هستند به کار می رود.

۳-اگر $w = 1$ باشد روش همان روش گاوس - سایدل است.

اگر به جای $r_{ii}^{(k)}$ در (4) رابطه (1) قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
x_i^{(k)} &= x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_i^{(k-1)}) \qquad k = 1,2,\ldots \qquad i = 1(1)n \\
&= x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k-1)}) \\
&= x_i^{(k-1)} - w x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}) \\
\therefore\ x_i^{(k)} &= (1-w) x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)})
\end{aligned}$$

الگوریتم روش SOR

برای سیستم داده شده $AX = b$ و یک تقریب اولیه و انتخاب w مناسب و z داده شده عبارت است از:

۱- مرحله اول: برای $k = 1$.

۲- مرحله دوم: برای $i = 1(1)n$ محاسبه کن:

$$x_i^{(k)} = (1-w) x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)})$$

۳-اگر $X^{(k)}$ دقیق باشد و یا به عبارت دیگر $\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\| \le x$ برو به مرحله ۴.

در غیر این صورت $k = k+1$ و به مرحله ۲ برو.

۴- متوقف شو.

اثبات همگرایی به روش ماتریسی:

$$a_{ii}x_i^{(k)} = a_{ii}(1-w)x_i^{(k-1)} + w(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)})$$

$$a_{ii}x_i^{(k)} = a_{ii}(1-w)x_i^{(k-1)} + wb_i - w\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}$$

$$(D+wL)X^{(k)} = [(1-w)D - wU]X^{(k-1)} + wb$$

$$X^{(k)} = (D+wL)^{-1}[(1-w)D - wU)X^{(k-1)} + w(D+wL)^{-1}b$$

$$or$$

$$X^{(k)} = H_w X^{(k-1)} + C \qquad k = 1,2,...$$

برای تعیین فاکتور w جهت استفاده از روش SOR ابتدا دو قضیه زیر را بیان می کنیم.

قضیه کاهان:

برای هر ماتریس دلخواه ، $A_{n\times n}$ $r(H_w) \ge |w-1|$ است.اگر روش SOR همگرا باشد آنگاه

$$0 < w < 2$$

که در آن $H_w = (D+wL)^{-1}[(1-w)D - wU]$ ماتریس تکراری روش SOR است.

اثبات:

برای اثبات قضیه ماتریس $I + wD^{-1}L$ را درنظر می گیریم.این یک ماتریس پایین مثلثی است و قطر اصلی آن واحد می باشد.بنابراین برای هر مقدار دلخواه w، $\det\{(I+wD^{-1}L)\} = 1$.بنابراین چندجمله ای مشخصه ماتریس تکراری H_w را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} P(l) &= \det(lI - H_w) = \det(I + wD^{-1}L)(lI - H_w) \\ &= \det[l(I + wD^{-1}L) - (I - wD^{-1}L)H_w] \qquad (1) \end{aligned}$$

اما ماتریس تکراری SOR عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
H_w &= (D+wL)^{-1}[(1-w)D-wU] \\
&= [D(I+wD^{-1}L)]^{-1}[D((1-w)I-wD^{-1}U)] \\
&= (I+wD^{-1}L)^{-1}D^{-1}D[(1-w)I-wD^{-1}U] \\
&= (I+wD^{-1}L)^{-1}[(1-w)I-wD^{-1}U] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xrightarrow{(2)\ \ in\ \ (1)} P(l) &= \det\{l(I+wD^{-1}L)-(I+wD^{-1}L)(I+wD^{-1}L)^{-1}[(1-w)I-wD^{-1}U]\} \\
&= \det\{l(I+wD^{-1}L)-(1-w)I+wD^{-1}U\} \\
&= \det\{[l-(1-w)]I+lwD^{-1}L+wD^{-1}U\} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
P(0)=\det\{-(1-w)I+wD^{-1}U\}=(w-1)^n \qquad (4)
$$

که ماتریسی بالامثلثی است و روی قطر اصلی $w-1$ است.

$$
\prod_{i=1}^{n} \left| l_i(H_w) \right| = |w-1|^n
$$

$$
\begin{aligned}
&r(H_w)=\max\{|l_i(H_w)|\} \\
&[r(H_w)]^n \ge |w-1|^n \quad \Rightarrow r(H_w) \ge |w-1|
\end{aligned}
$$

حال اگر روش SOR همگرا باشد لازم است داشته باشیم $r(H_w)<1$.بنابراین نتیجه می گیریم که:

$$
r(H_w) \le |w-1| \le 1 \quad \Rightarrow 0 \prec w \prec 2
$$

تعریف:

ماتریس $A_{n\times n}$ را معین مثبت گوییم هرگاه برای یک بردار ناصفر X داشته باشیم:

$$
\begin{aligned}
&X^T AX \succ 0 \\
&or \\
&X^T AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j x_i \succ 0
\end{aligned}
$$

اگر $X^T AX \ge 0$ ماتریس شبه معین مثبت نامیده می شود.

مثال:

نشان دهید ماتریس زیر معین مثبت است.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

حل

A متقارن و سه قطری است.

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\neq \overline{0}$$

$$X^T=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix}4x_1+3x_2\\ 3x_1+4x_2-x_3\\ -x_2+4x_3\end{bmatrix}$$

$$=4x_1^2+6x_1x_2+4x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$$

$$=x_1^2+3(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+3x_3^2\succ 0$$

یعنی A معین مثبت است.

قضیه:

هرگاه ماتریس $A_{n\times n}$ معین مثبت و سه قطری باشد آن گاه:

$$r(H_g)=[r(H_j)]^2<1$$

که در آن H_g ماتریس تکراری روش گاوس -سایدل و H_j ماتریس تکراری روش ژاکوبی است.

بهترین انتخاب w روش SOR عبارت است از:

$$r(H_w)=w-1$$

$$w=\frac{2}{1+\sqrt{1-[r(H_j)]^2}}$$

و یا در مسائل عملی w_{opt} از فرمولهای زیر محاسبه می گردد:

$$w_{opt}=\frac{2}{1+\sin ph}$$

$$r(H_w)=\frac{1-\sin ph}{1+\sin ph}=\frac{2-(1+\sin ph)}{1+\sin ph}=w_{opt}-1$$

که $h=\frac{1}{1+n}$ گامهایی است که معادله دیفرانسیل با آن حل شده است.

مثال:

دستگاه زیر را با روش SOR حل کنید.در صورتی که معیار دقت $z=0.8\times10^{-2}$ و تقریب اولیه $X^{(0)}=[1,1,1]^T$ باشد.

$$\begin{Bmatrix} 4x_1 & & +3x_2 & =24 \\ 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & =30 \\ & -x_2 & +4x_3 & =-24 \end{Bmatrix}$$

حل

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس متقارن و سه قطری است و در مثال قبل نشان دادیم معین مثبت نیز است .پس می توان از قضیه فوق استفاده کرد و فاکتور w را محاسبه نمود.

$$w=\frac{2}{1+\sqrt{1-r^2(H\ )}}\quad ;H_w=-D^{-1}(L+w)$$

برای دستگاه داده شده ماتریس تکراری ژاکوبی عبارت است از:

$$H_j = -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|H_j - l I\right| = \begin{vmatrix} -l & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -l & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -l \end{vmatrix} = -l\,(l^2 - \frac{10}{16}) = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} l_1 = 0 \\ l_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{10}}{4} \end{matrix} \right\} \Rightarrow r^2(H_j) = \frac{10}{16}$$

$$w = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{10}{16}}} \cong 1.25$$

با توجه به مقدار w استفاره از روش SOR مجاز است.

سیستم را مرتب می کنیم.سپس طرفین فوق را در $w = 1.25$ ضرب می کنیم.در انتها x_1 و x_2 و x_3 را در طرف چپ و بقیه را به سمت راست انتقال می دهیم.

$$x_1 = {(24 - 3x_2)}\Big/{4}$$
$$x_2 = {(30 - 3x_1 + x_3)}\Big/{4}$$
$$x_3 = {(-24 + x_2)}\Big/{4}$$

$$1.25x_1 = 7.5 - 0.937x_2$$
$$1.25x_2 = 9.375 - 0.937x_1 + 0.3125x_3$$
$$1.25x_3 = -7.5 + 0.3125x_2$$

$$x_1 = 7.5 - 0.937x_2 - 0.25x_1$$
$$x_2 = 9.375 - 0.937x_1 + 0.3125x_3 - 0.25x_2$$
$$x_3 = -7.5 + 0.3125x_2 - 0.25x_3$$

$$x_1^{(1)} = 6.313$$
$$x_2^{(1)} = 3.522$$
$$x_3^{(1)} = -6.649$$
$$\vdots$$
$$x_1^{(6)} = 3.0214577$$
$$x_2^{(6)} = 3.9821186$$
$$x_3^{(6)} = -5.0044703$$

--- $\Rightarrow \left\| X^{(7)} - X^{(6)} \right\| = 0.008$

$$x_1^{(7)} = 3.01341$$
$$x_2^{(7)} = 3.98882$$
$$x_3^{(7)} = -5.00279$$

آنالیز خطا

نرمهای برداری و ماتریسی

تعریف: یک نرم برداری روی $\Re^n$ یعنی مجموعه تمام بردارهای n بعدی با مولفه های حقیقی ، تابعی است مانند $\|.\|$ از $\Re^n$ بتوی $\Re$

$$\|.\| : \Re^n \to \Re$$

که در خواص زیر صدق می کند:

۱- $\forall X \in \Re^n : \|X\| > 0$

۲- $\|X\| > 0$ اگر و فقط اگر $X \neq \bar{0}$.

۳- $\forall a \in \Re, X \in \Re^n : \|aX\| = |a| \|X\|$

۴- $\forall X, Y \in \Re^n : \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

تعریف: نرمهای l_1 و l_2 و l_∞ برای بردار $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ به صورت زیر تعریف می شوند:

۱- نرم اقلیدسی :

$$\|X\|_2 = \{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\}^{1/2}$$

۲- نرم ماکزیمم :

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$

۳- نرم مطلق :

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

قضیه: به ازای هر $Y, X \in \Re^n, a \in \Re$

۱- $\|X\|_\infty > 0$

۲- $\|X\|_\infty > 0$ اگر و فقط اگر $X = \bar{0}$

۳- $\|aX\|_\infty = |a|\|X\|_\infty$

۴- $\|X+Y\|_\infty \le \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$

اثبات۴):

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}|x_i + y_i| \le \max_{1\le i\le n}\{|x_i| + |y_i|\} \\ &\le \max_{1\le i\le n}|x_i| + \max_{1\le i\le n}|y_i| \\ &= \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty\end{aligned}$$

تعریف: دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارهای در $\Re^n$ را نسبت به نرم $\|.\|$ همگرا به x گویند اگر به ازای هر $z \succ 0$ عدد صحیحی مانند $N(z)$ یافت شود به طوری که به ازای هر $k \ge N(z)$ داشته باشیم:

$$\|x^{(k)} - x\| < z$$

<u>تعریف نرم ماتریسی</u>

یک نرم ماتریسی بر مجموعه تمام ماتریسهای $n\times n$ حقیقی تابعی است حقیقی مانند $\|.\|$ که بر این مجموعه تعریف شده باشد و به ازای هر مقدار $a \in \Re$ و ماتریسهای $n\times n$ ، A و B در شرایط زیر صدق کند:

۱- $\|A_{n\times n}\| > 0$

۲- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \bar{0}$

۳- $\forall a \in \Re, A_{n\times n} : \|aA\| = |a|\|A\|$

۴- $\forall A_{n\times n}, B_{n\times n} : \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

۵- $\|AB\| \prec \|A\|.\|B\|$

قضیه :

هرگاه $A=(a_{ij})$ یک ماتریس $n\times n$ باشد آن گاه

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

تعریف :

یک ماتریس $n\times n$ مانند $A=(a_{ij})$ را همگرا نامیم اگر

$$\forall i, j = 1(1)n \quad : \lim_{k\to\infty}(A^k)_{ij} = 0$$

نرمهایی که معمولا استفاده می کنیم عبارتند از:

۱) نرم اقلیدسی (فروبینیوس) :

$$F(A) = \{\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij})^2\}^{1/2}$$

۲) نرم ماکزیمم:

الف: سطری

$$\|A\|_\infty = \max_{i}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\}$$

ب) ستونی

$$\|A\|_\infty = \max_{j}\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\}$$

۳) نرم طیفی (هیلبرت)

$$\|A\|_2 = \sqrt{r(A^T A)}$$

لم:

هرگاه $\|A\|<1$،آنگاه :

$$\frac{1}{1+\|A\|}\le\left\|(I\pm A)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|A\|}\,.$$

برهان)

اگـر $\|A\|<1$ طبـق تعریفـی در جبـر خطـی $r(A)<1$ آنگـاه $|I-A|\neq 0$.(چـون اگـر $l \prec 1$ آنگـاه $|Il-A|=0$)

یعنی $(I-A)^{-1}$ موجود است .پس داریم:

$$(I-A)^{-1}(I-A)=I_{n\times n}$$

$$I=(I-A)^{-1}-(I-A)^{-1}A$$

$$(I-A)^{-1}A=(I-A)^{-1}-I \qquad (1)$$

$$\left.\begin{cases}\left\|(I-A)^{-1}A\right\|=\left\|(I-A)^{-1}-I\right\|\ge\left\|(I-A)^{-1}\right\|-1\\ \left\|(I-A)^{-1}A\right\|\le\left\|(I-A)^{-1}\right\|\|A\|\end{cases}\right\}\Rightarrow\quad \left\|(I-A)^{-1}\right\|\|A\|\ge\left\|(I-A)^{-1}\right\|-1$$

$$1\ge\left\|(I-A)^{-1}\right\|[1-\|A\|]$$

$$\therefore\quad \left\|(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|A\|}\quad\xrightarrow{if\ A\to -A}\quad\left\|(I+A)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|A\|}$$

$$\|A\|=\|-A\|$$

آنالیز خطای روشهای مستقیم

سیستم خطی

$$AX=b \qquad (1)$$

را که دارای جواب منحصر به فرد $X=A^{-1}b$ است را در نظر می گیـریم.فـرض مـی کنـیم کـه dA خطای درایه های ماتریس A و db خطای بردار bباشد .در ایـن صـورت جـواب تقریبـی $\overline{X}$ عبـارت است از:

$$(A+dA)\bar{X}=b+db \Rightarrow \quad \bar{X}=(A+dA)^{-1}(b+db) \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}\bar{X}-X &= (A+dA)^{-1}(b+db)-A^{-1}b\\ &= (A+dA)^{-1}b+(A+dA)^{-1}db-A^{-1}b\\ &= [(A+dA)^{-1}-A^{-1}]b+(A+dA)^{-1}db \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\|\bar{X}-X\| \le \|(A+dA)^{-1}-A^{-1}\|\|b\|+\|(A+dA)^{-1}\|\|db\| \qquad (3)'$$

$$\|(A+dA)^{-1}\| = \|(A+dA)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}\| \le \|(A+dA)^{-1}-A^{-1}\|+\|A^{-1}\| \qquad (4)$$

با قرار دادن (4) در $(3)'$ داریم:

$$\begin{aligned}\|\bar{X}-X\| &\le \|(A+dA)^{-1}-A^{-1}\|\|b\|+\|(A+dA)^{-1}-A^{-1}\|\|db\|+\|A^{-1}\|\|db\|\\ &= \|(A+dA)^{-1}-A^{-1}\|*[\|b\|+\|db\|]+\|A^{-1}\|\|db\| \qquad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(A+dA)^{-1}-A^{-1}\| &= \|A^{-1}-(A+dA)^{-1}\| = \left\|A^{-1}-\left[A(I-A^{-1}dA)\right]^{-1}\right\|\\ &= \|A^{-1}-(I-A^{-1}dA)^{-1}A^{-1}\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \|I-(I-A^{-1}dA)^{-1}]A^{-1}\|\\ &\le \|I-(I-A^{-1}dA)^{-1}\|\|A^{-1}\|\\ &= \|(I-A^{-1}dA)^{-1}[I-A^{-1}dA-I]\|\|A^{-1}\|\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \|(A+dA)^{-1}-A^{-1}\| \le \|A^{-1}\|\|(I-A^{-1}dA)^{-1}\|\|-A^{-1}dA\| \qquad (6)$$

اگر فرض کنیم $\|A^{-1}dA\|<1$ طبق لم داریم:

$$\|(I-A^{-1}dA)^{-1}\| < \frac{1}{1-\|A^{-1}dA\|}$$

اگر عبارت فوق را در (6) قرار دهیم داریم:

$$\|(A+dA)^{-1}-A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|\|A^{-1}dA\|}{1-\|A^{-1}dA\|} \qquad (7)$$

حال (7) را در (5) قرار می دهیم:

$$\left\|\bar{X}-X\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|\left\|A^{-1}dA\right\|}{1-\left\|A^{-1}dA\right\|}[\|b\|+\|db\|]+\left\|A^{-1}\right\|\|db\|$$

$$\therefore \left\|\bar{X}-X\right\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|\|A\|}{1-\left\|A^{-1}dA\right\|}\left(\frac{\|X\|\|dA\|}{\|A\|}+\frac{\|db\|}{\|A\|}\right) \qquad (8)$$

$$\|AX\| = \|b\| \leq \|A\|\|X\|$$

$$\frac{\left\|\bar{X}-X\right\|}{\|X\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|\|A\|}{1-\left\|A^{-1}dA\right\|}\left(\frac{\|X\|\|dA\|}{\|A\|\|X\|}+\frac{\|db\|}{\|A\|\|X\|}\right) \qquad (9)$$

$$\frac{\left\|\bar{X}-X\right\|}{\|X\|} \leq \frac{cond(A)}{1-\left\|A^{-1}dA\right\|}\left(\frac{\|dA\|}{\|A\|}+\frac{\|db\|}{\|b\|}\right) \qquad (10)$$

حال اگر $cond(A)$ نزدیک به عدد یک باشد سیستم را خوش وضع و اگر $cond \succ\succ 1$ سیستم را بدوضع می نامند.

با توجه به رابطه (10) نتیجه می گیریم که خطای نسبی در بردار جواب X با خطای نسبی درایه های A و b در ارتباط است. چنان چه عدد حالت بسیار بزرگتر ازیک باشد (در عمل بیشتر از ۱۰) در اینصورت کوچکترین تغییراتی در b یا A بزرگترین تغییرات را در بردار جواب ایجاد می کند.در این صورت جوابهای حاصله با خطای زیادی همراه هستند و قابل اطمینان نیستند.لذا سیستم را سیستم بد وضع می نامند.

