

madsage
IRan Education
Research
NETwork
(IRERNET)

شبکه آموزشی - پژوهشی مادیج
با هدف بهبود پیشرفت علمی
و دسترسی راحت به اطلاعات
برای جامعه بزرگ علمی ایران
ایجاد شده است



مادیج

شبکه آموزشی - پژوهشی ایران

madsg.com
مادیج



MSVS

Persian e-Book

امام مهدی (ع):

ما از رسیدگی به و سرپرستی شما کوتاهی نمی کنیم و یاد
شما را از خاطر نمی بریم که اگر جز این بود نابسامانی ها
و مصیبت ها بر سرتان فرود می آمد و دشمنان، شما را در
هم می شکستند.

www.msvs.ir

معادلات دیفرانسیل

Subject:

Year.200 Month. Day.

معارلات ديفراسيل :

مناج : - سيوثر (ترجمه عا در نزاره)

- كرف ()

- كلاته اي

- پنج استاد

سرنصل ها :

- معارلات ديفراسيل - تعريف - جواب

- معارله ديفراسيل مرتبه اول (جدائي پذير - همن - لائرنر)

- معارله ديفراسيل مرتبه دوم دبالا تر

- صل به كك ايلو ترها داپلو ترهاي شكورس

- تبديلات لايلاس صل معارلات به كك اكني

- صل معارلات به كك دستاه

Subject:

Year. 200 Month. Day.

معادله ریفرانسیل: هر معادله که به فرم $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ که در آن x متغیر، $1 \leq n$ و مشتقات مختلف تابع می باشد.

$$2y' + y = 0 \quad (\text{رتبه اول})$$

$$y'' + 2xy' + 2y = 0 \quad (\text{رتبه دوم})$$

$$y'' + 2xy' + y = 0 \quad (\text{رتبه دوم})$$

$$y^{(4)} - 4y'' = 0 \quad (\text{رتبه چهارم})$$

رتبه معادله ریفرانسیل: بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله ریفرانسیل رتبه معادله ریفرانسیل می گیرند

جواب معادله ریفرانسیل: منظور از جواب یک معادله ریفرانسیل تابعی است مانند

$$y = f(x) \quad \text{یا} \quad f(x, y) = 0 \quad \text{به طوری که در معادله ریفرانسیل صدق کند}$$

جواب عمومی یک معادله ریفرانسیل: کلی ترین جواب یک معادله ریفرانسیل را جواب

عمومی یک معادله ریفرانسیل و اگر این جواب را تحت شرایط خاص به کار ببریم جواب خصوصی

معادله ریفرانسیل می گیرند

$$\text{EX: } y' - y = 0 \Rightarrow y = e^x$$

جواب خصوصی x

$$\Rightarrow \begin{cases} y = ce^x \\ y' = ce^x \end{cases} \quad \text{جواب عمومی ها}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

معادله مرتبه اول: هر معادله به فرم $L(x, y, y') = 0$ باشد معادله مرتبه

اول است. برای حل معادله مرتبه اول آن، ما را دسته بندی می کنیم و روش حل هر یک به صورت زیر است:

الف) معادله جدانشدنی (تفکیک پذیر): هر معادله ای که در آن بتوان تغییرهای x و y را از یکدیگر جدا کرد معادله تفکیک پذیر نامیده می شود. برای حل آن، طریقه زیر عمل می کنیم

$$L(x, y, y') = 0 \Rightarrow y' = P(x, y) \Rightarrow y' = P(x) Q(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = P(x) Q(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $xy' + y = 0$

$$xy' = -y \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-dx}{x}$$

$$y' = \frac{-y}{x} \quad \ln y = -\ln x + \ln C$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \quad \ln y = \ln \frac{C}{x}$$

$$\frac{-dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad y = \frac{C}{x} \quad \text{جواب عمومی}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$2) \quad j' = \frac{xj+x}{xj+j}$$

$$j' = \frac{x(j+1)}{j(x+1)}$$

$$j'j(x+1) = x(j+1)$$

$$\frac{dj}{dx} = \frac{x(j+1)}{j(x+1)}$$

$$\frac{dj \cdot j}{j+1} = \frac{x \cdot dx}{x+1}$$

$$\frac{x+1-1}{x+1} dx + \frac{j+1-1}{j+1} dj = 0$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx + \int \left(1 - \frac{1}{j+1}\right) dj = 0$$