چنانچه عدد حالت نزدیک وکوچکتر از یک باشد در اینصورت با توجه به (10) هرگونه تغییرات در A و b تغییر آنچنانی در بردار جواب نمی دهد.لذا سیستم را سیستم خوش وضع می نامند.در عمل استفاده از تعریف عدد حالت به خاطر این که به دست آوردن معکوس ماتریس A چنان چه ابعاد آن بسیار بزرگ باشد مقدور نیست ،مرسوم نیست لذا می توان معیارهای دیگری را جهت بررسی کردن خوش وضعی و بدوضعی یک سیستم عملا به کار برد.یکی از این معیارها این است که اگر میانگین

درایه های ماتریس نسبت به دترمینان آن ماتریس بسیار بزرگ باشد در این صورت سیستم را بدوضع می نامیم.همچنین می توان از معیار بررسی نیومن استفاده کرد که عبارت است از:

$$cond\ (A) = \sqrt{\left|\frac{l_{\max}}{l_{\min}}\right|}$$

$l_{\min}$ کوچکترین مقدار ویژه و $l_{\max}$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس است. چنان چه نسبت این دو مقدار ویژه بسیار بزرگ باشد سیستم را بدوضع می نامند.اما از لحاظ عملی چنان چه سیستم بسیار بزرگ باشد به کار بردن معیار های فوق الذکر عملا مقدور نیست، لذا می توان سیستم فوق را بایک الگوریتم و با معیار دقت t رقم اعشار محاسبه نمود و سپس همین الگوریتم را با معیار دقت دو برابر محاسبه نمود. چنان چه جوابهای هر دو حالت نزدیک هم باشند سیستم را خوش وضع می نامیم در غیر این صورت سیستم را بدوضع می نامیم.

نتایج:

الف) اگر فرض کنیم که در بردار b هیچ خطایی وجود نداشته باشد (یعنی $d\,b = 0$) آنگاه خطای نسبی عبارت است از:

$$\frac{\|\bar{X} - X\|}{\|X\|} \le \frac{cond(A)}{1 - \|A^{-1}dA\|} \cdot \frac{\|dA\|}{\|A\|}$$

ب)اگر فرض کنیم که در درایه های ماتریس A خطایی وجود نداشته باشد (یعنی $dA = 0$) در این صورت خطای نسبی برابراست با:

$$\frac{\|\bar{X} - X\|}{\|X\|} \le cond(A)(\frac{\|db\|}{\|b\|}$$

<u>مثال</u>

بد وضعی یا خوش وضعی دستگاه های زیر را بررسی کنید.

$$41x_1 + 40x_2 = 81$$
$$(1)$$
$$40x_1 + 39x_2 = 79$$

$$2.0000x_1 + 0.6667x_2 = 2.0000$$
$$(2)$$
$$1.0000x_1 + 0.3333x_2 = 1.0000$$

حل:

جواب دستگاه (1) عبارت است از:

$$x_1 = x_2 = 1$$

در حالی که میانگین درایه ها ۴۰ و دترمینان ماتریس ضرایب ۱- است.یعنی سیستم بدوضع است.

چون اگر $80.99 \to 81$ و $79.01 \to 79$ جواب دستگاه $x_1 = 1.79, x_2 = 0.19$ می شود. یعنی کوچکترین تغییر در b باعث بزرگترین تغییر در بردار جواب می گردد.

برای دستگاه (2) جوابها عبارتند از:

$$x_1 = 1.0000$$
$$x_2 = 0$$

حال با تغییر ۰،۶۶۶۷ به ۰،۶۶۶۶ جوابها به

$$x_1 = 1 - 0.333k$$
$$x_2 = k$$

تغییر می یابند.همچنین دترمینان ماتریس به صفر تقلیل می یابد.پس سیستم بدوضع است.

آنالیز همگرایی روشهای تکراری

سیستم خطی ذیل مفروض است .چنان چه روشهای تکراری را جهت حل آن به کار بگیریم

$$AX = b$$
$$X^{(k)} = HX^{(k-1)} + C \qquad k = 1,2,3,\ldots \quad (1)$$

$X^{(k)}$ جواب تقریبی است که با استفاده از روش تکراری پس از k مرتبه تکرار محاسبه شده است و X جواب واقعی سیستم است.در این جا ما درصدد بررسی رفتار جواب سیستم فوق هستیم .

از آنجا که X جواب واقعی سیستم است پس در رابطه تکراری فوق صدق می کند.

$$X = HX + C \qquad (2)$$

اگر (2) را از (1) کم کنیم:

$$\begin{aligned}
&X^{(k)} - X = H(X^{(k-1)} - X) && k = 1,2,\ldots \\
&x^{(k)} = Hx^{(k-1)} && k = 1,2,\ldots \\
&x^{(1)} = Hx^{(0)} \\
&x^{(2)} = Hx^{(1)} = H^2 x^{(0)} \\
&\vdots \\
&x^{(k)} = H^k x^{(0)} \qquad (3)
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۳) می توان دریافت که اگر k افزایش بیابد یا به عبارتی $k \to \infty$ برای این که خطا به سمت صفر میل کند لازم است که ماتریس H^k به سمت صفر میل نماید.جهت بررسی همگرایی فرض می کنیم که ماتریس تکراری H در هر مرحله تکرار ثابت باشد.حال جهت اثبات همگرایی روشهای تکراری ابتدا چند لم و قضیه زیر را درنظر می گیریم و سپس قضایای همگرایی را اثبات می کنیم.

لم ۱: برای هر نرم $\|\cdot\|_p$ داریم:

$$r(A) \le \|A\|_p$$

اثبات)

فرض می کنیم x, l مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن برای ماتریس A باشند.پس داریم:

$$\begin{aligned}
&Ax = l\,x \\
&\|l\,x\|_p = |l|\,\|x\| = \|Ax\|_p \le \|A\|_p \|x\|_p \\
&\therefore \quad |l|\,\|x\|_p \le \|A\|_p \|x\|_p \quad \Rightarrow |l| \le \|A\|_p
\end{aligned}$$

برای هر مقدار ویژه ای از جمله شعاع طیفی .

قضیه ۱:

ماتریس $A_{n\times n}$ مفروض است آنگاه $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ اگر $\|A\| < 1$ و اگر و فقط اگر $r(A) < 1$.

برهان قسمت اول:

$$if \quad \|A\|<1 \Rightarrow \|A^k\| \le \|A\|^k$$
$$\lim_{k\to\infty}\|A^k\| \le \lim_{k\to\infty}\|A\|^k \to 0 \qquad \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\|A^k\| \to 0 \quad \left\|\lim_{k\to\infty} A^k\right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} A^k = 0$$

برهان قسمت دوم:

برای آسانی کار فرض می کنیم تمام مقادیر ویژه ماتریس مورد نظر مجزا و حقیقی باشند آنگاه یک تبدیل متشابه ساز مانند S یافت می شود به طوری که ماتریس را به ماتریسی قطری مثل D تبدیل می کند به صورتی که تمام مقادیر ویژه ماتریس موردنظر روی قطر اصلی ماتریس D قرار دارد.یعنی:

$$D=\begin{bmatrix} l_1 & & & 0 \\ & l_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & l_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow: \\ &A^2 = (S^{-1}DS)^2 = (S^{-1}DS)(S^{-1}DS) = S^{-1}D^2S \\ &\vdots \\ &A^k = S^{-1}D^kS \\ &\Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} {l_1}^k & & & \\ & {l_2}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & {l_n}^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$if \ r(A)<1 \quad in(1) \quad \Rightarrow |l_i|<1 \quad i=1,2,3,...$$
$$\lim_{k\to\infty} A^k = S^{-1}\lim_{k\to\infty} D^k \ S \quad \to 0$$
$$\Leftarrow:$$
$$if \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \ \equiv \lim_{k\to\infty} S^{-1}D^kS = 0 \quad \xrightarrow{S^{-1},S\neq 0} \lim_{k\to\infty} D^k = 0$$
$$\equiv |l_i|<1 \quad i=1(1)n \Rightarrow \max|l_i|<1$$

قضیه۲:

سری نامتناهی $I+A+A^2+A^3+\dots$ به $(I-A)^{-1}$همگراست اگر $\lim_{k\to\infty} A^k=0$.(این سری بـه سـری نیومن معروف است.)

اثبات) با توجه به قضیه فوق نتیجه می گیریم :

$$\lim_{k\to\infty} A^k=0 \xrightarrow{theorem1} r\ (A)<1 \ \Rightarrow |I-A|\neq 0$$

یعنی $(I-A)^{-1}$ موجود است.

$$(I+A+A^2+\cdots+A^k)(I-A)=I-A^{k+1}$$
$$\lim_{k\to\infty}(I+A+A^2+\cdots+A^k)=\lim_{k\to\infty}(I-A^{k+1})(I-A)^{-1}$$
$$\xrightarrow{A^k\to 0} I+A+A^2+\cdots=(I-0)(I-A)^{-1}=(I-A)^{-1}$$

قضیه همگرایی ۱:

روش تکراری $X^{(k)}=HX^{(k-10}+C \quad k=1,2,\dots$ که برای حل سیـستم $AX=b$ بـه کارگرفتـه مـی شود علیرغم هر تقریب اولیه ای به مقدار واقعی جواب همگراست اگر $\|H\|<1$.

برهان:

بدون خلل به کلیت مسئله اگر بردار تقریب اولیه $X^{(0)}=(0,0,\dots,0)=\overline{0}$ را انتخاب کنیم داریم:

$$\begin{aligned}
&k=1 \quad X^{(1)}=C\\
&k=2 \quad X^{(2)}=HX^{(1)}+C=HC+C=(H+I)C\\
&k=3 \quad X^{(3)}=HX^{(20}+C=H((H+I)C)+C=(H^2+H+I)C\\
&\vdots\\
&\lim_{k\to\infty} X^{(k)}=\lim_{k\to\infty}(H^{k-1}+H^{k-2}+\cdots+H+I)C\\
&\lim_{k\to\infty} X^{(k)}=(I-H)^{-1}C \qquad (B)
\end{aligned}$$

حالت۱) اگر روش تکراری ژاکوبی باشد:

$$H_j=-D^{-1}(L+U) \quad ; C_j=D^{-1}b$$

و با قرار دادن این عبارت در (B) داریم:

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = (I + D^{-1}(U+L))^{-1} D^{-1} b$$
$$= [D^{-1}(D+(U+L))]^{-1} D^{-1} b$$
$$= (D^{-1} A)^{-1} D^{-1} b$$
$$= A^{-1} D D^{-1} b$$
$$= A^{-1} b$$
$$= X$$
$$\xrightarrow{*} \lim_{k\to\infty} z^{(k)} = \lim_{k\to\infty} H^k z^{(0)} \xrightarrow{\|H\|\prec 1} 0$$

حالت ۲) اگر روش تکراری گاوس - سایدل باشد:

$$H_g = -(L+D)^{-1} U \quad ; C_g = (L+D)^{-1} b$$

با قرار دادن این عبارت در (B) داریم:

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = (I + (L+D)^{-1} U)^{-1} (L+D)^{-1} b$$
$$= ((L+D)^{-1}(L+D+U))^{-1} (L+D)^{-1} b$$
$$= A^{-1}(L+D)(L+D)^{-1} b = X$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} z^{(k)} \to 0$$

حالت ۳) اگر روش تکراری SOR باشد:

$$H_w = (D+wL)^{-1}[(1-w)D - wU] \quad ; \quad C_w = w(D+wL)^{-1} b$$

با جایگذاری در عبارت (B) داریم:

$$\lim_{k\leftarrow\infty} X^{(k)} = (I - (D+wL)^{-1}[(1-w)D - wU])^{-1} w(D+wL)^{-1} b$$
$$= \{(D+wL)^{-1}[D+wL-(1-w)D+wU]\}^{-1} w(D+wL)^{-1} b$$
$$= A^{-1}(D+wL)(D+wL)^{-1} b = X$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} z^{(k)} \to 0$$

قضیه همگرایی ۲:

شرط لازم و کافی برای آنکه یک روش تکراری به فرم $k=1,2,\ldots \quad X^{(k)} = HX^{(k-1)} + C$ همگرا باشد آن است که مقادیر ویژه ماتریس تکراری H در رابطه زیر صدق کند:

$$|l_i(H)| < 1 \quad ; i = 1,2,\ldots$$

برهان:

فرض کنیم ماتریس تکراری H دارای n مقدار ویـژه متمـایز $l_1, l_2, ..., l_n$ باشـد.اگـر $z^{(0)}$ خطـا در تقریب اولیه این روش باشد از آنجا که مقادیر ویژه مجزا هستند نتیجـه مـی گیـریم کـه تمـام بردارهـای ویژه متناظر این مقادیر $x_1, x_2, \cdots, x_n$ مستقل خطی هستند و تشکیل فضای برداری مـی دهنـد.یعنـی هـر بردار در این فضا را می توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای مستقل خطی نوشت:

$$
\begin{aligned}
& z^{(0)} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n \qquad C_i, X_i \neq 0 \qquad (1) \\
& Hz^{(0)} = C_1 HX_1 + C_2 HX_2 + \cdots + C_n HX_n \xrightarrow{HX = lX} \\
& \qquad = C_1 l_1 X_1 + C_2 l_2 X_2 + \cdots + C_n l_n X_n \\
& H^2 z^{(0)} = C_1 {l_1}^2 X_1 + C_2 {l_2}^2 X_2 + \cdots + C_n {l_n}^2 X_n \\
& \vdots \\
& \lim_{k\to\infty} H^k z^{(0)} = \lim_{k\to\infty} (C_1 {l_1}^k X_1 + \cdots + C_n {l_n}^k X_n) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
if \quad \lim_{k\to\infty} H^k \to 0 \quad or \quad \lim_{k\to\infty} z^{(k)} \to 0 \quad \Leftrightarrow because \; X_i, C_i \neq 0 \quad \lim_{k\to\infty} {l_i}^k = 0 \quad i = 1(1)n
$$

$$
\Leftrightarrow \quad |l_i| \prec 1 \qquad i = 1(1)n
$$

تعریف:

فرض می کنیم v سرعت همگرایی روشهای تکراری باشد در این صورت مـی تـوان v را بـه صـورت زیر تعریف نمود:

$$
v = -\log\ r(H)
$$

از این تعریف نتیجه می گیریم که تعداد مراحل تکرار لازم با نرخ همگرایی نسبت معکوس دارد.یعنی هر چقدر شعاع طیفی ماتریس H کوچکتر باشد تعداد مراحل کمتر و مرتبه همگرایی بیشتر می شود.

مثال ۱:

سیستم را به روش SOR تا دو مرحله حل کرده و سرعت همگرایی آن را بیابید.

$$\begin{Bmatrix} 3x+2y & & = 4.5 \\ 2x+3y-z & & = \ \ 5 \\ & -y+2z & = -0.5 \end{Bmatrix}$$

راهنمایی:ماتریس ضرایب متقارن، سه قطری است.ثابت می کنیم معین مثبت است.یعنی:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2(x^2 + 2xy + y^2) + x^2 + z^2 + (z-y)^2 \succ 0$$

$$w = \frac{2}{1+\sqrt{1-r^2(H)}} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{7}{18}}}$$

$$H_j = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| H_j - lI \right| = 0 \quad \equiv \begin{Bmatrix} l_1 = 0 \\ l_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{11}{18}} \end{Bmatrix} \Rightarrow r^2(H_j) = \frac{11}{18}$$

قضیه: اگر سیستم خطی $AX = b$ اکیدا غالب قطری باشد آنگاه روش تکراری ژاکوبی همواره همگراست.

برهان: طبق تعریف (غالب قطری) داریم:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}| \quad or \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1 \quad (*)$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \quad H=-D^{-1}(L+U)$$

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad D^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$L+U=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H=-\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1,n-1}}{a_{11}} & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & & & & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}$$

حال کافی است که نرم ماکزیمم سطری ماتریس H را حساب کنیم که:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$$

می شود که طبق (*) کمتر از یک می باشد.یعنی:

$$\|H\|<1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} H^k=0 \quad \equiv \lim_{k\to\infty} z^{\,k}=0$$

یعنی این روش (ژاکوبی) همگراست.

مثال۲:

فرض کنیم ماتریس A به صورت $A=B-C$ داده شده است که در آن A و B و C

نامنفرد هستند. همچنین $BX^{(m)} = CX^{(m-1)} + Y \quad m=1,2,...$ مفروض است. شرط لازم و کافی بـرای

آن که $\lim\limits_{m\to\infty} X^{(m)} = A^{-1}Y$ چیست؟

حل:

$$
\begin{aligned}
&X^{(m)} = B^{-1}CX^{(m-1)} + B^{-1}Y \qquad if \quad B^{-1}C = H, B^{-1}Y = d \\
&m=1 \quad X^{(1)} = HX^{(0)} + d \quad \Leftrightarrow \\
&m=2 \quad X^{(2)} = HX^{(1)} + d = H(HX^{(0)} + d) + d = H^2X^{(0)} + (H+I)d \quad \Leftrightarrow \\
&\vdots \\
&\qquad X^{(m)} = H^mX^{(0)} + (H^{m-1} + H^{m-2} + \cdots + I)d
\end{aligned}
$$

حال اگر فرض کنیم

$$\|H\| = \|B^{-1}C\| \prec 1 \quad (*)$$

در این صورت

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\leftarrow\infty}(B^{-1}C)^m = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\lim_{m\to\infty} X^{(m)} = (B^{-1}(B-C))^{-1}d \quad \Leftrightarrow \\
&\lim_{m\to\infty} X^{(m)} = A^{-1}Bd = A^{-1}Y
\end{aligned}
$$

یعنی شرط لازم و کافی همان (*) می باشد.

قضیه: اگر ماتریس ضرایب سیستم $AX=b$ اکیدا غالب قطری باشـد آن گـاه روش گـاوس- سـایدل

برای هر $X^{(0)}$ همگراست.

اثبات)

$$
\begin{aligned}
&e^{(k)} = X + (L+D)^{-1}U - (L+D)^{-1}b \\
&\|e^{(k)}\| = \left\| -\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}e_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}e_j^{(k-1)} \right\| \\
&\|e^{(k)}\| \le \sum_{j=1}^{i-1}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\|e^{(k)}\| + \sum_{j=i+1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\|e^{(k-1)}\|
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{cases}(1-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|})\left\|e^{(k)}\right\| \leq \sum_{j=i+1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\left\|e^{(k-1)}\right\| \\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \sum_{j=1}^{i-1}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| + \sum_{j=i+1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \prec 1\end{cases}\right\} \Rightarrow \quad \left\|e^{(k)}\right\| \prec \left\|e^{(k-1)}\right\| \prec \cdots \prec \left\|e^{(0)}\right\|$$

یعنی این روش (گاوس - سایدل) همگراست.

فصل دوم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

سیستم خطی زیر

$$AX=b$$

را درنظربگیریدکه درآن $b\neq 0$ باشد در این حالت سیستم را ناهمگن ودرغیر این صورت سیستم را همگن می خوانند.اگر سیستم همگن باشد و $\det(A)\neq 0$ ،آنگاه تنها جواب دستگاه می تواند جواب بدیهی ($X=\bar{0}$) باشد.ولی هرگاه سیستم ناهمگن فوق دارای $\det A\neq 0$ باشد سیستم دارای جواب منحصر به فرد $X=A^{-1}b$ است.یافتن جواب غیرصفر برای سیستم همگن منجر به مسئله بردارهای ویژه و مقادیر ویژه می گردد.بدین منظور باید داشته باشیم:

$$\det\,(A-l\,I)=0$$

که عبارت بالا چندجمله ای از درجه n برحسب l است .یعنی:

$$P_n(l)=l^n+a_1 l^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\,l+a_n=0$$

با حل این معادله تمام ریشه های آن $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ به دست می آیند که همان مقادیر ویژه ماتریس موردنظر می باشند.

روشهای مستقیمی که ابتدا چندجمله ای ویژه می یابند و سپس با حل ریشه های چندجمله ای می توان مقادیر ویژه را یافت عبارتند از روش بسط دترمینان ، روش برداری و روش فادیو لوریر و ...