$$\int dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \int dj - \int \frac{1}{j+1} dj = 0$$

$$x - \ln(x+1) + j - \ln(j+1) = 0$$

$$3) \quad j' + xj + j + x + 1 = 0$$

$$\frac{dj}{(j+1)} = -(x+1) dx$$

$$j' + j(x+1) + x+1 = 0$$

$$\ln(j+1) = -\frac{1}{r} x^r + x + c$$

$$j' + (x+1)(j+1) = 0$$

$$j+1 = e^{-\frac{1}{r} x^r + x + c} = C_1 e^{-\frac{1}{r} x^r - x}$$

$$j' = -(x+1)(j+1)$$

$$j = C_1 e^{-\frac{1}{r} x^r - x} - 1$$

$$\frac{dj}{dx} = -(x+1)(j+1)$$

$$4) \quad e^{x+rj} = j'$$

$$\int e^{-rj} \cdot dj = \int e^x \cdot dx$$

$$\frac{dj}{dx} = e^{x+rj}$$

$$-\frac{1}{r} e^{-rj} = e^x + c$$

$$\frac{dj}{dx} = e^x \cdot e^{rj}$$

$$\frac{dj}{e^{rj}} = e^x \cdot dx$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$a) e^J dx + x \ln x dy = 0 \quad \ln(\ln x) + \ln c = e^{-J}$$

$$e^J dx = -x \ln x dy \quad \ln(c \ln x) = e^{-J}$$

$$\frac{dx}{x \ln x} = -\frac{dy}{e^J}$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int -\frac{dy}{e^J}$$

$$1) y' = \frac{r e^x \tan y}{(e^x - r) \sec^r y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r e^x \tan y}{(e^x - r) \sec^r y}$$

$$\ln(\tan y) = \ln(e^x - r) + \ln c$$

$$\ln(\tan y) = \ln c (e^x - r)$$

$$\frac{\sec^r y dy}{\tan y} = \frac{r e^x dx}{e^x - r}$$

$$\tan y = c (e^x - r)$$

$$\ln \tan y = r \ln(e^x - r) + \ln c$$

$$v) y' = \frac{\sin x}{1 - c y^r} \quad y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{1 - c y^r}$$

$$y - y^r = -\cos x + c$$

$$(1 - c y^r) dy = \sin x dx$$

$$x=0, y=1 \rightarrow \frac{1}{1} = -\cancel{\cos 0} + c$$

$$\int dy - \int r y^{r-1} dy = \int \sin x dx$$

$$c = 1$$

$$y - \frac{r}{r} y^r = -\cos x + c$$

$$\Rightarrow y - y^r = -\cos x + 1$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

ب) معادلات قابل تبدیل به معادلات جانشین پذیر:

۱- معادله که بر فرم $y' = f(ax + by + c)$ باشد با تغییر متغیر زیر قابل تبدیل

به یک معادله جانشین پذیر می باشد.

$$ax + by + c = u$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} a + by' = u' \quad u' = bf(u) + a = f(u)$$

$$by' = u' - a$$

$$\frac{du}{dx} = f(u)$$

$$y' = \frac{u' - a}{b}$$

$$\int \frac{du}{f(u)} = \int dx$$

$$\frac{u' - a}{b} = f(u)$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$1) y' = 2x + 2y + 5$$

$$2x + 2y + 5 = u$$

$$\Rightarrow 2 + 2y' = u'$$

$$y' = \frac{u' - 2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{u' - 2}{2} = u$$

$$u' = 2u + 2$$

$$\frac{du}{dx} = 2u + 2$$

$$\frac{du}{2u + 2} = dx$$

$$\int \frac{du}{2u + 2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(2u + 2) = x + c$$

$$\frac{1}{2} \ln(2x + 2y + 5) = x + c$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$1) y' = \tan(x+y) - 1$$