این روشها را می توان با استفاده از مثال زیر بررسی نمود.

مثال:

ماتریس A مفروض است.ابتدا مقادیر ویژه را با استفاده از روش بسط دترمینان به دست می آوریم.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

حل به روش بسط دترمینان:

$$\det(A-l\,I)=\begin{vmatrix}1-l & 2 & 3\\ 2 & 3-l & 1\\ 3 & 1 & 2-l\end{vmatrix}=0$$

$$(1-l)[(3-l)(2-l)-1]+2(3-2(2-l))+3(2-3(3-l))=0$$

$$P_3(l)=-l^3+6l^2+3l-18=0 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix}l_1=6\\ l_{2,3}=\pm\sqrt{3}\end{Bmatrix}$$

این مثال را با روش برداری حل می کنیم.روش برداری مبتنی بـر اسـتفاده از قـضیه کیلـی- هـامیلتون در جبر خطی است که بیان می کند هر ماتریس در چندجمله ای مشخـصه خـود صـدق مـی کنـد.بنـابراین چندجمله ای مشخصه آن برای مثال فوق عبارت است از:

$$P_3(l)=-l^3+a_1l^2-a_2l+a_3$$

طبق قضیه کیلی - هامیلتون ماتریس A در رابطه فوق صدق می کند.یعنی:

$$P_3(A)=-A^3+a_1A^2-a_2A+a_3I=0$$

حال اگر یک بردار دلخواه ناصفر مانند $Y=[1,0,0]^T$ را انتخاب کنیم و در رابطه فوق ضرب نماییم داریم:

$$-A^3Y+a_1A^2Y-a_2AY+a_3Y=\overline{0}$$

رابطه فوق یک دستگاه سه معادله و سه مجهول است که در آن مجهولات a_3,a_2,a_1 هـستند . بـا حـل این دستگاه

$$a_3=-18,a_2=-3,a_1=6$$

می باشند.لذا چندجمله ای مشخصه را می توان به فرم زیر یافت.

$$P_3(l) = -l^3 + 6l^2 + 3l - 18 = 0$$

هدف دو روش فوق این است که به طرق مختلف چندجمله ای مشخصه را می یابند و با حل چندجمله ای مشخصه مقادیر ویژه را به دست می دهند که از لحاظ محاسباتی مقرون به صرفه نیستند.

یکی دیگر از روشهای مستقیمی که برای تعیین مقادیر ویژه به کارمی رود روش فادیو لوریر است که به شرح آن می پردازیم.

روش فادیو لوریر:

این روش با استفاده از اثر ماتریس چندجمله ای مشخصه را محاسبه و با حل این چندجمله ای مقادیر ویژه را به دست می دهد.اثر ماتریس عبارت است از:

$$tr(A_{n\times n}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

چنان چه فرض کنیم ماتریس A یک ماتریس n بعدی باشد آنگاه معادله مشخصه این ماتریس را به صورت زیر درنظر می گیریم:

$$P_n(l) = (-1)^n l^n + a_1 l^{n-1} + \ldots + a_{n-1} l + a_n$$

طبق الگوریتم این روش ماتریس های جدید به شرح زیر ساخته می شوند:

$$\begin{aligned}
&B_1 = A && \Rightarrow a_1 = tr(B_1) \\
&B_2 = A(B_1 - a_1 I) && \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} tr(B_2) \\
&B_3 = A(B_2 - a_2 I) && \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3} tr(B_3) \\
&\vdots && \\
&B_n = A(B_{n-1} - a_{n-1} I) && \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} tr(B_n)
\end{aligned}$$

حال با تعیین شدن ضرایب چندجمله ای و جایگزینی آن ،معادله مشخصه تعیین می شود .باحل این چندجمله ای مقادیر ویژه را می یابیم.

مثال)

تمام مقادیر ویژه ماتریس A را توسط روش فادیو لوریر بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

حل:

$$P_3(l)=(-1)^3\,l^3+a_1\,l^2+a_2\,l+a_3=0$$
$$B_1=A \quad \Rightarrow a_1=tr(B_1)=1+3+2=6$$

$$B_2=A(B_1-a_1I)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-6 & 2 & 3\\ 2 & 3-6 & 1\\ 3 & 1 & 2-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -1 & -7\\ -1 & -4 & 5\\ -7 & 5 & 2\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow a_2=tr(B_2)=\frac{1}{2}(8-4+2)=3$$
$$B_3=A(B_2-a_2I)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8-5 & -1 & -7\\ -1 & -4-3 & 5\\ -7 & 5 & 2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-18 & 0 & 0\\ 0 & -18 & 0\\ 0 & 0 & -18\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad a_3=tr(B_3)=\frac{1}{3}(-18-18-18)=-18$$
$$\therefore \quad P_3(l)=-l^3+6l^2+3l\ -18=0$$

حال کافی است که معادله بالا حل گردد و مقادیر ویژه به دست آید.

مزیت روش لوریر بر روشهای بسط دترمینان و برداری در این است که در روش لوریر ضرایب راحت تر به دست می آیند.

قضیه ۱:

ماتریس های A و A^T دارای مقادیر ویژه یکسان و بردارهای ویژه متعامد هستند.

اثبات:

چون $\det(A)=\det(A^T)$ پس دارای چندجمله ایهای یکسانی هستند یعنی مقادیر ویژه یکسان دارند.

حال فرض می کنیم ماتریس A دارای n مقدار ویژه l_i مجزا باشد و u_i بردارهای ویژه متناظربا مقادیر ویژه آن باشد وفرض می کنیم ماتریس A^T دارای مقادیر ویژه l_j وبردارهای ویژه v_j باشد.طبق تعریف مقدار ویژه داریم:

$$
\begin{aligned}
&Au_i = l_i u_i \qquad && i=1(1)n \quad (1)\\
&A^T v_j = l_j v_j \qquad && j=1(1)n \quad (2)\\
&{v_j}^T A = l_j {v_j}^T \qquad && j=1(1)n \quad (3)\\
&{v_j}^T A u_i = l_j {v_j}^T u_i && \quad (4)\\
&{v_j}^T A u_i = l_i {v_j}^T u_i && \quad (5)\\
&\xrightarrow{(4),(5)} l_j {v^T}_j u_i = l_i {v_j}^T u_i\\
&\Rightarrow (l_j - l_i){v_j}^T u_i = 0 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} if \quad i\neq j \quad {v_j}^T u_i = 0 \qquad (7)\\ if \quad i=j \quad {v_j}^T u_i \neq 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

از آنجا که مولفه های بردارهای ویژه پارامتری هستند لذا می توان مولفه های u و v را طوری انتخاب کرد که :

$$ {v_j}^T u_i = 1 \qquad (8) $$

$$ \xrightarrow{(7),(8)} {v_j}^T u_i = \begin{Bmatrix} 0 & ; i\neq j \\ 1 & ; i=j \end{Bmatrix} $$

و این همان متعامد بودن بردارهای ویژه A و A^T است.

قضیه۲:

مقادیر ویژه A و A^{-1} نسبت به هم معکوس هستند اما بردارهای ویژه یکسانی دارند.

اثبات:

فرض کنیم l_i و u_i به ترتیب مقادیر ویژه وبردارهای ویژه ماتریس A باشند.پس داریم:

$$Au_i = l_i u_i \qquad i = 1(1)n$$
$$\xrightarrow{\text{there is } A^{-1}} u_i = l_i A^{-1} u_i \quad ;because\ A^{-1} \quad is: \det(A) = l_1 l_2 \cdots l_n \neq 0 \Rightarrow l_i \neq 0\ \forall i$$
$$A^{-1} u_i = \frac{1}{l_i} u_i$$

یعنی مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} معکوس مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

تعریف:

ماتریس A و B را دو ماتریس متشابه گوییم هرگاه یک ماتریس نامنفرد نظیر S چنان بیابیم که:

$$A = S^{-1} BS$$

در این رابطه B تحت متشابه ساز S و متشابه A می باشد.

نتیجه:

دو ماتریس متشابه دارای دترمینانهای یکسانی هستند.چون:

$$\left.\begin{array}{l} \det(A) = \det(S^{-1}) \det(B) \det(S) \\ \det(S^{-1}) \det(S) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \det(A) = \det(B)$$

قضیه گرشگورین:

شعاع طیفی یک ماتریس نمی تواند از نرم سطری ستونی آن تجاوز کند.یعنی:

$$r\ (A) \leq \|A\|$$

اثبات ۱:

$$AX = lX$$
$$\|AX\| = \|lX\|$$
$$\|AX\| = |l|\|X\|$$
$$|l|\|X\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\| \quad \Rightarrow \quad \|A\|\|X\| \geq |l|\|X\| \xrightarrow{\|X\| \succ 0} \quad |l| < \|A\|$$

اثبات۲:

$$
\begin{aligned}
&AX_i = l_i X_i \qquad i=1(1)n \qquad X_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \cdots, X_{i,n})\\
&a_{11} X_{i,1} + a_{12} X_{i,2} + \cdots + a_{1n} X_{i,n} = l_i X_{i,1}\\
&a_{21} X_{i,1} + a_{22} X_{i,2} + \cdots + a_{2n} X_{i,n} = l_i X_{i,2}\\
&\vdots\\
&a_{n1} X_{i,1} + a_{n2} X_{i,2} + \cdots + a_{nn} X_{i,n} = l_i X_{i,n}
\end{aligned}
$$

اگر فرض کنیم که $\left|X_{i,k}\right| = \max_r \left|X_{i,r}\right|$ باشد رابطه kام را در نظر می گیریم :

$$
\begin{aligned}
&a_{k1} X_{i,1} + a_{k2} X_{i,2} + \cdots + a_{kk} X_{i,k} + \cdots + a_{kn} X_{i,n} = l_i X_{i,k}\\
&a_{k1} \frac{X_{i,1}}{X_{i,k}} + a_{k2} \frac{X_{i,2}}{X_{i,k}} + \cdots + a_{kk} + \cdots + a_{kn} \frac{X_{i,n}}{X_{i,k}} = l_i \qquad i=1(1)n\\
&\left|l_i\right| \le \left|a_{k1}\right|\left|\frac{X_{i,1}}{X_{i,k}}\right| + \left|a_{k2}\right|\left|\frac{X_{i,2}}{X_{i,k}}\right| + \cdots \left|a_{kk}\right| + \cdots + \left|a_{kn}\right|\left|\frac{X_{i,n}}{X_{i,k}}\right| \qquad i=1(1)n \qquad (1)
\end{aligned}
$$

با توجه به فرض فوق داریم که

$$
\left|\frac{X_{i,r}}{X_{i,k}}\right| < 1 \quad \forall r \qquad (2)
$$

با استفاده ازرابطه(۱) نتیجه می گیریم که :

$$
\left|l_i\right| \le \left|a_{k1}\right| + \left|a_{k2}\right| + \cdots + \left|a_{kk}\right| + \cdots + \left|a_{kn}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{kj}\right| \qquad (3)
$$

این عبارت همان تعریف نرم سطری است.حال طبق قضیه ۱ اگر جای سطر و ستونها عوض شود مقادیر ویژه تغییر نمی کند. پس برای نرم ستونی هم رابطه برقرار است.

قضیه براور:

برای ماتریس $A_{n\times n}$ ، هرگاه P_k حاصلجمع قدر مطلق عناصر سطر k ام به جز درایه روی قطر باشد آنگاه تمام مقادیر ویژه $A_{n\times n}$ داخل یا روی یکی از دوایر زیر

$$
\left|l - a_{kk}\right| \le P_k \quad k=1(1)n
$$

قرار دارند.

برهان:

با استفاده از رابطه (3) در قضیه گرشگورین داریم:

$$|l_i| \le |a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{kk}| + \cdots + |a_{kn}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

$$|l_i| - |a_{kk}| \le |a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + \cdots + |a_{kn}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne k}}^{n} |a_{kj}|$$

از رابطه فوق می توان نتیجه گرفت که:

$$|l_i - a_{kk}| \le |a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{kn}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne k}}^{n} |a_{kj}| = P_k$$

مثال (کاربرد قضیه براور):

حدود مقادیر ویژه ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ابتدا دوایر ستونی را درنظر می گیریم .از آنجا که ماتریس متقارن است اجتماع دوایر سطری و ستونی برهم منطبق اند.

$$\begin{array}{ll} |l-1| \le 5 & \\ \cup & \\ |l-3| \le 3 & \Rightarrow |l-1| \le 5 \\ \cup & \\ |l-2| \le 4 & \end{array}$$

(شکل)

در انتها می بینیم که باید مقادیر ویژه درون یا روی دایره ای به شعاع ۵ و مرکز ۱ قرارداشته باشند.لـذا بـا توجه به این که قبلا مقادیر ویژه این ماتریس را یافته ایم و شعاع طیفی آن ۶ می باشد مقـادیر ویـژه نمـی تواند از اجتماع دوایر فوق خارج گردد.

روشهای تکراری برای تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس

از روشهای تکراری می توان به روش توانی یا توان رسانی (*Power Method*) اشاره کرد.

این روش در هر مرحله بزرگترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن را با معیار دقت مـورد نظـرتعیین می کند.برای آسانی کار فرض می کنیم که تمام مقادیر ویژه مجزا و حقیقـی باشـند و بـه صـورت زیـر مرتب شده باشند:

$$|l_1| > |l_2| > \cdots > |l_n|$$

در مرحله اول یک بردار دلخواه ناصفر مانند $v^{(0)}$ را انتخاب می کنیم ودر ماتریس مورد نظر ضرب می کنیم.یعنی:

$$v^{(0)} \in \Re^n \quad : v^{(0)} = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

$$Av^{(0)} = c_1 Av_1 + c_2 Av_2 + \cdots + c_n Av_n \qquad ; Av_i = l_i v_i \quad i = 1(1)n$$

$$\begin{aligned} v^{(1)} = Av^{(0)} &= c_1 l_1 v_1 + c_2 l_2 v_2 + \cdots + c_n l_n v_n \\ &= l_1 [c_1 v_1 + c_2 \frac{l_2}{l_1} v_2 + \cdots + c_n \frac{l_n}{l_1} v_n] \end{aligned}$$

$$v^{(2)} = Av^{(1)} = l_1^{\,2}[c_1 v_1 + c_2(\frac{l_2}{l_1})^2 v_2 + \cdots + c_n(\frac{l_n}{l_1})^2 v_n]$$

$$\vdots$$

$$v^{(k)} = Av^{(k-1)} = l_1^{\,k}[c_1 v_1 + c_2(\frac{l_2}{l_1})^k v_2 + \cdots + c_n(\frac{l_n}{l_1})^k v_n]$$

$$v^{(k+1)} = Av^{(k)} = l_1^{\,k+1}[c_1 v_1 + c_2(\frac{l_2}{l_1})^{k+1} v_2 + \cdots + c_n(\frac{l_n}{l_1})^{k+1} v_n]$$

$$l_1 = \lim_{k\to\infty}(\frac{v^{(k+1)}}{v^{(k)}})_r$$

$$if\ k \to \infty \quad \Rightarrow \left|\frac{l_i}{l_1}\right| < 1 \quad i = 2(1)n \quad \Rightarrow v^{(k)} = l_1^{\,k} c_1 v_1$$

در هر مرحله اگر بردارهای حاصله را نرمال سازیم یعنی هر بردار را بر نرم ماکزیمم آن تقسیم کنیم این عمل باعث می شود که در مرحله پایانی به جای اینکه $l_1^{\,k}$ را به دست آوریم تنها l_1 را می یابیم .از طرف دیگر با نرمال سازی نتیجه می گیریم که درایه های $v^{(k)}$ ها همه کوچکتر از یک می شوند .این عمل باعث جلوگیری از حجم بزرگ عدد در ضربهای متوالی می گردد وباعث مهار خطای *Round off* می شود.

ضمنا سرعت همگرایی این روش بستگی به نسبت $\frac{l_i}{l_1}\ (i = 2(1)n)$ دارد. هرچه این نسبت کمتر باشد سرعت همگرایی بیشتر می شود.

برای مرحله بعد ماتریسی را معرفی می کنیم که l_2 بزرگترین مقدار ویژه اش باشد.لازم است که بردار v_1 حاصله را در مرحله قبل بر اولین مولفه اش تقسیم کنیم.در نتیجه اولین مولفه v_1 یک می گردد.

همچنین فرض می کنیم که مولفه اول v_2 نیز یک باشد.حال تعریف می کنیم:

$$\Delta v = v_1 - v_2$$

اگر فرض کنیم a_1 سطر اول ماتریس A باشد ماتریس A_1 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_1 = A - v_1 a_1$$

بدین طریق سطر اول ماتریس A_1 صفراست.

حال نشان می دهیم که Δv و l_2 به ترتیب بردار ویژه و بزرگترین مقدارویژه ماتریس A_1 هستند.

$$\begin{aligned}
A_1\Delta v &= (A - v_1 a_1)(v_1 - v_2)\\
&= Av_1 - Av_2 - v_1(a_1 v_1 - a_1 v_2)\\
&= l_1 v_1 - l_2 v_2 - v_1(l_1(1) - l_2(1))\\
&= l_2(v_1 - v_2)\\
&= l_2\Delta v
\end{aligned}$$

با توجه به تعریف A_1 می دانیم که سطر اول A_1 همه صفرهستندو با توجه به رابطه فوق نتیجه می گیریم که به علت صفر بودن اولین مولفه Δv ستون اول A_1 همه از مرحله عملیات خارج می شوند. لذا نتیجه می گیریم که اگر ماتریس A_1 را درنظر بگیریم و از اولین سطر و ستون آن صرفنظر کنیم یک ماتریس با بعد $n-1$ را خواهیم داشت که بزرگترین مقادیر ویژه آن l_2 است. .حال روند فوق را روی ماتریس حاصله تکرار می کنیم.