$$x+y=u$$

$$1+y' = u'$$

$$y' = u' - 1$$

$$u' - 1 = u$$

$$u' \cancel{-1} = \tan(x+y) \cancel{-1}$$

$$u' = \tan(x+y)$$

$$u' = \tan(u)$$

$$\frac{du}{dx} = \tan u$$

$$\frac{du}{\tan u} = dx$$

$$\int \frac{du}{\tan u} = \int dx$$

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int dx$$

$$\ln |\sin u| = x + c$$

$$\sin u = e^{x+c} = C_1 e^x \quad \therefore \sin(x+y) = C_1 e^x$$

$$2) y' = (x+y)^r$$

$$x+y=u$$

$$1+y' = u'$$

$$y' = u' - 1$$

$$x+y=u$$

$$u^r = u' - 1$$

$$u' = u^r + 1$$

$$\frac{du}{dx} = u^r + 1$$

$$\frac{du}{u^r+1} = dx$$

$$\int \frac{du}{u^r+1} = \int dx$$

$$\text{Arc tan } u = x + c$$

$$\text{Arc tan } (x+y) = x + c$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

۲) معادله هگن:

تابع هگن: تابع $f(x, y) = 0$ هگن از رده n نامیم در صورتی که

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \quad \text{باشد}$$

مثال: $f(x, y) = xy + y^2$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \cdot \lambda y + (\lambda y)^2 = \lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (xy + y^2)$$

خود معادله

هگن از رده ۲ (چون توان ۱ رده ۲ است)

EX2: $f(x, y) = x + y^2 + 1$

$$\Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + (\lambda y)^2 + 1 = \lambda x + \lambda^2 y^2 + 1$$

غیر هگن

معادله هگن: معادله $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ هگن نامیم در

صورتی که p, q به عنوان آتابع هگن در ادای یک رده هگن باشد.

هگن $EX: (x+y)dx + (x-y)dy = 0$

$$(x+1)dx + (y+1)dy = 0 \quad \text{غیر هگن}$$

$$(xy+x^2)dx + (x-y)dy = 0 \quad \text{غیر هگن}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

رہنما حل معادلات ہین: اگر معادہ $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ہین

ہاں با تغییر متغیر $y = xv$ قابل تبدیل ایک معادہ جدا جدا بنیو میباید

$$dy = v dx + x dv$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad y' = v + xv'$$

مثال:

$$1) (x+y) dx + (x-y) dy = 0$$

$$y = xv \implies dy = v dx + x dv$$

$$(x + xv) dx + (x - xv)(v dx + x dv) = 0$$

$$\left[x(1+v) dx \right] + \left[x(1-v)(v dx + x dv) \right] = 0$$

$$(1+v) dx + (1-v)(v dx + x dv) = 0$$

$$(1+v+v^2-v^2) dx + (1-v)x dv = 0$$

$$(1+2v-v^2) dx = -x(1-v) dv$$

$$\frac{(1-v) dv}{1+2v-v^2} = \frac{-dx}{x} \quad \frac{1}{2} \ln(1+2v-v^2) = -\ln x + \ln c$$

$$\ln(1+2v-v^2) = \ln \frac{c}{x}$$

$$\sqrt{1 + \frac{2y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{c}{x}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$1) J' = \frac{2\alpha J + J^2}{\alpha^2}$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{2\alpha(\alpha V) + (\alpha V)^2}{\alpha^2}$$

$$dJ = \frac{2\alpha^2 V + \alpha^2 V^2}{\alpha^2} d\alpha$$

$$dJ = \frac{\alpha^2(2V + V^2)}{\alpha^2} d\alpha$$

$$dJ = V d\alpha + \alpha dV \quad \underline{L} \quad \frac{dJ}{d\alpha} = V + \alpha V'$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 2V + V^2$$

$$V + \alpha V' = 2V + V^2$$

$$\alpha V' = V + V^2$$

$$\frac{dV}{V(1+V)} = \frac{d\alpha}{\alpha}$$

$$\int \frac{A dV}{V} + \int \frac{B dV}{V+1} = \int \frac{d\alpha}{\alpha}$$

$$\underline{A \ln V + B \ln(V+1) = \ln \alpha + \ln c}$$

معادلاتی که قابل تبدیل به معادلات هگن باشند:

هر معادله‌ای که به فرم $J' = f\left(\frac{a\alpha + bJ + c}{a'\alpha + b'J + c'}\right)$ باشد قابل تبدیل به یک

معادله هگن می‌باشد برای این منظور در صورت زیر را در نظر می‌گیریم و در هر صورت بررسی

حل را برای هر آن بررسی می‌نمایم.

با توجه به این که صورت را به فرم عبارت داخل f در خط مستند را حالت زیر را در نظر

می‌گیریم $a\alpha + bJ + c$ موازی باشند b (در خط متقاطع باشند)

$$\text{موازی} \Rightarrow ab' - a'b = 0$$

$$\text{موازی} \Rightarrow ab' - ba' \neq 0$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

الف) $ab' - ba' = 0$

شرط معادلی بودن

$$a'x + b'y = k(ax + by)$$

$$ax + by = u$$

$$\Rightarrow a + bj' = u'$$

$$\rightarrow \begin{cases} j' = \frac{u' - a}{b} \text{ I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} j' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \text{ II} \end{cases}$$

$$\text{I, II} \Rightarrow \frac{u' - a}{b} = f\left(\frac{u + c}{ku + c'}\right)$$

$$u' = bf\left(\frac{u + c}{ku + c'}\right) + a$$

$$u' = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} = f(u)$$

$$\frac{du}{f(u)} = dx$$

$$\int \frac{du}{f(u)} = \int dx$$

مثال

EX: $j' = \frac{x + ry + a}{rx + ry - r}$

$$x + ry = u$$

$$1 + ry' = u'$$

$$j' = \frac{u' - 1}{r}$$

$$\frac{u' - 1}{r} = \left(\frac{u + a}{ru - r}\right)$$

$$u' = \frac{ru + 1a}{ru - r} + 1$$

$$u' = \frac{ru + 1a + ru - r}{ru - r}$$

$$u' = \frac{ru + r}{ru - r} = \frac{r(u + 1)}{r(u - r)}$$

$$u' = \frac{ru + r}{u - r}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{ru + r}{u - r}$$

$$\frac{u - r}{ru + r} du = dx$$

$$\int \frac{u - r}{ru + r} du = \int dx$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\int \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{ru+r} \right) du = \int dx$$

$$\begin{array}{r|l} u-r & ru+r \\ -u+1 & r \\ \hline -r & \end{array}$$

$$\int \frac{1}{r} du - r \int \frac{r}{ru+r} du = \int dx$$

$$\frac{1}{r} u - r \ln(ru+r) = x + C$$

$$\frac{1}{r} (x+rj) - r \ln(r(x+rj)+r) = x + C$$

$$\text{EX: } j' = \frac{rx-j+\omega}{2x-rj-1}$$

$$rx-j = u$$

$$u' = \frac{ru-v}{ru-1}$$

$$r-j' = u'$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{ru-v}{ru-1}$$

$$j' = r - u'$$

$$\left(\frac{ru-1}{ru-v} \right) du = dx$$

$$r - u' = \left(\frac{u+\omega}{ru-1} \right)$$

$$\begin{array}{r|l} ru-1 & ru-v \\ ru-\omega & r \\ \hline -1+\frac{\omega}{r} = \frac{\omega-r}{r} = \frac{11}{r} & \end{array}$$

$$u' = -\left(\frac{u+\omega}{ru-1} \right) + r$$

$$u' = \frac{-u-\omega+ru-r}{ru-1}$$

$$\int \left(\frac{r}{r} + \frac{11}{ru-v} \right) du = \int dx$$

$$\int \frac{r}{r} du + \int \frac{11/r}{ru-v} du = \int dx$$

$$\frac{r}{r} u + \frac{11}{r} \ln |ru-v| = x + C$$

$$\frac{r}{r} (rx-j) + \frac{11}{r} \ln |rx-rj-v| = x + C$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