مثال:

بزرگترین مقدار ویژه ماتریس زیر را با روش توانی به دست آورید. ($e = 10^{-2}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

ابتدا برداری دلخواه اما ناصفر انتخاب می کنیم.

$$V^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V^{(1)} = AV^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$V^{(1)}{}_{normal} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V^{(2)} = AV^{(1)}{}_{normal} = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{11}{3} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

$$V^{(2)}{}_{normal} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{11}{14} \\ \frac{11}{14} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

تعداد مراحل	0	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$V^{(k)}$ نرمال شده	1 0 0	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ 1	1 $\frac{11}{14}$ $\frac{11}{14}$	$\frac{69}{75}$ $\frac{72}{75}$ 1	945 954	.993120 .99653	1 0.998271 0.998281	0.999424 0.999209 1	0.999195 0.999832 1	1 1 1
$V^{(k)}$ نرمال نشده		1 2 3	$\frac{14}{3}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{11}{3}$	$\frac{69}{14}$ $\frac{72}{14}$ $\frac{75}{14}$	$\frac{438}{75}$ $\frac{429}{75}$ $\frac{429}{75}$	5.89750 5.91780 5.93835	5.98618 5.97583 5.975890	5.991385 5.990094 5.994833	5.992658 5.996476 5.997481	
بزرگترین l در هر مرحله تکرار		3	$4.\bar{6}$	5.357142	840	5.93835	5.98618	5.994833	5.997481	

$$A_1 = A - V_1 a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left| A_1^* - l I \right| = \begin{vmatrix} 1-l & -2 \\ -1 & -1-l \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow l_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

تمرین:بزرگترین مقادیر ویژه ماتریس زیر را تا دو مرحله توسط روش توانی تعیین کنید.ضمنا بردار دلخواه اولیه $X^{(0)}=[1\quad 1\quad 1\quad 1]^T$ می باشد.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}$$

تمرین:فرض کنیم $A_n=\begin{bmatrix}a&0&0&\cdots&a_n\\0&a&0&\cdots&a_{n-1}\\&&&&a_{n-2}\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&a_2\\a_n&a_{n-1}&\cdots&&a_1\end{bmatrix}$، $P_n(l)=\det(A_n-lI)$ ثابت کنید:

۱- $P_n(l)=(a-l)P_{n-1}(l)-a_n{}^2(a-l)^{n-2}$

۲- $P_1(l)=a_1-l$

۳- $l_i=a_1\quad i=1(1)n-2,\ l=\frac{1}{2}[(a+a_1)\pm\sqrt{(a_1-a)^2+4(a_n{}^2\cdots a_2{}^2)}]$

روشهای تبدیلی برای تعیین مقادیر ویژه

روش ژاکوبی:

این روش در مورد ماتریسهای متقارن به کار می رود.فرض می کنیم $|a_{ik}|$ درایه ای است که روی قطر اصلی نیست و از لحاظ کمی بیشترین مقدار را دارد.درایه های a_{kk} و a_{ki} و a_{ik} و a_{ii} را درنظر می گیریم و زیر ماتریس A_1 از A را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$\begin{bmatrix}a_{ii}&a_{ik}\\a_{ki}&a_{kk}\end{bmatrix}$$

$$S^*=\begin{bmatrix}\cos q&-\sin q\\\sin q&\cos q\end{bmatrix}$$

از حاصل ضرب $S^{*^{-1}} A_1 S^{*}$ جملات بالا و پایین قطر را متحد صفر قرار می دهیم و رابطه زیر را می یابیم:

$$(a_{kk} - a_{ii})\sin q \cos q + a_{ik}(\cos^2 q - \sin^2 q) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a_{kk} - a_{ii})\sin 2q + a_{ik}\cos 2q = 0 \quad \Rightarrow \tan 2q = \frac{2a_{ik}}{a_{ii} - a_{kk}}$$

$$q = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a_{ik}}{a_{ii} - a_{kk}}\right) \qquad if \quad a_{ii} \neq a_{kk}$$

$$q = \frac{p}{4} \qquad if \quad a_{ii} = a_{kk}, a_{ik} > 0$$

$$q = -\frac{p}{4} \qquad if \quad a_{ii} = a_{kk}, a_{ik} < 0$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos q & \cdots & -\sin q & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & \sin q & \cdots & \cos q & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = S_1^{-1} A S_1$$

$$B_2 = S_2^{-1} S_1^{-1} A S_1 S_2$$

$$\vdots$$

$$B_k = S_k^{-1} \cdots S_2^{-1} S_1^{-1} A S_1 S_2 \cdots S_k = (S_1 S_2 \cdots S_k)^{-1} A (S_1 S_2 \cdots S_k)$$

$$B_k = S^{-1} A S$$

ضمنا تعداد حداکثر مراحل $k = \dfrac{n^2 - n}{2}$ می باشد.

مثال:

مقادیر ویژه ماتریس زیر با روش ژاکوبی تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q = \frac{p}{4} \quad \Rightarrow S_1 = \begin{bmatrix} \cos q & 0 & -\sin q \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q & 0 & \cos q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = S_1^{-1} A S_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = S_2^{-1} B_1 S_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

که مقادیر ویژه عبارتد از:۵و ۱و ۱-.

$$S = S_1 S_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

لازم به ذکر است که ستونهای S بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه l_i می باشند.

روش LR

از جمله روشهای تبدیلی برای تعیین مقادیر ویژه می توان به روش LR اشاره نمود.

این روش درمورد ماتریسهای نامتقارن هم کاربرد دارد .اساس کار این روش تبدیل ماتریس A به حاصل ضرب دو ماتریس بالا و پایین مثلثی است که سرانجام ماتریس پایین مثلثی در دنباله تکراری به ماتریس واحد همگرا است و ماتریس بالا مثلثی به یک ماتریس بالا مثلثی همگرا است به طوری که تمام مقادیر ویژه ماتریس A روی قطر اصلی ماتریس بالا مثلثی قرار دارد.لذا تعریف می کنیم:

$$A = A_1$$

$$A_1 = L_1 R_1 \quad , l_{ii} = 1 \quad , i = 1(1)n$$

$$A_2 = R_1 L_1 = L_2 R_2$$

$$A_3 = R_2 L_2 = L_3 R_3$$

$$\vdots$$

$$A_k = R_{k-1} L_{k-1} = L_k R_k$$

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} L_k \lim_{k\to\infty} R_k = IR = R$$

در این روش ماتریس به ماتریسی تبدیل می شود که مقادیر ویژه آن برابر با مقادیر ویژه ماتریس A است.چون که:

$$A_1 R_1^{-1} = L_1$$

$$A_2 = R_1 L_1 = R_1 A_1 R_1^{-1}$$

$$\det(A_2) = \det(A_1)$$

$$A_2 R_2^{-1} = L_2$$

$$A_3 = R_2 L_2 = R_2 R_1 A_1 R_1^{-1} R_2^{-1}$$

$$\det(A_3) = \det(A_1)$$

$$\vdots$$

$$\det(A_k) = \det(A_1)$$

وقتی k افزایش می یابد A_k به سمت یک ماتریس بالا مثلثی بایک معیار دقت تبدیل می شود که همه مقادیر ویژه A روی قطر اصلی A_k قرار دارد.یعنی:

$$A_k \xrightarrow{k\to\infty} R$$

وقتی سیستم بزرگ باشد تعداد عملیات محاسباتی زیاد شده و خطای $Round-off$ قابل کنترل نیست که این مورد از معایب این روش شمرده می شود.

مثال:

مقادیر ویژه ماتریس زیر را توسط روش LR تا ۶ مرحله تکرار تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A_1=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{21} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12}\\ 0 & r_{22}\end{bmatrix}-=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}}_{L_1}\underbrace{\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & \frac{5}{4}\end{bmatrix}}_{R_1}$$

$r_{11}=4 \qquad l_{21}r_{11}=1\Rightarrow l_{21}=1/4$

$r_{12}=3 \qquad l_{21}r_{12}+r_{22}=2\Rightarrow r_{22}=5/4$

$$A_2=R_1L_1=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & \frac{5}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{19}{4} & 3\\ \frac{5}{16} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{21} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12}\\ 0 & r_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{5}{76} & 1\end{bmatrix}}_{L_2}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{19}{4} & 3\\ 0 & \frac{20}{19}\end{bmatrix}}_{R_2}$$

$r_{11}=\frac{19}{4}$

$r_{12}=3$

$l_{21}r_{11}=\frac{5}{16}\Rightarrow l_{21}=\frac{5}{76}$

$l_{21}r_{12}+r_{22}=\frac{5}{4}\Rightarrow r_{22}=\frac{20}{19}$

$$A_3 = R_2 L_2 = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} & 3 \\ 0 & \frac{20}{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{76} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{376}{76} & 3 \\ \frac{25}{361} & \frac{20}{19} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{L_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{25}{1786} & 1 \end{bmatrix}} \underset{R_3}{\begin{bmatrix} \frac{94}{19} & 3 \\ 0 & \frac{1805}{1786} \end{bmatrix}}$$

$$A_4 = R_3 L_3 = \begin{bmatrix} \frac{469}{44} & 3 \\ \frac{125}{8836} & \frac{95}{94} \end{bmatrix} = \underset{L_4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{125}{44086} & 1 \end{bmatrix}} \underset{R_4}{\begin{bmatrix} \frac{496}{94} & 3 \\ 0 & \frac{470}{496} \end{bmatrix}}$$

$$A_5 = R_4 L_4 = \begin{bmatrix} 4.99786 & 3 \\ 0.00284 & \frac{470}{469} \end{bmatrix} = \underset{L_5}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.000568 & 1 \end{bmatrix}} \underset{R_5}{\begin{bmatrix} 4.99786 & 3 \\ 0 & 1.000426 \end{bmatrix}}$$

$$A_6 = R_5 L_5 = \begin{bmatrix} 4.99786 & 3 \\ 0 & 1.000426 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.000568 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.999564 & 3 \\ 0.000568 & 1.000426 \end{bmatrix}$$

$$if \quad e = 10^{-3} \quad \Rightarrow 0.000568 \to 0 \quad \equiv l_1 = 4.999564 \quad , l_2 = 1.000426$$

در صورتی که می دانیم مقادیر ویژه واقعی۵و ۱ هستند.

روش هاوس هلدر(تبدیل به ماتریس سه قطری):

فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد .با استفاده از تبدیلات ماتریسی متقارن و متعامد می توان A را به ماتریس سه قطری تبدیل کرد بدون این که مقادیر ویژه A تغییر کند.

$$P = I - 2W_{n\times1}W^T_{1\times n} \quad , W^T_{1\times n}W_{n\times1} = 1 \quad , W \in \Re^n$$

$$P^T = (I - 2W_{n\times1}W^T_{1\times n})^T = I - 2(WW^T)^T = I - WW^T = P$$

یعنی P متقارن است.

$$P^T P = (I-2WW^T)(I-2WW^T) = I-2WW^T-2WW^T+4W(W^TW)W^T$$
$$= I-4WW^T+4WW^T = I$$

یعنی P متعامد است.

فرض کنیم که

$$P_r = I-2W_rW_r^T \qquad W_r \in \Re^n \quad W_r^TW_r = 1 \quad 2 \le r \le n-1$$
$$W_r = [\underbrace{0,0,\ldots,0}_{r-1}, x_r, \ldots, x_n]$$

$$r=2 \Rightarrow P_2 = i-2W_2W_2^T$$

$$A = A_1 \ , A_2 = P_2A_1P_2 \quad \Rightarrow A_2(1,i) = A_2(i,1) \qquad 3 \le i \le n$$

$$A_3 = P_3A_2P_3 \quad \Rightarrow A_3(2,i) = A_3(i,2) \qquad 4 \le i \le n$$

$$\vdots$$
$$A_k = P_kP_{k-1}\cdots P_2A_1P_2P_3\cdots P_k$$

با افزایش k ، A_k یک ماتریس سه قطری خواهد شد.

فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$r=2 \Rightarrow W_2^T = [0, x_2, x_3, x_4] \qquad W_2^TW_2 = x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = I-2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & x_4^2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2x_2^2 & -2x_2x_3 & -2x_2x_4 \\ 0 & -2x_2x_3 & 1-2x_3^2 & -2x_3x_4 \\ 0 & -2x_4x_2 & -2x_4x_3 & 1-2x_4^2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = P_2 A_1 P_2$$

سطر اول $P_2(A_1P_2)$ برابر است با سطر اول A_1P_2 .

سطر اول حاصل ضرب برابر است با

$$[a_{11}, a_{12}(1-2x_2^2) - 2a_1^3 x_2 x_3 - 2a_{14} x_2 x_4, -2a_{12} x_2 x_3 + a_{13}(1-2x_3^2) - 2a_{14} x_3 x_4,$$
$$-2a_{12} x_2 x_4 - 2a_{13} x_3 x_4 + a_{14}(1-2x_4^2)]$$

$$[a_{11}, a_{12} - 2x_2(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4), a_{13} - 2x_3(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4),$$
$$a_{14} - 2x_4(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)]$$

اگر فرض کنیم که $q_1 = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$ لذا سطر اول حاصل ضرب به صورت زیر در می آ
ید:

$$[a_{11}, a_{12} - 2x_2 q_1, a_{13} - 2x_3 q_1, a_{14} - 2x_4 q_1]$$
$$a_{13} - 2x_3 q_1 = 0 \qquad (1)$$
$$a_{14} - 2x_4 q_1 = 0 \qquad (2)$$

بایستی حاصل جمع مجذورات سطرها قبل و بعد از تبدیل برابر باشد.یعنی:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 = a_{11}^2 + (a_{12} - 2x_2 q_1)^2$$

$$\Rightarrow a_{12} - 2x_2 q_1 = \pm\sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2}$$

$$a_{12} - 2x_2 q_1 = \pm S_1 \qquad (S_1 = \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2}) \qquad (3)$$

$$\begin{cases} a_{12} - 2x_2 q_1 = \pm S_1 & (3) \\ a_{13} - 2x_3 q_1 = 0 & (1) \quad \to a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 - 2q_1 = \pm S_1 x_2 \\ a_{14} - 2x_4 q_1 = 0 & (2) \quad \to q_1 = \pm S_1 x_2 \qquad (4) \end{cases}$$

حال کافی است رابطه (4) در رابطه (3) قرار داده شود:

$$a_{12} \pm 2x_2^2 S_1 = \pm S_1 \quad \to x_2^2 = (\frac{1}{2} \pm \frac{a_{12}}{2S_1}) \qquad (5)$$

حال رابطه (4) را در رابطه (1) قرار می دهیم

$$a_{13} - 2x_3(\pm S_1 x_2) = 0 \quad \to x_3 = \pm\frac{a_{13}}{2S_1 x_2} \qquad (6)$$

$$x_4 = \frac{a_{14}}{2S_1 x_2} \qquad (7)$$

نهایتا خواهیم داشت:

$$x_2^2 = (\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sgn}(a_{12})a_{12}}{2S_1})$$

$$x_3 = \frac{a_{13}\operatorname{sgn}(a_{12})}{2S_1 x_2}$$

$$x_4 = \frac{a_{14}\operatorname{sgn}(a_{12})}{2S_1 x_2}$$

مثال:

با استفاده از الگوریتم هاوس هلدر ماتریس زیر را سه قطری کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3$$

$$W_2^T = [0 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$x_2^2 = (\frac{1}{2} + \frac{a_{12}\operatorname{sgn}(a_{12})}{2S_1}) = (\frac{1}{2} + \frac{(-1)(-1)}{2\times 3}) = 2/3$$

$$x_3 = \frac{a_{13}\operatorname{sgn}(a_{12})}{2S_1 x_2} = \frac{(-2)(-1)}{2\times 3\times\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$x_4 = \frac{a_{14}\operatorname{sgn}(a_{12})}{2S_1 x_2} = \frac{2\times(-1)}{2\times 3\times\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

لذا

$$W_2^T = [0, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$$

بنابراین

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = P_2 A P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{16}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$W_3^T = [0 \quad 0 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$S_2 = \sqrt{a_{23}^2 + a_{24}^2} = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{5}/3$$

$$x_3^2 = (\frac{1}{2} + \frac{a_{23} * \operatorname{sgn}(a_{23})}{2S_2}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}) \quad \to x_3 = 0.9732$$

$$x_4 = \sqrt{1 - x_3^2} = 0.2293$$

$$w_3^T = [0 \quad 0 \quad 0.9732 \quad 0.2293]$$

تمرینهای فصل ۲

۱- نشان دهید:

$$\|A\|_2 = \|A\|_\infty = n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2n})^k A^k = \frac{1}{n} A$$

۲- نشان دهید ماتریس زیر دارای مقادیر ویژه حقیقی است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & & & & \\ 1 & 2 & 4 & & \text{O} & \\ & 1 & 2 & 4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 4 \\ & \text{O} & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۳- A^{-1} شعاع طیفی را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٤- ماتریسهای $A_{2\times2}$ و $B_{2\times2}$ مفروضند، $r(A) = 0$ و $r(B) = 1$. آیا $r(AB)$ کراندار است؟

٥- فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$. برای چه مقادیری از b_1 و b_2 وقتی $k \to \infty$ داریم $(AB)^k \to 0$.

٦- ماتریس A به وسیله ماتریس T به یک ماتریس قطری تبدیل می شود.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس را بیابید.

۷- نشان دهید که ماتریسهای زیر معین مثبت هستند.

$$A=\begin{bmatrix} 12 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 15 & 4 & -2 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 18 & 6 & 6 \\ 9 & 1 & 6 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

۸- با استفاده از قضیه گرشگورین کرانی برای مقادیر ویژه l ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ $(n \geq 3)$ بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} a & -1 & & & & \\ -1 & a & -1 & & \text{O} & \\ & -1 & a & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \text{O} & & & & -1 \\ & & & & -1 & a \end{bmatrix}$$

۹- نشان دهید که مولفه های x_i بردار ویژه X در یک معادله تفاضلی صدق می نمایند، آنگاه همه بردارهای ویژه و مقادیر ویژه را بیابید.

۱۰- سیستم $AX = Y$ مفروض است به طوری که:

$$A=\begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

جواب این سیستم را با رابطه تکراری زیر به دست می آوریم.

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + a\,(AX^{(k)} - Y)$$

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چگونه پارامتر a را بیابیم تا روند تکراری فوق دارای همگرایی بهینه باشد؟

$$W_3^T = [0 \quad 0 \quad 0.9732 \quad 0.2293]$$

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با شرایط اولیه
(مسائل مقادیر اولیه)

$I.V.P\,(initial \quad value \quad problem)$

مسئله مقدار اولیه زیر را درنظرمی گیریم:

$$y' = f(x, y) \qquad a \le x \le b \qquad , \quad y(a) = a \qquad (1)$$

مسئله فوق دارای جوب منحصر به فرد است اگرتابع f در شرایط زیر صد ق نماید:

۱- $f(x, y)$ حقیقی باشد

۲- تابع f در ناحیه مستطیلی $D = \{(x, y) |\ a \prec x \prec b\,, -\infty \prec y \prec \infty\}$ پیوسته باشد و

۳- تابع $f(x, y)$ به ازای جمیع مقادیر x متعلق به بازه $[a, b]$ و برای هر y_1 و y_2 که متعلق به ناحیه D باشد در شرط لیپ شیتزصدق کندیعنی:

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \prec L | y_1 - y_2 |$$

که در آن L ثابت لیپ شیتز نامیده می شود،آن گاه مسئله مقدار اولیه (۱) دارای جواب منحصر به فرد $y(x)$ است که در شرط اولیه صدق می کند.

دراین فصل فرض ما بر این است که مسئله مقدار اولیه(۱) دارای جواب منحصر به فرد است .برای توضیح و بیان روشهای تفاضلی برای حل عددی این مسئله ابتدا بازه $[a, b]$ را به n زیربازه با گام مساوی h افراز می کنیم :

$$h = \frac{b - a}{n}$$
$$x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b$$
$$x_j = x_0 + jh \qquad\qquad j = 0(1)n$$

$$y'(x_j) = f(x_j, y(x_j)) \qquad j = 0(1)n \qquad (2)$$

روشهای تفاضلی برای حل مسئله مقدار اولیه فوق را به دو دسته کلی زیر می توان تقسیم نمود:

۱- روشهای تک گامی

۲- روشهای چندگامی

این روشها خود به دو بخش صریح و ضمنی تفکیک می شوند.

روشهایی که در آن طرف راست یعنی y_{j+1} صراحتا و بدون واسطه در هر مرحله توسط y_j تعریف شده در مرحله قبل محاسبه شوند را روشهای صریح و درغیر این صورت روشهای ضمنی خوانده می شوند.

فرم کلی روشهای تک گامی صریح به فرم زیر می باشد:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j, h)$$

که در آن f تابع تصحیح نامیده می شود و تابعی از گام h و f می باشد.