تمرین ۱:
معادلات هین زیر را حل کنید.
 $(x^r + y^r) dx + 2xy dy = 0$ $y = xv \quad dy = v dx + x dv$

$$(x^r + x^r v^{2r}) dx + 2x \cdot xv (v dx + x dv) = 0$$

$$(x^r + x^r v^{2r}) dx + (2x^2 v)(v dx + x dv) = 0$$

$$(1 + v^{2r}) dx + 2v(v dx + x dv) = 0$$

$$(1 + v^{2r}) dx + 2v^2 dx + 2vx dv = 0$$

$$(1 + v^{2r} + 2v^2) dx + 2vx dv = 0$$

$$(1 + v^{2r}) dx + 2vx dv = 0 \quad 1 + v^{2r} dx = -2vx dv$$

$$\frac{dx}{-2x} = \frac{v dv}{1 + v^{2r}} \quad \begin{cases} 1 + v^{2r} = u \\ du = 2v dv \\ \frac{1}{2} du = v dv \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{du}{u} \rightarrow -\frac{1}{2} \ln x + \ln C = \frac{1}{2} \ln u$$

$$-\frac{1}{2} \ln Cx = \frac{1}{2} \ln(1 + v^{2r}) \quad \ln Cx = -\frac{1}{2} \ln(1 + v^{2r})$$

$$\ln Cx = -\frac{1}{2} \ln\left(1 + v^{2r}\right)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$r) \quad x' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \quad \begin{cases} y' = y + y'x \\ y = xy' \end{cases}$$

$$x(y + y'x) = \sqrt{x^2 - x^2 y'^2} + xy'$$

$$x(y + y'x) = \sqrt{x^2(1 - y'^2)} + xy'$$

$$x(y + y'x) = x\sqrt{1 - y'^2} + xy'$$

$$y + y'x = \sqrt{1 - y'^2} + y'$$

$$y'x = \sqrt{1 - y'^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot x = \frac{\sqrt{1 - y'^2}}{1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y'^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y'^2}} \quad \ln x + C = \text{Arc sin } y'$$

$$\ln xC = \text{Arc sin } y' \quad e^{\text{Arc sin } y'} = xC$$

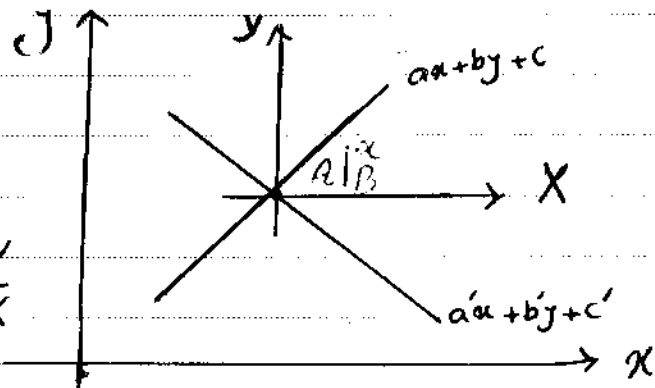
$$Cx = e^{\text{Arc sin } (\frac{y}{x})}$$

ب) معادلات به متوان به معادلات همگن تبدیل کرد. (صامت متقاطع)

اگر در خط متقاطع باشند بنا براین در نقطه ای همدیگر را قطع می کنند. مبدأ را محل

برخورد منتقل می کنیم. در دستگاه جدید معادله بدست آمده یک معادله همگن است.

$$y' = f\left(\frac{ay + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$



$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$EX = J' = \frac{\alpha + J - r}{\alpha - J + r} \quad \text{ob' } a'b \neq 0 \quad \text{قسطی}$$

$$(1)(-1) - (1)(1) \neq 0 \Rightarrow -r \neq 0 \quad \text{قسطی}$$

$$\begin{cases} \alpha + J - r = 0 \\ \alpha - J + r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 2\alpha + r = 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \alpha = -1 \\ J = r \end{matrix}} \Rightarrow A/r \Rightarrow \begin{cases} \alpha = X-1 \\ J = Y+r \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X-1) + (Y+r) - r}{(X-1) - (Y+r) + r} = \frac{X-1+Y+r-r}{X-1-Y-r+r} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