فرم کلی روشهای تک گامی ضمنی به فرم زیر می باشد:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_{j+1}, h)$$

خطای برشی (قطع کردن) یک روش تک گامی:

خطای برشی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T_j = y(x_{j+1}) - y(x_j) - hf(x_j, y(x_j), h)$$

دقت یک روش تک گامی:

یک روش تک گامی دارای مرتبه p است هرگاه به ازای عدد حقیقی و مثبت p ، رابطه زیر برقرار باشد.

$$\left|h^{-1}T_j\right| \le O(h^p)$$

روش تفاضلی اویلر:

برای حل عددی مسئله مقدار اولیه رابطه (۱) که در آن بازه $[a,b]$ را به n زیر بـازه بـا گـام مـساوی h نظیر فوق افراز نموده ایم و معادله دیفرانسیل را در نقاط گره ای در نظر می گیریم:

$$y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$$

حال در صدد تقریب مشتق مرتبه اول با یک فرمول مشتق گیری دارای دقت مرتبه اول می باشیم.

$$y'(x_j) = \frac{\Delta y(x_j)}{h} + T_j = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} + T_j = f(x_j, y(x_j)) \qquad j = 0(1)n-1$$

چنان چه در رابطه فوق از خطای T_j صرف نظر کنیم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \qquad j = 0(1)n-1 \qquad (3)$$

رابطه فوق فرمول روش اویلر است که یک روش تک گامی صریح می باشد.خطای برشـی ایـن روش عبارت است از:

$$T_j = y(x_{j+1}) - y(x_j) - hf(x_j, y(x_j))$$

چنان چه در رابطه فوق از رابطه (۲) استفاده کنیم و با استفاده از بسط سری تیلور حول x_j داریم:

$$T_j = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \cdots - hy'(x_j) - y(x_j)$$

$$T_j = \frac{h^2}{2!} y''(e) = O(h^2)$$

با توجه به تعریف مرتبه دقت داریم:

$$\left| h^{-1} T_j \right| = \frac{h}{2} y''(e) = O(h)$$

بنابراین روش اویلر دارای دقت مرتبه اول می باشد.

آنالیز خطا و همگرایی روش :

قبل ازپرداختن به آنالیز خطا لازم است اشاره ای به معادله آزمون یا *Test Equation* بنماییم.

رفتار جواب مسئله مقدار اولیه (۱) در همسایگی نقطه ای نظیر $(\bar{x},\bar{y})$ را می توان با در نظر گرفتن فرم خطی مسئله (۱) پیش بینی نمود.لذا تابع غیر خطی $f(x,y)$ را می توان با استفاده از بسط سری تیلور حول $(\bar{x},\bar{y})$ و قطعذ آن بعد از جملات اول خطی نمود.نهایتا فرم خطی معادله دیفرانسیل فوق عبارت است از:

$$y' = l\,y + c$$

در صورتی که

$$l = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(\bar{x},\bar{y})}$$

$$c = f(\bar{x},\bar{y}) - \bar{y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(\bar{x},\bar{y})} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(\bar{x},\bar{y})}(x-\bar{x})$$

حال با انتخاب $w = y + \dfrac{c}{l}$ معادله به صورت زیر ساده می شود:

$$w' = l\,w$$

جواب $w(x)$ معادله فوق درصورتی که l مطلقا موهومی باشد متناوب خواهد بود.

شکل زیر رفتار جواب را نشان می دهد.

حال به آنالیز خطای اویلر می پردازیم.با استفاده از تعریف خطای برشی داریم:

$$y(x_{j+1}) = T_j + y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) \quad (1)$$

در روند محاسبات دقیق و حساب دقیق با استفاده از روش اویلر y_j را می یابیم اما در عمل

درمحاسبات به علت تاثیر خطای روند کردن عملا y_j به دست نمی آید لذا ما تقریب $\bar{y}_j$ را می یابیم

.بنابراین می توانیم تعریف کنیم که:

$$\bar{y}_{j+1} = \bar{y}_j + hf(x_j, \bar{y}_j) - R_j \quad , j = 0(1)n-1 \qquad (2)$$

حال اگر رابطه (۲) را از (۱) کم کنیم

$$y(x_{j+1}) - \bar{y}_{j+1} = y(x_j) - \bar{y}_j + h[f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, \bar{y}_j)] + (T_j + R_j)$$

و از معادله آزمون استفاده نماییم داریم:

$$y(x_{j+1}) - \bar{y}_{j+1} = y(x_j) - \bar{y}_j + hl[y(x_j) - \bar{y}_j] + (T_j + R_j)$$

با فرض $e_j = y(x_j) - \bar{y}_j$ و قرار دادن آن در رابطه فوق معادله خطا را به صورت زیر می یابیم:

$$e_{j+1} = e_j + hl\, e_j + (T_j + R_j) \qquad j = 0(1)n-1$$
$$e_{j+1} = (1 + lh)e_j + (T_j + R_j)$$

حال اگر $A = 1 + lh$ و $T_j + R_j = B$ فرض کنیم داریم:

$$e_{j+1} = Ae_j + B \qquad j = 0(1)n-1$$
$$j = 0 \Rightarrow e_1 = Ae_0 + B$$
$$j = 1 \Rightarrow e_2 = Ae_1 + B = A(Ae_0 + B) + B = A^2 e_0 + (A+1)B$$
$$e_3 = A^3 e_0 + A^2 B + AB + B$$

$$\vdots$$
$$e_j = A^j e_0 + (1 + A + A^2 + \cdots + A^{j-1})B$$
$$|e_j| = \left| A^j e_0 + \frac{A^j - 1}{A-1} B \right| \le A^j |e_0| + \frac{A^j - 1}{A-1}|B| = A^j |e_0| + \frac{1}{hl}|B|(A^j - 1)$$
$$e^{lh} \ge 1 + lh = A$$

$$e_{j+1} = e_j + hl\, e_j + (T_j + R_j) \qquad j = 0(1)n-1$$
$$e_{j+1} = (1 + l\,h)e_j + (T_j + R_j)$$

$$e^{hl} \geq 1 + hl = A \;\Rightarrow\; e^{hjl} \geq A^j \qquad ; jh = x_j - x_0 \leq x_n - x_0$$
$$A^j \leq e^{l\,(x_j - x_0)} \leq e^{(x_n - x\ )}$$
$$\therefore \quad \left|e_j\right| \leq e^{l\,(x_n - x_0)}\left|e_0\right| + \frac{e^{l\,(x_n - x_0)} - 1}{hl}\left|B\right|$$
$$if \quad \left|e_0\right| = 0 \quad \left|e_j\right| \leq \frac{e^{l\,(x_n - x_0)} - 1}{l}\left(\frac{T_j + R_j}{h}\right) \quad ; T = \max\left|T_j\right| \quad , R = \max\left|R_j\right|$$
$$\left|e_j\right| \leq \frac{e^{l\,(x_n - x_0)} - 1}{l}\left(\frac{T}{h} + \frac{R}{h}\right) \qquad j = 0(1)n-1$$

T/h درجه اول (خطی) است .پس وقتی $h \to 0$ این عبارت به سمت صفر می رود.ولی در مورد R/h وقتی $h \to 0$ خطا به بی نهایت میل می کند.به این خاطر باید بین این دو خطا تعادل برقرار شود که خطای *Round* مهار گردد.بهترین راه انتخاب گام مناسب است.

پایداری روش:

روشی پایدار است که در غیاب خطای *Round* وقتی $h \to 0$ خطای مرحله پایانی به سمت صفر میل کند.

روش های رانگ – کوتا:

روشهای تیلور که قبلا بحث شد دارای ویژگی مناسبی هستند که همانا خطای برشـی یـا موضـعی مرتبـه بالای آنهاست. ولی نیاز به محاسبه مشتقات $f(x, y)$ دربسیاری از مسائل می تواند پیچیده و مـلال آور باشد بنابراین از روش تیلور به ندرت استفاده می شود.ما ابتدا اصـول اساسـی روشـهای رانـگ- کوتـا را بیان می کنیم.با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\begin{aligned} y(x_{j+1}) &= y(x_j) + h y'(x_j + q h) \\ &= y(x_j) + hf(x_j + q h), y(x_j + q h)) \quad ,0 < q < 1 \end{aligned}$$

به ازای $q = \frac{1}{2}$ داریم:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hf(x_j + \frac{h}{2}, y(x_j + \frac{h}{2}))$$

روش اویلر با نصف گام $h/2$ داریم:

$$y(x_j + \frac{h}{2}) \approx y_j + \frac{h}{2} f_j$$

بنابراین تقریب زیر را داریم:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f_j)$$

رابطه فوق را می توان به صوت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf_j \\ k_2 &= hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{1}{2} k_1) \\ y_{j+1} &= y_j + k_2 \end{aligned}$$

این روش را روش اویلر با نصف گام می نامند.

حال با استفاده از روش اویلر می توان روند زیر را بررسی کرد

$$y'(x_j+\frac{h}{2})\approx\frac{1}{2}[y'(x_j)+y'(x_{j+1})]$$
$$\approx\frac{1}{2}[f(x_j,y_j)+f(x_{j+1},y_{j+1})]$$

بنابراین تقریب ذیل را خواهیم داشت:

$$y_{j+1}=y_j+\frac{h}{2}[f(x_j,y_j)+f(x_{j+1},y_j+hf(x_j,y_j))]$$

این روش را می توان به فرم زیر نیز نوشت:

$$k_1=hf(x_j,y_j)$$
$$k_2=hf(x_j+h,y_j+k_1)$$
$$y_{j+1}=y_j+\frac{1}{2}(k_1+k_2)\qquad ,j=0(1)n-1$$

این روش را روش کوشی-اویلر می نامند.

دو روش قبل را می توان به صورت زیر تعبیر نمود:

$y_{j+1}=y_j+h$ (متوسط ضریب زاویه)

این اساس روشهای رانگ –کوتا می باشد.عموما در روشهای رانگ –کوتا ما ضریب زاویه را در نقطه x_j و سایر نقاط دیگر می یابیم و متوسط این ضریب زاویه هارا در گام h ضرب می نماییم و به جواب y_j اضافه می کنیم.بنابراین روشهای رانگ- کوتا را می توان به صورت کلی زیر تعریف کرد:

روش رانگ – کوتای ٧ ضریب زاویه ای:

روش رانگ –کوتای با ٧ ضریب زاویه را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_j, y_j) \\ k_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1) \\ k_3 = hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ \vdots \\ k_v = hf(x_j + c_v h, y_j + a_{v1} k_1 + a_{v2} k_2 + \cdots + a_{v,v-1} k_{v-1}) \\ y_{j+1} = y_j + \sum_{i=1}^{v} w_i k_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{v} w_i = 1 \end{cases}$$

در فرمول فوق تابع تصحیح عبارت است از ترکیب خطی ضریب زاویه ها درنقطه x_j و تعداد دیگر نقاط که در بین x_j و x_{j+1} قرار دارند.با دانستن طرف راست می توان y_{j+1} را به آسانی محاسبه نمود.بنابراین رو ش رانگ –کوتا یک روش صریح v ضریب زاویه ای است.برای تعیین c ها ، a ها و w ها در رابطه فوق ما y_{j+1} را به صورت سری توانی h بسط می دهیم به طوری که با بسط سری تیلور جواب معادله دیفرانسیل تا تعداد معینی از جملات منطبق باشد.برای آسانی کار در ذیل نحوه به دست آوردن c ها ، a ها و w ها را برای روش مرتبه دوم با جزئیات بحث و بررسی می کنیم.

روش رانگ کوتای مرتبه دوم

روش رانگ –کوتای دو ضریب زاویه ای را مدنظر قرار می دهیم:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_j, y_j) \\ k_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1) \\ y_{j+1} = y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 \end{cases}$$

پارامترهای c_2 ، a_{21} ، w_1 و w_2 را به طریقی می یابیم تا y_{j+1} به $y(x_{j+1})$ نزدیکتر گردد.بنابراین بسط سری تیلور جواب معادله دیفرانسیل $y(x_{j+1})$ را به صورت زیر داریم:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \cdots (*)$$

$$y'(x_j) = f(x, y) \Rightarrow y'(x_j) = f(x_j, y_j)$$

$$y''(x_j) = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = f_x + f_y y' = f_x + f_y f \Rightarrow y''(x_j) = (f_x + ff_y)_{x_j}$$

$$y'''(x_j) = (f_{xx} + ff_{xy} + (f_x + ff_y) f_y + f(f_{yx} + ff_{yy}))_{x_j}$$

$$= (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + (f_x + ff_y) f_y)_{x_j}$$

$$\xrightarrow{in\ (*)} y(x_{j+1}) = y(x_j) + hf + \frac{h^2}{2!}(f_x + ff_y)_{x_j} + \frac{h^3}{3!}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} +$$

$$(f_x + ff_y) f_y)_{x_j} + \cdots (**)$$

حال با بسط f حول (x_j, y_j) مقدار k_2 را حساب می کنیم:

$$k_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} hf)$$

$$= h[f(x_j, y_j) + (c_2 hf_x + a_{21} hff_y) + \frac{1}{2!}(c_2{}^2 h^2 f_{xx} + 2c_2 h^2 a_{21} ff_{xy} + (a_{21} hf)^2 f_{yy}) + \cdots]$$

با جایگزینی k_1 و k_2 در رابطه فوق داریم:

$$y_{j+1} = y_j + w_1 hf + w_2 hf + h^2(w_2 c_2 f_x + w_2 a_{21} ff_y) + \frac{h^3}{2!}(w_2 c_2{}^2 f_{xx} +$$

$$2 w_2 c_2 a_{21} ff_{xy} + a_{21}{}^2 f^2 f_{yy} w_2) + \cdots (***)$$

حال با متحد قرار دادن (**) و (***) داریم:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 c_2 = \dfrac{1}{2} \\ w_2 a_{21} = \dfrac{1}{2} \\ c_2 = a_{21} \end{cases}$$

جواب دستگاه فوق عبارت است از $a_{21}=c_2$ ، $w_2=\frac{1}{2c_2}$ و $w_1=1-\frac{1}{2c_2}$ بـه طـوری کـه $c_2\neq 0$ پارامتر آزاد می باشد.چنان چه جواب را در رابطه بالا قرار دهیم داریم:

$$y_{j+1}=y_j+hf_j+\frac{h^2}{2}(f_x+ff_y)_{x_j}+\frac{h^3c_2}{4}(f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy})_{x_j}+\cdots$$

خطای برشی عبارت است از:

$$\begin{aligned}T_j &= y(x_{j+1})-y_{j+1}\\ &= h^3[\frac{1}{3!}(f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy}+(f_x+ff_y)f_y-\frac{1}{2!}(w_2{c_2}^2f_{xx}+2c_2a_{21}w_2ff_{xy}+\\ &\quad {a_{21}}^2w_2f^2f_{yy}]+\cdots\\ &= h^3[(\frac{c_2}{4}-\frac{1}{6})(f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy})-\frac{1}{6}(f_x+ff_y)f_y]+\cdots\end{aligned}$$

این رابطه نشان می دهد که روش فوق دارای دقت مرتبه دوم است.پارامتر آزاد c_2 معمولا بین صفر ویک انتخاب می گردد.برخی اوقات c_2 را به طریقی انتخاب می کنیم که یکی از w ها صفر شوند.به عنوان مثال اگر $c_2=\frac{1}{2}$ انتخاب شود $w_1=0$ می گردد.

(a) اگر $c_2=\frac{1}{2}$ انتخاب شود داریم:

$$y_{j+1}=y_j+hf(x_j+\frac{h}{2},y_j+\frac{h}{2}f_j)\quad ,j=0(1)n-1$$

این رابطه همان روش نصف گام اویلر است.

(b) اگر $c_2=1$ را به عنوان پارامتر آزاد انتخاب کنیم داریم:

$$y_{j+1}=y_j+\frac{h}{2}[f(x_j,y_j)+f(x_j+h,y_j+hf_j)]\quad ,j=0(1)n-1$$

این روش همان روش کوشی —اویلر است که قبلا بحث شد.

(c) اگر $c_2=\frac{2}{3}$ انتخاب شود یعنی ضریب جملاتی از خطای قطع کردن را صفر بسازیم روشی را کـه به دست خواهیم آورد، روش رانگ —کوتای مرتبه دوم بهینه می باشد.

$$w_1 = \frac{1}{4} \quad , w_2 = \frac{3}{4}$$
$$k_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$k_2 = hf(x_j + \frac{2}{3}h, y_j + \frac{2}{3}k_1)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2) \qquad , j = 0(1)n-1$$

روشهای رانگ -کوتای مرتبه سوم:

$$\left\{\begin{array}{ll} k_1 = hf(x_j, y_j) & \\ k_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21}k_1) & \\ k_3 = hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31}k_1 + a_{32}k_2) & j = 0(1)n-1 \\ y_{j+1} = y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 & \end{array}\right\}$$

نظیر روش مرتبه دوم می توان a ها ، c ها و w ها را محاسبه کرد.چنان چه $c_2 = \frac{1}{2}$ به عنوان پارامتر آزاد انتخاب کنیم روشی که می یابیم رانگ –کوتای کلاسیک مرتبه سوم می باشد.

$$\left\{\begin{array}{ll} c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}, c_3 = 1, a_{31} = -1, a_{32} = 2, w_1 = w_3 = \frac{1}{6}, w_2 = \frac{4}{6} & \\ k_1 = hf(x_j, y_j) & \\ k_2 = hf(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}k_1) & \\ k_3 = hf(x_j + h, y_j - k_1 + 2k_2) \qquad j = 0(1)n-1 & \\ y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) & \end{array}\right\}$$

روش های رانگ -کوتای مرتبه چهارم:

$$\left\{\begin{array}{ll} k_1 = hf(x_j, y_j) & \\ k_2 = hf(x_j, c_2 h, y_j + a_{21}k_1) & \\ k_3 = hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31}k_1 + a_{32}k_2) & \\ k_4 = hf(x_j + c_4 h, y_j + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3) & j = 0(1)n-1 \\ y_{j+1} = y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4 & \end{array}\right\}$$

باز هم نظیر روند فوق عمل می کنیم و c ها ، a ها و w ها را می یابیم.ما در اینجا فقط ۱۲ رابطه را به دست آوردیم اما تعداد مجهولات ۱۳ می باشد، با انتخاب پارامتر آزاد برابر $\frac{1}{2}$ مجهولات را به صورت زیر می توان محاسبه کرد. لذا روش کلاسیک مرتبه چهارم رانگ – کوتا را خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&c_2 = a_{21} = c_3 = a_{32} = \frac{1}{2} \quad , a_{31} = 0 \\
&c_4 = 1 \quad a_{41} = a_{42} = 0 \quad a_{43} = 1 \\
&w_1 = w_4 = \frac{1}{6} \quad w_2 = w_3 = \frac{2}{6}
\end{aligned}
$$

روش رانگ – کوتای کلاسیک مرتبه چهارم:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
k_1 = hf(x_j, y_j) & \\
k_2 = hf(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}k_1) & \\
k_3 = hf(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}k_1) & \\
k_4 = hf(x_j + h, y_j + k_3) & j = 0(1)n-1 \\
y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) &
\end{array}
\right\}
$$

روشهای فوق صریح ، تک گامی و خودشروع کننده هستند.چون از $y(a) = a$ که در شرایط اولیه مسئله داده شده، می توان استفاده کرد و روشها را راه اندازی نمود.

همگرایی و آنالیز خطای روشهای رانگ کوتا:

دراین جا ما همگرایی روش مرتبه سوم یا سه ضریب زاویه ای رانگ – کوتا را اثبات می کنیم .بنابراین داریم:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
k_1 = hf(x_j, y_j) & \\
k_2 = hf(x_j + c_2h, y_j + a_{21}k_1) & \\
k_3 = hf(x_j + c_3h, y_j + a_{31}k_1 + a_{32}k_2) & j = 0(1)n-1 \\
y_{j+1} = y_j + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 \qquad (1) &
\end{array}
\right\}
$$

همچنین می دانیم که فرم کلی روش تک گامی به فرم زیر است:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j y_j, h) \qquad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که تابع تصحیح روش مرتبه سوم رانگ – کوتا عبارت است از:

$$f(x_j, y_j, h) = \frac{1}{h}[w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3] \qquad (3)$$

حال مسئله مقدار اولیه زیر را درنظر می گیریم .این مسئله دارای جواب منحصر به فرد است اگر f در شرط لیپ شیتز صدق کند:

$$y' = f(x, y)$$
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

از آنجا که $i = 1(1)3$ k_i توابعی از f هستند بایستی در شرط لیپشیتز صدق کنند.لذا به ازای y_j و y^*_j داریم:

$$k_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$|k_1 - k_1^*| = h|f(x_j, y_j) - f(x_j, y_j^*)| \le hL|y_j - y_j^*| \qquad (4)$$
$$\begin{aligned}|k_2 - k_2^*| &= h|f(x_j + c_2 h, y_j + a_{21}k_1) - f(x_j + c_2 h, y_j^* + a_{21}k_1^*)|\\ &\le hL|(y_j + a_{21}k_1) - (y_j^* + a_{21}k_1^*)| = hL|(y_j - y_j^*) + a_{21}(k_1 - k_1^*)|\\ &\le hL\{|y_j - y_j^*| + a_{21}|k_1 - k_1^*|\}\\ &\le hL\{|y_j - y_j^*| + a_{21}hL|y_j - y_j^*| = hL(1 + a_{21}hL)|y_j - y_j^*| \qquad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|k_3 - k_3^*| &= h|f(x_j + c_3 h, y_j + a_{31}k_1 + a_{32}k_2) - f(x_j + c_3 h, y_j^* + a_{31}k_1^* + a_{32}k_2^*)|\\ &\le hL|(y_j + a_{31}k_1 + a_{32}k_2) - (y_j^* + a_{31}k_1^* + a_{32}k_2^*)|\\ &= hL|(y_j - y_j^*) + a_{31}(k_1 - k_1^*) + a_{32}(k_2 - k_2^*)|\\ &\le hL\{|y_j - y_j^*| + a_{31}|k_1 - k_1^*| + a_{32}|k_2 - k_2^*|\}\\ &\le hL\{|y_j - y_j^*| + a_{31}hL|y_j - y_j^*| + a_{32}hL(1 + a_{21}hL)|y_j - y_j^*|\\ &= hL\{1 + a_{31}hL + a_{32}hL(1 + a_{21}hL)\}|y_j - y_j^*| \qquad (6)\end{aligned}$$

حال بایستی ثابت کنیم وقتی که $h \to 0$ تابع تصحیح رابطه (3) هم در شرط لیپشیتز صدق می کند.

$$\left|f(x_j, y_j, h) - f^*(x_j, y_j^*, h)\right| = \frac{1}{h}\left|(w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3) - (w_1 k_1^* + w_2 k_2^* + w_3 k_3^*)\right|$$
$$= \frac{1}{h}\left|w_1(k_1 - k_1^*) + w_2(k_2 - k_2^*) + w_3(k_3 - k_3^*)\right|$$

$$\le \frac{1}{h}\{w_1\left|k_1 - k_1^*\right| + w_2\left|k_2 - k_2^*\right| + w_3\left|k_3 - k_3^*\right|\}$$
$$= \frac{1}{h}\{w_1 hL\left|y_j - y_j^*\right| + w_2 hL(1 + a_{21}hL)\left|y_j - y_j^*\right| + w_3 hL(1 + a_{31}hL +$$
$$a_{32}hL(1 + a_{21}h))\left|y_j - y_j^*\right|\} \xrightarrow{(4),(5),(6)}$$
$$\therefore \quad \left|f - f^*\right| \le L\{w_1 + w_2(1 + a_{21}hL) + w_3(1 + a_{31}hL + a_{32}hL(1 + a_{21}hL))\}\left|y_j - y_j^*\right|$$
$$= L\{(w_1 + w_2 + w_3) + hL(w_2 a_{21} + w_3 a_{31}) + hLa_{32}w_3) + w_3 a_{32} a_{21} h^2 L^2\}\left|y_j - y_j^*\right|$$
$$if \quad h \to 0 \quad \Rightarrow \left|f - f^*\right| \le L\left|y_j - y_j^*\right|$$

لذا نتیجه می گیریم که جواب محاسبه شده به جواب واقعی همگراست .بر همین اساس می توان همگرایی روشهای رانگ کوتای مراتب بالاتر را هم بررسی کرد.

روشهای چندگامی:

یک روش چندگامی را دارای دقت مرتبه P نامیم هرگاه خطای موضعی (*truncate*) آن را با استفاده از سری تیلور حول x_j بسط دهیم:

$$T_j = C_0 y(x_j) + C_1 hy'(x_j) + C_2 h^2 y''(x_j) + \cdots + C_P h^P y^{(P)}(x_j) + C_{P+1} h^{P+1} y^{(P+1)}(x_j)$$
$$+ O(h^{P+2})$$

ضرایب $C_{P+1} \ne 0 \quad , \quad C_i = 0 \quad i = 0(1)P$ باشد.

سازگاری روشهای چندگامی:

یک روش چندگامی خطی را سازگار ($consistant$)می گوییم اگر دارای دقت مرتبه $P(>1)$ باشد یعنی حداقل $C_0 = C_1 = 0$ باشد.

روش k گامی:

فرم کلی روشهای k گامی به صورت زیر است:

$$y_{j+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i y_{j-i+1} + hf(x_{j+1}, x_j, \cdots, x_{j-k+1}, y'_{j+1}, \cdots, y'_{j-k+1}, h)$$

روش k گامی خطی:

فرم کلی روشهای k گامی خطی به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= \sum_{i=1}^{k} a_i y_{j-i+1} + h\sum_{i=0}^{k} b_i y'_{j-i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i y_{j-i+1} + h[b_0 y'_{j+1} + \sum_{i=1}^{k} b_i y'_{j-i+1}] \qquad (1) \end{aligned}$$

اگر در رابطه (1) ، $b_0 = 0$ باشد روش k گامی خطی را روش صریح یا روش پیشگو و یا باز ودرغیر اینصورت روش ضمنی یا اصلاحگر و یابسته خوانده می شود.

روش های k گامی صریح آدامز – بشفورت:

مسئله مقدار اولیه زیر را درنظر می گیریم:

$$y' = f(x, y) \quad , a \le x \le b, \quad y(a) = a \qquad (2)$$

ابتدا بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه با گام مساوی h افراز می کنیم لذا داریم:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_j = a + jh \quad , j = 0(1)n$$

حال اگر از معادله داده شده در فاصله $[x_j, x_{j+1}]$ نسبت به x انتگرال بگیریم داریم:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} y' dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx$$

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx \qquad (3)$$

در (۳) از تابع زیرعلامت انتگرال از آن جا که y مجهول می باشد نمی توان انتگرال گرفت لذا آن را توسط فرمول درون یاب پسرو نیوتن در نقاط گره ای قبل از x_j یعنی k نقطه $x_j, x_{j-1}, \cdots, x_{j-k+1}$ تقریب می زنیم.لذا داریم:

$$P_{k-1}(x)= f_j+\frac{x-x_j}{h}\nabla f_j+\frac{(x-x_j)(x-x_{j-1})}{2h^2}\nabla^2 f_j+\cdots+\frac{(x-x_j)\cdots(x-x_{j-k+2})}{(k-1)!\,h^{k-1}}\nabla^{k-1} f_j$$
$$+\frac{(x-x_j)\cdots(x-x_{j-k+1})}{k!} f^{(k)}(c)$$

حال با تغییر متغیر زیر می توان حدود انتگرال گیری را ساده نمود. بنابراین داریم:

$$\frac{x-x_j}{h}=u \quad \Rightarrow dx=hdu$$
$$x:[x_j,x_{j+1}] \quad \Rightarrow u:[0,1]$$

$$P_{k-1}(u)= f_j+u\nabla f_j+\frac{1}{2}u(u+1)\nabla^2 f_j+\cdots+\frac{u(u+1)\cdots(u+k-2)}{(k-1)!}\nabla^{k-1} f_j$$
$$+\frac{u(u+1)\cdots(u+k-1)}{k!}h^k f^{(k)}(c) \qquad (4)$$

حال رابطه (۴) را در رابطه (۳) قرار می دهیم داریم:

$$y(x_{j+1})=y(x_j)+h\int_0^1[f_j+u\nabla f_j+\frac{1}{2}u(u+1)\nabla^2 f_j+\cdots+\frac{u(u+1)\cdots(u+k-2)}{(k-1)!}\nabla^{k-1} f_j]du$$
$$+\int_0^1\frac{u(u+1)\cdots(u+k-1)}{k!}h^{k+1} f^{(k)}(c)du$$
$$y(x_{j+1})=y(x_j)+h\{ f_j+\frac{1}{2}\nabla f_j+\frac{5}{12}\nabla^2 f_j+\frac{3}{8}\nabla^3 f_j+\frac{251}{720}\nabla^4 f_j+\cdots\}+T_j$$

حال اگر از خطای قطع کردن صرف نظر کنیم رابطه زیر را داریم.از این رابطه می توان خانواده ای از روشهای آدامز- بشفورت را با انتخاب جملات متفاوت آن به دست آورد.

$$y_{j+1}=y_j+h\{ f_j+\frac{1}{2}\nabla f_j+\frac{5}{12}\nabla^2 f_j+\frac{3}{8}\nabla^3 f_j+\frac{251}{720}\nabla^4 f_j+\cdots\} \qquad (5)$$

که خطای آن عبارت است از:

$$T_j=\frac{h^{k+1}}{k!}\int_0^1 u(u+1)\cdots(u+k-1) f^{(k)}(c)du \qquad (6)$$

اگر در رابطه (۵) تا تفاضل مرتبه اول به عنوان تقریب استفاده کنیم یا به عبارت دیگر تابع f را با یک چندجمله ای درجه اول تقریب بزنیم روش آدامز- بشفورت دوگانی یا مرتبه دوم را خواهیم داشت:

روش آدامز بشفورت مرتبه دوم

$$y_{j+1} = y_j + h\{ f_j + \frac{1}{2}\nabla f_j)$$

$$y_{j+1} = y_j + h[f_j + \frac{1}{2}(f_j - f_{j-1})]$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[3 f_j - f_{j-1}] \qquad j = 1(1)n-1$$

حال با استفاده از رابطه (۶) و با انتخاب $k = 2$ داریم:

$$T_j = \frac{h^3}{2!}\int_0^1 f'''(c)u(u+1)\,du \qquad ;0 < c < 1$$

برای محاسبه این انتگرال باید به نکته زیر توجه کنیم.

نکته:

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند و بخواهیم انتگرال

$$\int_a^b g(x)\, f(x)\,dx$$

حساب کنیم که در آن $f(x)$ تابعی پیوسته باشد و $g(x)$ در فاصله انتگرالگیری تغییر علامت ندهد آنگاه مقدار این انتگرال عبارت است از:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(x)\int_a^b g(x)\,dx \qquad a < x < b$$

بنابراین خطای برشی روش آدامز –بشفورت مرتبه دوم عبارت است از:

$$T_j = \frac{h^3}{2!}\, f'''(x)\int_0^1 u(u+1)\,du \qquad ;0 < x < 1$$

$$= \frac{5}{12} h^3\, f'''(x)$$

$$\left|h^{-1} T_j\right| = O(h^2)$$

یعنی روش دارای دقت مرتبه دوم است.

روش آدامز بشفورت مرتبه سوم

$$y_{j+1} = y_j + h\{ f_j + \frac{1}{2}\nabla f_j + \frac{5}{12}\nabla^2 f_j)$$
$$y_{j+1} = y_j + h[f_j + \frac{1}{2}(f_j - f_{j-1}) + \frac{5}{12}(f_j - 2 f_{j-1} + f_{j-2})$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12}[23 f_j - 16 f_{j-1} + 5 f_{j-2}] \qquad j = 2(1)n-1$$
$$T_j = \frac{3}{8} h^4 f''''(c) \qquad 0 \prec c \prec 1$$
$$\left| h^{-1} T_j \right| = O(h^3)$$

روش آدامز بشفورت مرتبه چهارم

$$y_{j+1} = y_j + h[f_j + \frac{1}{2}\nabla f_j + \frac{5}{12}\nabla^2 f_j + \frac{3}{8}\nabla^3 f_j)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}[55 f_j - 59 f_{j-1} + 37 f_{j-2} - 9 f_{j-3}] \qquad j = 3(1)n-1$$
$$T_j = \frac{251}{720} h^5 f^{(4)}(c) \qquad c \in (0,1)$$
$$\left| h^{-1} T_j = O(h^4) \right|$$

مثال:

مساله زیر را با کلیه روشهای آدامز بشفورت با گام $h = 0.2$ حل کنید.همچنین جواب محاسبه شده در $x = 1$ را با جواب واقعی مقایسه کرده و قدر مطلق خطا را بیابید.

$$\begin{Bmatrix} y' = x + y \\ 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{Bmatrix}$$

حل)

ابتدا جواب واقعی را به دست می آوریم.از معادلات دیفرانسیل داریم که برای حل معادله خطی مرتبه اول باید $I.F$ یا عامل انتگرالساز را بیابیم.یعنی اگر

$$y' + f(x) y = g(x)$$

آنگاه

$$I.F = e^{\int f(x)\,dx}$$
$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left[\int g(x).e^{\int f(x)dx}\,dx + c\right]$$

پس داریم:

$$I.F = e^{-\int dx} = e^{-x}$$
$$y = e^{x}\left[\int xe^{-x}\,dx + c\right] = e^{x}\left[-xe^{-x} - e^{-x} + c\right]$$
$$y = -x - 1 + ce^{x}$$
$$\Rightarrow\ y = -x - 1 + 2e^{x} \quad \Rightarrow\ y(1) = 3.436564 \quad (*)$$
$$y(0) = -1 + c = 1 \quad \Rightarrow c = 2$$

ابتدا روش آدامز بشفورت مرتبه دوم:

ولی قبل از آن ما توسط $(*)$ y_1 را محاسبه کردیم، چون این روش خودشروع کننده نیستند.

$$y_1 = y(x_1 = 0.2) = 1.242806$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(3\,f_j - f_{j-1}) \quad i = 1(1)4$$
$$n = \frac{1-0}{0.2} = 5 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_0 = 0 & x_1 = 0.2 \\ x_2 = 0.4 & x_3 = 0.6 \\ x_4 = 0.8 & x_5 = 1 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{aligned}
j = 1 \quad y_2 &= 1.242806 + 0.1(3(0.2 + 1.242806) - (0 + 1)) \\
&= 1.575647 \\
j = 2 \quad y_3 &= 1.575647 + 0.1(3(0.4 + 1.575647) - (0.2 + 1.242806)) \\
&= 2.024061 \\
j = 3 \quad y_4 &= 2.024061 + 0.1(3(0.6 + 2.024061) - (0.4 + 1.575647)) \\
&= 2.613714 \\
j = 4 \quad y_5 &= 2.613714 + 0.1(3(0.8 + 2.613714) - (0.6 + 2.024061)) \\
&= 3.375422 \\
&= y(x_5 = 1) \quad (**)
\end{aligned}$$

مقدار (*) مقدار واقعی در $x=1$ و (**) مقدار محاسبه شده در $x=1$ است.پس قدر مطلق خطا در این نقطه عبارت است از:

$$e_5 = |y_5 - y(x_5 = 1)| = 0.061142$$

ضمنا $(e_0, e_1, \cdots, e_5)$ بردار خطاست.با نرم ماکزیمم گرفتن این بردار خطای حل مسئله حاصل می شود.

روش آدامز بشفورت مرتبه سوم:

ولی قبل از آن باید y_2 را از (*) محاسبه کنیم.

$$y_2 = y(x_2 = 0.4) = 1.583649$$

$$\begin{aligned}
&y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12}[23\, f_j - 16\, f_{j-1} + 5\, f_{j-2}] \qquad j = 2(1)4 \\
&j=2 \quad y_3 = 1.583649[23(0.4+1.583649) - 16(0.2+1.242806) + 5(0+1)] \\
&\qquad\quad\; = 2.042633 \\
&j=3 \quad y_4 = 2.646903 \\
&j=4 \quad y_5 = 3.428818 \\
&e_5 = |y_5 - y(x_5 = 1)| = 0.0077462
\end{aligned}$$

تمرین:

مسئله فوق را با روش آدامز بشفورت مرتبه چهارم حل کنید.

روش چندگامی ضمنی آدامز- مولتون

از معادله دیفرانسیل رابطه (۲) در بازه $[x_j, x_{j+1}]$ انتگرال می گیریم. لذا داریم:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} y' dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx$$

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx \qquad (1)$$

حال چنان چه تابع f را در $k+1$ نقطه قبل از x_{j+1} با استفاده از فرمول درون یاب پسرو نیوتن یعنی در نقاط $x_{j+1}, x_j, \cdots, x_{j-k+1}$ تقریب بزنیم چند جمله ای درون یاب درجه k ام را به صورت زیر داریم:

$$P_k(x) = f_{j+1} + \frac{x - x_{j+1}}{h} \nabla f_{j+1} + \frac{(x - x_{j+1})(x - x_j)}{2!\,h^2} \nabla^2 f_{j+1} + \cdots + \frac{(x - x_{j+1})(x - x_j)\cdots(x - x_{j-k+2})}{k!\,h^k}$$
$$\nabla^k f_{j+1} + \frac{(x - x_{j+1})(x - x_j)\cdots(x - x_{j-k+1})}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)$$

برای آسانی کار و جهت تغییر حدود انتگرال گیری از تغییر متغیر $u = \frac{x - x_j}{h}$ استفاده می کنیم لذا داریم:

$$\begin{aligned} &dx = h\,du \\ &u : [0,1] \\ &\frac{x - x_{j+1}}{h} = \frac{x - (x_j + h)}{h} = \frac{x - x_j - h}{h} = u - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad P_k(u) = \underbrace{\{ f_{j+1} + (u-1)\nabla f_{j+1} + \frac{u(u-1)}{2!}\nabla^2 f_{j+1} + \frac{(u-1)u(u+1)}{3!}\nabla^3 f_{j+1} + \cdots + \frac{(u-1)u(u+1)\cdots(u+k-2)}{k!}\nabla^k f_{j+1}}_{*}$$
$$+ h^{k+1} \frac{(u-1)u(u+1)\cdots(u+k-1)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)$$

حال این عبارت را در رابطه (1) قرار می دهیم:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_0^1 (*)\,dx + h^{k+2} \int_0^1 \frac{(u-1)u(u+1)\cdots(u+k-1)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)\,du$$

حال اگراز خطای برشی این رابطه صرف نظر کنیم و انتگرال بگیریم و محاسبه کنیم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + h[f_{j+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{j+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{j+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{j+1} - \frac{19}{720}\nabla^4 f_{j+1}$$
$$-\frac{27}{1440}\nabla^5 f_{j+1} - \cdots] \qquad (2)$$

که خطای برشی آن عبارت است از:

$$T_j = \frac{h^{k+2}}{(k+1)!}\int_0^1 (u-1)u(u+1)\cdots(u+k-1)\, f^{(k+1)}(m) \qquad m \in (0,1)$$

در رابطه(۲) با انتخاب جملات مراتب مختلف می توان روشهای مختلف آدامز- مولتون را به دست آورد. چنان چه تا تفاضل مرتبه اول را به عنوان تقریب در نظر بگیریم روش آدامز –مولتون مرتبه دوم و تک گامی را داریم:

۱-روش آدامز مولتون مرتبه دوم (تک گامی)

$$y_{j+1} = y_j + h[f_{j+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{j+1}]$$
$$y_{j+1} = y_j + h[f_{j+1} - \frac{1}{2}(f_{j+1} - f_j)] \qquad j = 0(1)n-1$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f_{j+1} + f_j]$$
$$T_{j+1} = \frac{h^3}{2!} f''(m)\int_0^1 (u-1)u\,du = -\frac{h^3}{12} f''(m)$$
$$\left|h^{-1}T_j\right| = O(h^2)$$

۲-روش آدامز مولتون مرتبه سوم (دوگامی)

چنان چه در رابطه (۲) تا تفاضل مرتبه دوم را به عنوان تقریب استفاده کنیم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + h[f_{j+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{j+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{j+1}]$$
$$y_{j+1} = y_j + h[f_{j+1} - \frac{1}{2}(f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{12}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})] \qquad j = 1(1)n-1$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12}[5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1}]$$
$$T_{j+1} = \frac{h^4}{3!} f'''(m)\int_0^1 (u-1)u(u+1)\,du = -\frac{h^4}{24} f'''(m)$$
$$\left|h^{-1}T_j\right| = O(h^3)$$

۳- روش آدامز مولتون مرتبه چهارم (سه گامی):

چنان چه در رابطه (۲) تا تفاضل مرتبه سوم را به عنوان تقریب استفاده نماییم داریم:

$$y_{j+1} = y_j + h[f_{j+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{j+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{j+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{j+1}]$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}[9 f_{j+1} + 19 f_j - 5 f_{j-1} + f_{j-2}] \qquad j = 2(1)n-1$$

$$T_{j+1} = \frac{h^5}{4!} f^{(4)}(m)\int_0^1 (u-1)u(u+1)(u+2)\,du = -\frac{19h^5}{720} f^{(4)}(m)$$

$$\left|h^{-1} T_j\right| = O(h^4)$$

روش های پیشگو اصلاحگر $PCM: (Predicted \quad Corrected \quad Method)$

$P:$

$$y_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} a_i y_{j-i+1}^{(0)} + h\sum_{i=1}^{k} b_i f_{j-i+1}^{(0)}$$

و به طور کلی :

$C:$

$$y_{j+1}^{(r+1)} = \sum_{i=1}^{k} a_i y_{j-i+1} + hb_0 f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(r)}) + h\sum_{i=1}^{k} b_i f_{j-i+1} \qquad r = 0,1,2,\cdots$$

ابتدا با استفاده از یک روش چندگامی صریح جواب معادله را پیشگویی می کنیم

$$P: y_{j+1}^{(0)}$$

سپس با استفاده از جواب مرحله پیشگویی جمله ضمنی کننده روش اصلاحگر را محاسبه می کنیم

$$E: f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(0)})$$

در مرحله آخربا استفاده از موارد فوق جواب مرحله تصحیح را می یابیم

$$C: y_{j+1}^{(1)}$$

این عمل را مجددا تکرار می کنیم فرض می کنیم n بار این عمل را تکرار کردیم در نتیجه داریم:

$$PECECEC\cdots EC \equiv P(EC)^n \qquad n=1,2,\cdots$$

یعنی یکبار پیشگویی می کنیم و n بار محاسبه و اصلاح می کنیم.

مثال:

مسئله زیر را با روشهای پیشگو اصلاحگرمرتبه سوم تا دو مرحله تکرار $(r=0,1)$ حل کنید.

$$y' = x + y$$
$$0 \le x \le 1$$
$$y(0)=1$$
$$h=0.2$$

حل)

$$n=\frac{1-0}{0.2}=5$$
$$\begin{Bmatrix} x_0=0 & x_1=0.2 \\ x_2=0.4 & x_3=0.6 \\ x_4=0.8 & x_5=1 \end{Bmatrix}$$

ابتدا با روش آدامز بشفورت مرتبه سوم پیشگویی می کنیم:

$P:$

$$y_{j+1}=y_j+\frac{h}{12}[23f_j-16f_{j-1}+5f_{j-2}]$$
$$y_{j+1}^{(0)}=y_j+\frac{1}{60}[23(x_j+y_j)-16(x_{j-1}+y_{j-1})+5(x_{j-2}+y_{j-2})] \quad j=2(1)4$$

حال با روش آدامز مولتون مرتبه سوم تصحیح می کنیم:

$C:$

$$y_{j+1}=y_j+\frac{h}{12}[5f_{j+1}+8f_j-f_{j-1}]$$
$$y_{j+1}^{(r+1)}=y_j+\frac{0.2}{12}[5(x_{j+1}+y_{j+1}^{(r)})+8(x_j+y_j)-(x_{j-1}+y_{j-1})]$$
$$y=-x-1+2e^x \quad \Rightarrow y_1=y(x_1=0.2)=1.242806$$
$$y_2=1.583649$$

$$for(\,j=2;\,j\le 4;\,j++)$$
$$for(r=0;r\le 1;r++)$$

$$y_3^{(0)} = y_2 + \frac{1}{60}[23(x_2+y_2)-16(x_1+y_1)+5(x_0+y_0)] = 2.042634$$
$$y_3^{(1)} = y_2 + \frac{0.2}{12}[5(x_3+y_3^{(0)})+8(x_2+y_2)-(x_1+y_1)] = 2.044309$$
$$y_3^{(2)} = y_2 + \frac{0.2}{12}[5(x_3+y_3^{(1)})+8(x_2+y_2)-(x_1+y_1)] = 2.044448$$

$$y_4^{(0)} = y_3^{(2)} + \frac{1}{60}[23(x_3+y_3^{(2)})-16(x_2+y_2)+5(x_1+y_1)] = 2.649430$$
$$y_4^{(1)} = y_3^{(2)} + \frac{0.2}{12}[5(x_4+y_4^{(0)})+8(x_3+y_3^{(2)}-(x_2+y_2)] = 2.651433$$
$$y_4^{(2)} = 2.651599$$

$$y_5^{(0)} = y_4^{(2)} + \frac{1}{60}[23(x_4+y_4^{(2)})-16(x_3+y_3^{(2)})+5(x_2+y_2)] = 3.434831$$
$$y_5^{(1)} = y_4^{(2)} + \frac{0.2}{12}[5(x_5+y_5^{(0)})+8(x_4+y_4^{(2)})-(x_3+y_3^{(2)})] = 3.437308$$
$$y_5^{(2)} = 3.437515$$

حل عددی مسائل مقدار مرزی

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر می گیریم :

$$y'' = f(x,y,y') \qquad a\le x\le b \qquad (1)$$

این معادله می تواند با شرایط مرزی نوع اول همراه باشد مانند:

$$y(a)=a \quad , \quad y(b)=b$$

یا با شرایط مرزی نوع دوم مانند:

$$y'(a)=a \quad , \quad y'(b)=b$$

و یا با شرایط مرزی نوع سوم مانند:

$$c_1 y'(a) + c_2 y(a) = d_1 \quad , \quad c_3 y'(b) + c_4 y(b) = d_2$$

مسئله مقدار مرزی (۱) دارای جواب منحصر به فرد است و قضیه زیر این موضوع را روشن می سازد.

قضیه:

معادله (1) دارای جواب منحصر به فرد $y(x)$ است ودریکی از شرایط مرزی داده شده صدق می کند اگر $f(x, y, y')$ در ناحیه $D:\{(x, y, y') \quad a \le x \le b, -\infty \prec y, y' \prec \infty\}$ پیوسته باشد همچنین دارای مشتقات نسبی اول $\frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y}$ پیوسته در ناحیه D باشد و $\forall (x, y, y') \in D: \frac{\partial f}{\partial y} \succ 0$

و $\forall (x, y, y') \in D: \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| \prec M$ باشد.

معادله (1) نسبت به y و y' می تواند خطی ویا غیر خطی باشد.

اگر معادله (1) خطی باشد آن گاه

$$y'' = p(x)\, y' + q(x)\, y + r(x) \qquad (2)$$

تعمیم قضیه در مورد معادله خطی

معادله (1) دارای جواب منحصر به فرد است اگر توابع $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشند و

$q(x) \succ 0$ و $|p(x)| \prec M$.

روش تفاضلی مرتبه دوم

حال مسئله مقدار مرزی با شرایط مرزی نوع اول را درنظر می گیریم:

$$\left\{\begin{array}{l} y'' = p(x)\,y' + q(x)\,y + r(x) \\ a \le x \le b \\ y(a) = a \\ y(b) = b \end{array}\right\} \qquad h = \frac{b-a}{n};\; x_j = a + jh \quad j = 1(1)n \qquad (1)$$

$$y''(x_j) = p(x_j)\,y'(x_j) + q(x_j)\,y(x_j) + r(x_j) \qquad j = 0(1)n \qquad (2)$$

$$y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!}y''(x_j) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_j) + \cdots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_j^+) \qquad (3)$$

$$y(x_{j-1}) = y(x_j - h) = y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!}y''(x_j) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_j) - \cdots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_j^-) \qquad (4)$$

$$\xrightarrow{(3),(4)} y''(x_j) = \frac{y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1})}{h^2} - \frac{h^2}{4!}y^{(4)}(c_1) \qquad (5)$$

$$\xrightarrow{(3)-(4)} y'(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h} - \frac{h^2}{3!}y'''(c_2) \qquad (6)$$

$$\xrightarrow{(5),(6)\ \ in\ \ (1)} \frac{y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1})}{h^2} - \frac{h^2}{4!}y^{(4)}(c) = p(x_j)\Big[\frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h} - \frac{h^2}{12}$$

$$y'''(c)\Big] + q(x_j)\,y(x_j) + r(x_j) \qquad j = 1(1)n-1$$

$$y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1} = \frac{h}{2}p(x_j)(y_{j+1} - y_{j-1}) + h^2 q(x_j)\,y_j + h^2 r(x_j)$$

$$\therefore\quad (1 + \frac{h}{2}p(x_j))\,y_{j-1} - (2 + h^2 q(x_j))\,y_j + (1 - \frac{h}{2}p(x_j))\,y_{j+1} = h^2 r(x_j) \qquad j = 1(1)n-1$$

$$\begin{bmatrix} -2-h^2q_1 & 1-\frac{h}{2}p_1 & & & \\ 1+\frac{h}{2}p_2 & -2-h^2q_2 & 1-\frac{h}{2}p_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 1+\frac{h}{2}p_{n-2} & -2-h^2q_{n-2} & 1-\frac{h}{2}p_{n-2} & \\ & & 1+\frac{h}{2}p_{n-1} & -2-h^2q_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2r_1 - a\,(1+\frac{h}{2}p_1) \\ h^2r_2 \\ h^2r_3 \\ \vdots \\ h^2r_{n-2} \\ h^2r_{n-1} - b\,(1-\frac{h}{2})\,p_{n-1} \end{bmatrix}$$

مثال:

با روش تفاضلی مرتبه دوم مسئله زیر را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
& y'' = -3y' + 2y + (2x+3) \\
& 0 \le x \le 1 \\
& y(0) = 2 \\
& y(1) = 1 \\
& h = 0.2
\end{aligned}
$$

حل)

$$
\begin{aligned}
& r(x) = 2x+3 \\
& p(x) = -3 \\
& q(x) = 2 \succ 0
\end{aligned}
$$

تمام توابع پیوسته اند. $p(x)$ کراندار و $q(x)$ مثبت است.پس شرایط قضیه قبل حاکم است وما دارای جواب منحصر به فرد هستیم.

$$
n = \frac{1-0}{0.2} = 5 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_0 = 0 & x_1 = 0.2 \\ x_2 = 0.4 & x_3 = 0.6 \\ x_4 = 0.8 & x_5 = 1 \end{Bmatrix}
$$

حال ماتریس فوق را تشکیل می دهیم.

$$
\begin{bmatrix} -2.08 & 1.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & -2.08 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & -2.08 & 1.3 \\ 0 & 0 & 0.7 & -2.08 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0.04(2x_1+3) - 2(0.7) \\ 0.04(2x_2+3) \\ 0.04(2x_3+3) \\ 0.04(2x_4+3) - 1.3 \end{bmatrix}
$$

این دستگاه توسط روش حذفی گاوس به سادگی حل می شود.

روش نیومرو

مسئله مقدار مرزی با شرایط مرزی نوع اول زیر را درنظر می گیریم:

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(x,y) \quad , a \le x \le b \\
& y(a) = a \\
& y(b) = b \qquad\qquad (1)
\end{aligned}
$$

بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه با گام مساوی افراز می کنیم:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_j = a + jh \quad , j = 0(1)n$$

معادله دیفرانسیل داده شده را در x_j درنظر می گیریم :

$$y''(x_j) = f(x_j, y(x_j)) \qquad j = 1(1)n \qquad (2)$$

حال مشتق مرتبه دوم را با یک فرمول سه نقطه ای و تابع f را در سه نقطه با ضرایب نامعین تقریب می زنیم:

$$
\begin{aligned}
y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1}) = h^2 \{ & b_0 f(x_{j-1}, y(x_{j-1})) + b_1 f(x_j, y(x_j)) + \\
& b_2 f(x_{j+1}, y(x_{j+1})) \} + T_j \qquad (3)
\end{aligned}
$$

برای تعیین ضرایب نامعین کافی است که از رابطه (۲) استفاده کنیم و همچنین $y(x_{j-1})$ ، $y(x_{j+1})$ ، $y''(x_{j+1})$ و $y''(x_{j-1})$ را حول x_j با سری تیلور بسط دهیم.

$$
\begin{aligned}
L.H.S: \; & y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_j) - \cdots - 2y(x_j) \\
& + y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_j) + \cdots
\end{aligned}
$$

$$R.H.S: h^2\{b_0[y''(x_j)+2\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_j)+2f^{(6)}(x_j)+\cdots = h^2\{b_0 y''(x_j)-$$
$$hy'''(x_j)+\frac{h^2}{2!}y^{(4)}(x_j)-\frac{h^3}{3!}y^{(5)}(x_j)+\frac{h^4}{4!}y^{(6)}(x_j)+\cdots]$$
$$+b_1 y''(x_j)+b_2[hy''(x_j)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_j)+\frac{h^3}{3!}y^{(5)}(x_j)+\frac{h^4}{4!}y^{(6)}(x_j)+$$
$$\cdots]\}+T_j$$

رابطه فوق را می کنیم.

$$R.H.S:(b_0+b_1+b_2)h^2 y''(x_j)+(b_2-b_0)h^3 y'''(x_j)+$$
$$(b_2+b_0)\frac{h^4}{2!}y^{(4)}(x_j)+(b_2-b_0)\frac{h^5}{3!}y^{(5)}(x_j)$$
$$+(b_2-b_0)\frac{h^6}{4!}y^{(6)}(x_j)+\cdots+T_j$$

با متحد قرار دادن روابط سمت راست با سمت چپ می توان روابط زیر را به دست آورد که از این روابط می توان مجهولات را محاسبه نمود.

$$b_0+b_1+b_2=1$$
$$b_2-b_0=0 \qquad \Rightarrow b_0=b_2=\frac{1}{12} \quad ,b_1=\frac{10}{12}$$
$$b_2+b_0=\frac{1}{6}$$

خطای برشی روش نیومرو عبارت است از اولین جمله ناصفر متناظر با مجهولات محاسبه شده فوق که به صورت زیر می یابیم:

$$T_j=\frac{1}{6}\frac{h^6}{4!}Y^{(6)}(c)=\frac{1}{144}h^6 Y^{(6)}(c)$$

بنابراین خطای برشی دارای دقت مرتبه $o(h^6)$ است لذا نتیجه می گیریم که روش نیومرو دارای دقت مرتبه پنجم می باشد.

الگوریتم روش:

$$y_{j-1}-2y_j+y_{j+1}=\frac{h^2}{12}[f_{j-1}+10f_j+f_{j+1}] \qquad j=1(1)n-1$$

مثال:

مسئله زیر را با روش نیومرو حل کنید.

$$y''=\frac{2}{x^2}y+(2x+3)$$
$$y(2)=y(3)=0$$
$$h=0.2$$

حل)

$$n=\frac{3-2}{0.2}=5 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_0=2 & x_1=2.2 \\ x_2=2.4 & x_3=2.6 \\ x_4=2.8 & x_5=3 \end{Bmatrix}$$

$$y_{j-1}-2y_j+y_{j+1}=\frac{1}{300}[(\frac{2}{x_{j-1}^2}y_{j-1}+2x_{j-1}+3)+10(\frac{2}{x_j^2}y_j+2x_j+3)+$$
$$(\frac{2}{x_{j+1}^2}y_{j+1}+2x_{j+1}+3)] \qquad j=1(1)4$$

با جایگذاری در معادله بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} -2.0137 & 0.9988 & 0 & 0 \\ 0.9988 & -2.0115 & 0.9990 & 0 \\ 0 & 0.9988 & 2.0098 & 0.9991 \\ 0 & 0 & 0.9990 & 2.0085 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.296 \\ 0.312 \\ 0.3266 \\ 0.3307 \end{bmatrix}$$

این دستگاه با روش حذفی گاوس به راحتی حل می گردد.

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE)

فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر است:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \qquad (1)$$

که در آن A و B و C یاتوابعی از x و y هستند یا توابعی از $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$.

اگر A و B و C توابعی از x و y و F یک تابع خطی نسبت به u و $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشد آن گاه معادله دیفرانسیل (1) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم نامیده می شود که دارای جواب $u(x,y)$ است.یعنی:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Hu+G=0$$

که در آن A و B و C هم می توانند ثابت باشند وهم تابعی از x و y.

اگر در این معادله $G=0$ معادله همگن و درغیر این صورت معادله ناهمگن خوانده می شود.

حالت۱) اگر $B^2-AC=0$ باشد معادله فوق از نوع سهموی است که معادله گرما از جمله اینهاست.

در این صورت داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}$$

حالت ۲) اگر $B^2-AC\succ 0$ معادله فوق از نوع هذلولوی است که معادله موج از این دسته است.

حالت ۳) اگر $B^2-AC\prec 0$ باشد معادله فوق از نوع بیضوی است و معادله لاپلاس (پواسون) از جمله اینهاست.

معادله گرما در فضای یک بعدی

معادله انتقال حرارت در فضای یک بعد چنان چه تمامی ثابتهای فیزیکی را واحد انتخاب نماییم

عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad a \le x \le b, t \succ 0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u(a,t) = g_1(t) \\ u(b,t) = g_2(t) \end{cases}\right\}(*)$$

هدف ما یافتن جواب معادله فوق یعنی $u(x,t)$ است که در معادلـه (1) و درشـرایط مـرزی و اولیـه (*)

که به شرایط مرزی دیریکله معروف است صدق کند.

روش تفاضلی برای حل عددی به صورت کلی زیر است:

بازه $[a,b]$را به Mزیر فاصله با گام مساوی h افراز می کنیم و همچنین بازه $[0,T]$ را به N زیر بازه با

گام مساوی k افراز می کنیم بنابراین داریم:

$$h = \frac{b-a}{M}$$

$$x_m = a + mh \qquad m = 0(1)M$$

$$k = \frac{T}{N}$$

$$t_n = nk \qquad n = 0(1)N$$

شبکه عمومی نقاط فوق را که عبارت است از (x_m, t_n) در نظر می گیریم و معادله دیفرانسیل را در این

شبکه نقاط گسسته می سازیم.برای آسانی کار فرض می کنیم

$$u(x_m, t_n) = U_m^n \quad (Exact \quad solution)$$

$$u_m^n (approximate \quad Solution)$$

روش صریح اشمیت برای حل عددی معادله گرما در فضای تک بعدی:

معادله دیفرانسیل رابطه (۱) را د رمجموعه نقاط گسسته در نظر می گیریم:

$$(\frac{\partial u}{\partial t})_{(x_m,t_n)} = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{(x_m,t_n)} \qquad (2)$$

با استفاده از فرضیات فوق داریم:

$$\frac{\partial U_m^n}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} \qquad (3)$$

حال با استفاده از فرمول تفاضلی پیشرو مرتبه اول برای تقریب مشتق نسبی مرتبه اول نسبت به t وبا استفاده از فرمول تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای تقریب مشتق نسبی مرتبه دوم نسبت به x داریم:

$$\Delta_t U_m^n + O(k) = d_x^2 U_m^n + O(h^2)$$
$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k) = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2) \qquad (4)$$

با استفاده از رابطه (۴) دررابطه (۳) و با استفاده از ضرب k در طرفین رابطه نهایتا داریم:

$$U_m^{n+1} - U_m^n = \frac{k}{h^2}[U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n] + k[O(k+h^2)]$$

باانتخاب

$$l = \frac{k}{h^2}$$

داریم:

$$U_m^{n+1} - U_m^n = l\,[U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n] + k[O(k+h^2)]$$

حال اگر از خطای برشی رابطه فوق صرفنظر کنیم داریم:

$$u_m^{n+1} - u_m^n = l\,[u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n]$$
$$u_m^{n+1} = l\,u_{m-1}^n + (1-l)\,u_m^n + l\,u_{m+1}^n \qquad n = 0(1)N-1 \qquad , m = 1(1)M-1 \qquad (5)$$

رابطه فوق را روش تفاضلی اشمیت می نامند.برای تعیین دقت روش به شرح زیر عمل می کنیم:

دقت روش : خطای برشی روش فوق عبارت است از:

$$T_m^n = U_m^{n+1} - \frac{k}{h^2}U_{m-1}^n - (1-\frac{2k}{h^2})U_m^n - \frac{k}{h^2}U_{m+1}^n \qquad (6)$$

حال رابطه (۶)را با استفاده از سری تیلورحول (x_m, t_n) بسط می دهیم.بنابراین داریم:

$$T_m^n = U_m^n + k\frac{\partial U_m^n}{\partial t} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} + \frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 U_m^n}{\partial t^3} + \cdots - \frac{k}{h^2}\{U_m^n - h\frac{\partial U_m^n}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 U_m^n}{\partial x^3} + \cdots\} - (1-2l)U_m^n - l\{U_m^n + h\frac{\partial U_m^n}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial U_m^n}{\partial x^3} + \cdots\}$$

رابطه فوق را ساده می کنیم:

$$T_m^n = \underbrace{k(\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2})}_{*} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12}\frac{a^4 U_m^n}{\partial x^4} + \cdots$$

با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$T_m^n = \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12}\frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} + \cdots$$

بنابراین دقت خطای برشی روش اشمیت عبارت است از:

$$T_m^n = O(k^2 + kh^2)$$

با تقسیم بر k رابطه فوق دقت روش اشمیت را به صورت زیر می یابیم:

$$k^{-1}T_m^n = O(k + h^2)$$

بنابراین روش فوق دارای دقت $o(k+h^2)$ است.این روش مشروط پایـدار اسـت و اگـر $l \le \frac{1}{2}$ روش همواره پایدار است.

روش اشمیت روشی است دو لایه ای و صریح. فرم سلولی روش فوق عبارت است از:

(شکل)

روش ضمنی لاسنن برای حل عددی معادله گرما در یک فضای تک بعدی:

حال اگر مشتق نسبی مرتبه اول نسبت به t در طرف چپ رابطه (۳) را با استفاده ازیک فرمول مشتق گیری پسرو مرتبه اول تقریب بزنیم وسمت راست این رابطه را با یک فرمول تفاضل مرکزی مرتبه دوم تقریب بزنیم داریم:

$$\nabla_t U_m^n = d_x^2 U_m^n$$
$$\frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k) = \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} + O(h^2) \qquad (7)$$

حال اگر رابطه (۷) را در رابطه (۳) قرار دهیم و طرفین این رابطه را در k ضرب کنیم داریم:

$$U_m^n - U_m^{n-1} = l\,(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + O(k^2 + kh^2)$$

حال چنان چه از خطای برشی رابطه فوق صرفنظر کنیم و هم چنین با تغییر n به $n+1$ داریم:

$$u_m^n = -l\,u_{m-1}^{n+1} + (1+2\,l\,)u_m^{n+1} - l\,u_{m+1}^{n+1} \qquad m = 1(1)M-1 \quad , n = 0(1)N-1 \qquad (8)$$

رو ش فوق روش لاسنن نامیده می شود که روشی ضمنی و دولایه ای لست که فرم سلولی آن عبارت است از:

(شکل)

دقت روش :

خطای برشی روش لاسنن عبارت است از:

$$T_m^n = -\frac{k}{h^2}U_{m-1}^{n-1} + (1+\frac{2k}{h^2})U_m^{n+1} - \frac{k}{h^2}U_{m+1}^{n+1} - U_m^n$$

رابطه فوق را با استفاده از سری تیلورحول (x_m, t_n) بسط می دهیم داریم:

$$\begin{aligned} T_m^n = &-\frac{k}{h^2}[U_m^n + (k\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - h\frac{\partial U_m^n}{\partial x}) + \frac{1}{2!}(k^2\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - 2kh\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x \partial t} + h^2\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2}) \\ &+ \frac{1}{3!}(k^3\frac{\partial^3 U_m^n}{\partial t^3} - 3k^2 h\frac{\partial^3 U_m^n}{\partial t^2 \partial x} + 3kh\frac{\partial^3 U_m^n}{\partial t \partial x^2} - h^3\frac{\partial^3 U_m^n}{\partial x^3}) + \cdots + (1+2l)[U_m^n \\ &+ k\frac{\partial U_m^n}{\partial t} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} + \cdots] - U_m^n \end{aligned}$$

با ساده کردن رابطه فوق داریم:

$$T_m^n = \underbrace{k(\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2})}_{*} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12}\frac{a^4 U_m^n}{\partial x^4} + \cdots$$

با استفاده از رابطه (۳) رابطه فوق به صورت زیر ساده می شود:

$$T_m^n = \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 U_m^n}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12}\frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} + \cdots$$

لذا نتیجه می گیریم که خطای برشی روش لاسنن عبارت است از:

$$T_m^n = O(k^2 + kh^2)$$

بنابراین دقت روش لاسنن عبارت است از:

$$k^{-1}T_m^n = O(k + h^2)$$

این روش برای $l \le \frac{1}{6}$ پایدار است لذا رو ش را مشروط پایدار نامند.

روش کرانک- نیکلسون :

این روش در واقع ترکیبی از دو روش قبلی است.

ساده ترین روش برای اثبات فرمول عبارت است از میـانگین گـرفتن از دو روش فـوق.بنـابراین دوروش فوق را درنظر می گیریم:

$$u_m^{n+1} = l\,u_{m-1}^n + (1-l)u_m^n + l\,u_{m+1}^n \qquad n=0(1)N-1 \qquad ,m=1(1)M-1 \qquad (9)$$

$$u_m^n = -l\,u_{m-1}^{n+1} + (1+2l)u_m^{n+1} - l\,u_{m+1}^{n+1} \qquad m=1(1)M-1 \quad ,n=0(1)N-1 \qquad (10)$$

و حال میانگین دو روش فوق:

$$-\frac{l}{2}u_{m-1}^{n+1} + (1+l)u_m^{n+1} - \frac{l}{2}u_{m+1}^{n+1} = \frac{l}{2}u_{m-1}^n + (1-l)u_m^n + \frac{l}{2}u_{m+1}^n$$
$$n=0(1)N-1 \qquad ,m=1(1)M-1$$

فرم اپراتوری این رو ش عبارت است از:

$$(1-\frac{l}{2}d_x^2)u_m^{n+1} = (1+\frac{l}{2}d_x^2)u_m^n \qquad n=0(1)N-1 \qquad ,m=1(1)M-1 \qquad (11)$$

این روش را روش کرانک نیکلسون نامند که روشی دو لایه ای و ضمنی است.فرم سلولی این روش عبارت است از:

(شکل)

دقت روش :

خطای برشی روش عبارت است از میانگین خطای برشی دو روش اشمیت و لاسنن:

$$T_m^n = \frac{T_{ms}^n + T_{ml}^n}{2} = k\underbrace{\left(\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2}\right)}_{*} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_m^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_m^n}{\partial x^2}\right) -$$

$$\frac{k}{h^2}\frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} - \frac{k^3}{4}\frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^2 \partial t^2} + \cdots = O(k^3 + kh^2)$$

با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$T_m^n = kh^2\,\frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^4} - \frac{k^3}{4}\frac{\partial^4 U_m^n}{\partial x^2 \partial t^2} + \cdots = O(k^3 + kh^2)$$

لذا نتیجه می گیریم که دقت روش عبارت است از:

$$k^{-1} T_m^n = O(k^2 + h^2)$$

ضمنا این روش همواره پایدار است یعنی با انتخاب هر l ای روش همگرا می شود.

روش ریچاردسون:

حال چنانچه مشتق نسبی مرتبه اول نسبت به t رادر رابطه (۳) با یک فرمول مشتق گیری نسبی مرتبـه دوم

تقریب بزنیم داریم:

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2k} + O(k^2) = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2)$$

چنان چه رابطه فوق را در $2k$ ضرب کنیم و با استفاده از $l = \frac{k}{h^2}$ داریم:

$$U_m^{n+1} - U_m^{n-1} = l\,(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + O(k^2 + kh^2)$$

چنان چه از خطای برشی صرفنظر کنیم داریم:

$$u_m^{n+1} = 2l\,(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + u_m^{n-1} \qquad n = 1(1)N-1 \qquad m = 1(1)M-1 \qquad (12)$$

روش فوق را روش ریچاردسون می نامند که روشی سه لایه ای و صریح است. فرم سلولی عبارت است از:

(شکل)

دقت روش:

خطای برشی رو شریچاردسون عبارت است از:

$$T_m^n = U_m^{n+1} - 2l\,(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) - U_m^{n-1}$$

با بسط سری تیلور حول (x_m, t_n) و با استفاده از رابطه (۳) نهایتا داریم:

$$T_m^n = O(k^3 + kh^2)$$

بنابراین دقت روش عبارت است از:

$$k^{-1} T_m^n = O(k^2 + h^2)$$

روش دافورت – فرنکل:

اگر در روش ریچاردسون از تقریب زیر استفاده کنیم:

$$u_m^n \cong \frac{1}{2}(u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) \qquad (1)$$

داریم:

$$(1+2l)u_m^{n+1} = 2l\,(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) + (1-2l)u_m^{n-1}$$
$$n = 0(1)N-1 \qquad m = 1(1)M-1$$

حال اگر طرفین رابطه را در $1+2l$ تقسیم کنیم داریم:

$$u_m^{n+1} = \frac{2l}{1+2l}(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) + \frac{1-2l}{1+2l}u_m^{n-1} \qquad n = 1(1)N-1 \qquad m = 1(1)M-1 \qquad (13)$$

روش فوق روشی است سه لایه ای و صریح که فرم سلولی آن عبارت است از:

دقت روش:

خطای برشی روش دافورت – فرنکل عبارت است از:

$$T_m^n = (1+2l)U_m^{n+1} - 2l(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n) + (1-2l)U_m^{n-1}$$

چنان چه رابطه فوق را با استفاده از سری تیلور بسط دهیم و ساده کنیم داریم:

$$T_m^n = O(k^3 + kh^2)$$

لذا نتیجه می گیریم که دقت روش عبارت است از:

$$k^{-1}T_m^n = O(k^2 + h^2)$$

ضمنا این روش از روش قبلی پایدارتر است.

مثال ۱:

با استفاده از روش اشمیت و $k=\frac{1}{36}, h=\frac{1}{3}$ معادله زیر را برای دو لایه $n=0,1$ حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad t \succ 0 \quad 0 \le x \le 1$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,0) = \sin px \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{Bmatrix}$$

حل)

$$\frac{1}{3}=\frac{1-0}{M} \quad \Rightarrow M=3$$

$$x_m = mh \qquad m=0(1)3 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_0=0 & x_1=\frac{1}{3} \\ x_2=\frac{2}{3} & x_3=1 \end{Bmatrix}$$

$$t_n = nk \qquad n=0,1 \qquad \Rightarrow \left\{ t_0=0 \quad t_1=\frac{1}{36} \right\}$$

$$l=\frac{k}{h^2}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}$$

$$u_m^{n+1}=\frac{1}{4}(u_{m-1}^n+u_{m+1}^n)+\frac{1}{2}u_m^n$$

$$4u_m^{n+1}=u_{m-1}^n+u_{m+1}^n+2u_m^n$$

$for(n=0; n\le 1; n++)$

$\quad for(m=1; m\le 2; m++)$

$n=0$

$m=1,2$

$$\begin{Bmatrix} 4u_1^1=u_0^0+2u_1^0+u_2^0=\sin px_0+2\sin px_1+\sin px_2=3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4u_1^2=u_1^0+2u_2^0+u_3^0=\sin px_1+2\sin px_2+\sin px_3=3\frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow u_1^1=\frac{3}{8}\sqrt{3} \qquad u_1^2=\frac{3}{8}\sqrt{3}$$

$n=1$

$m=1,2$

$$\begin{Bmatrix} 4u_1^2=u_0^1+2u_1^1+u_2^1 \\ 4u_2^2=u_1^1+2u_2^1+u_3^1 \end{Bmatrix} \Rightarrow u_1^2=\frac{9}{32}\sqrt{3} \qquad u_2^2=\frac{9}{32}\sqrt{3}$$

مثال۲:

مساله زیر را بااستفاده از روش کرانک نیکلسون برای دو لایه حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad t\succ 0 \quad 0\le x\le 1$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,0)=\sin px \\ u(0,t)=t^2 \\ u(1,t)=2t \end{Bmatrix}$$

حل)

$$\Rightarrow u_2^1 = 0.5567 \quad u_1^1 = 0.6742$$
$$n=1$$
$$m=1,2$$
$$u_0^2 = u(0,t_2) = {t_2}^2 \quad t_2 = 2k = 2(\frac{1}{36}) = \frac{1}{18}$$
$$u_3^2 = u(1,t_2) = 2t_2 = \frac{1}{9}$$
$$u_0^1 = u(0,t_1) = {t_1}^2 = (\frac{1}{36})^2$$
$$u_3^1 = u(1,t_1) = 2t_1 = \frac{1}{18}$$
$$\begin{Bmatrix} -u_0^2 + 10u_1^2 - u_2^2 = u_0^1 + 6u_1^1 + u_2^1 \\ -u_1^2 + 10u_2^2 - u_3^2 = u_1^1 + 6u_2^1 + u_3^1 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} -u_1^2 + 10u_2^2 = u_1^1 + 6u_2^1 + \frac{1}{6} \\ 10u_1^2 - u_2^2 = 6u_1^1 + u_2^1 + [\frac{1}{(18)^2} + \frac{1}{(36)^2}] \end{Bmatrix}$$
$$\Rightarrow u_1^2 = 0.5275 \quad u_2^2 = 0.5443$$

تمرینهای فصل سوم

۱- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است: $y' = x + \sin(y), y(0) = 1$

این مسئله را با روشهای اویلر پیراسته اویلرروشهای مراتب مختلف رانگ- کوتاه با گام h=0.1 حل کنید و جواب تقریبی y(0.4) را بیابید.

۲- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است: $y' = x(y+x) - 2, y(0) = 2$

الف: با استفاده از روش اویلر و گامهایh=0.15,h=0.2,h=0.3 جواب تقریبی معادله رادر y(0.6) بیابید.(محاسبات تا ۵ رقم اعشار)

ب:مسئله را با گامهای مندرج در فوق با روشهای مرتبه دوم رانگ - کوتاه و پیراسته اویلر حل کنید.

۳- با استفاده از روش کلاسیک رانگ- کوتاه مرتبه چهارم جواب تقریبی مسئله زیر را در x=0.8 بیابید به طوریکه h=0.2 باشد. $y' = \sqrt{x+y}, y(0.4) = 0.41$

٤- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است: $y' = \frac{(y+x)}{(y-x)}, y(0) = 1$
با گام h=0.2 جواب مسئله را در y(0.4) با روش رانگ- کوتاه مرتبه سوم کلاسیک بیابید.

۵- جواب تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را در نقطه x=0.3 با استفاده از روش آدامز- بشفورت مر تبه دوم و با گام h=0.1 بیابید. $y' = x - y^2, y(0) = 1$
.برای شروع روش از روش رانگ- کوتاه مرتبه دوم کلاسیک استفاده کنید.

٦- روش مرتبه چهارم به فرم: $y_{j+1} = ay_{j-2} + h(by'_j + cy'_{j-1} + dy'_{j-2} + ey'_{j-3})$
برای حل معادله $y' = f(x, y)$ تعیین کنید و خطای آنرا بیابید.

۷- برای حل معادله : $y' = f(x, y), y(0) = y_0$
روش زیر پیشنهاد می شود. خطای برشی این روش را بیابید و مرتبه دقت آنرا تعیین
کنید. $y_{j+1} = \frac{18}{19}(y_j - y_{j-2}) + y_{j-3} + \frac{4h}{19}(f_{j+1} + 4f_j + 4f_{j-2} + f_{j-3})$

۸- b,c,a را بطریقی بیابید که روش چند
گامی: $y_{j+1} = (1-a)y_j + ay_{j-1} + h(by'_{j+1} + cy'_j + dy'_{j-1})$
دارای حداکثر مرتبه دقت برای حل مسئله مقدار اولیه $y' = f(x, y)$ گردد.

۹- مسئله مقدار مرزی زیر مفروض است: $x^2 y'' - 2y + x = 0, x \in [2,3], y(2) = y(3) = 0$
با استفاده از روشهای تفاضلی مرتبه دوم و روش نیومر و با گام h=0.1,h=0.25 حل کنید.

۱۰- با استفاده از یک روش مرتبه دوم تفاضلی مسئله مقدار مرزی $y'' = xy + 1, x \in [0,1]$

$$y(0) + y'(0) = 1, y(1) = 1$$

را با گام h=0.25 حل کنید.