$$\begin{cases} Y = Xv \\ \frac{dY}{dX} = v + X \frac{dv}{dX} \end{cases}$$

$$v + X \frac{dv}{dX} = \frac{X + Xv}{X - Xv} = \frac{1+v^2}{1-v} \quad v + X \frac{dv}{dX} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$X \frac{dv}{dX} = \frac{1+v^2}{1-v} - v^2 \quad X \frac{dv}{dX} = \frac{1+v^2 - v^2 + v^2}{1-v} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$X \frac{dv}{dX} = \frac{1+v^2}{1-v} \quad \frac{dX}{X} = \frac{(1-v)}{1+v^2} dv$$

$$\int \frac{1}{1+v^2} dv - \int \frac{v}{1+v^2} dv = \int \frac{dX}{X}$$

$$\arctan v - \frac{1}{2} \ln(1+v^2) = \ln cX$$

$$\arctan \frac{Y}{X} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\right) = \ln cX$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\text{arc tg } \frac{y-r}{x+1} - \frac{1}{r} \ln \left(1 + \left(\frac{y-r}{x+1} \right)^2 \right) = \ln C (x+1)$$

نذر چهارم: بعضی از معادلات با تغییر متغیر $y = z^\alpha$

$$dy = \alpha z^{\alpha-1} dz \quad \text{برای } \alpha \text{ مناسب قابل تفکیک یک معادله هست می باشد}$$

در این گونه معادلات چنانچه α موجود باشد پس پیدا کردن α با رعایت شرط هست معادله

حل می کنیم
مثال:

$$1) (x^r y^r - 1) dy + r x y^r dx = 0$$

$$y = z^\alpha \Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$$

$$(x^r z^{r\alpha} - 1) \alpha z^{\alpha-1} dz + r x z^{r\alpha} dx = 0$$

$$\alpha (x^r z^{r\alpha-1} - z^{\alpha-1}) dz + r x z^{r\alpha} dx = 0$$

$$r + r\alpha x = \alpha x \quad -r\alpha = r \quad \underline{\alpha = -1}$$

$$(-1)(x^r z^{-r} - z^{-r}) dz + r x z^{-r} dx = 0 \quad \times x z^r$$

$$(x^r - z^r) dz - r x z dx = 0 \quad \begin{cases} z = uv \\ dz = u dv + v du \end{cases}$$

$$(u^r - (uv)^r) \alpha dv + v du - r u (uv) du = 0$$

$$(x^r - x^r v^r) u dv + v du - r x^r v du = 0$$

$$(x^r - x^r v^r)(\alpha dv + v du) - r x^r v du = 0$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$(1-v^r)(\alpha dv + v dx) - r v dx = 0$$

$$\int \frac{(1-v^r)}{v+v^r} dv = \ln c \alpha$$

$$\int \frac{1-v^r}{v(1+v^r)} dv = \ln c \alpha$$

$$\int \frac{A dv}{v} + \int \frac{B v + C}{1+v^r} dv = \ln c \alpha$$

$$EX: (x + rj + r) dx - (rx - j + r) dj = 0$$

$$(x + rj + r) dx = (rx - j + r) dj$$

$$(x + rj + r) = (rx - j + r) \frac{dj}{dx}$$

$$\frac{dj}{dx} = \frac{x + rj + r}{rx - j + r}$$

$$ab' - ba' \neq 0 \quad (1)(-1) - r(r) = -2 \neq 0$$

integration

$$\begin{cases} x + rj + r = 0 \\ rx - j + r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + rj + r = 0 \\ rx - j + r = 0 \end{cases}$$

$$2x + 11 = 0$$

$$2x = -11 \quad x = \frac{-11}{2}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

معادلات کامل: معادله $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ کامل نامیده می شود اگر

تابعی مانند $u(x, y) = C$ یافت شود به طوری که $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$$

تفصیل: معادله $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ معادله کامل است اگر و فقط اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\text{EX: } (x^2 + 2y)dx + (2x + 2y)dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2$$

روش حل معادلات کامل: اگر معادله $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ معادله کامل باشد به ترتیب:

تعریف معادلات کامل تابعی مانند $u(x, y) = C$ یافت می شود به طوری که:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int P(x, y) dx + g(y)$$

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + g'(y)$$

$$Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx = g'(y)$$

$$g'(y) = \int (Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx) dy$$

Subject:

Year. 200 Month. $\frac{du}{dx}$ Day.

$$Ex: \underbrace{(x^2 + y)}_{\frac{\partial u}{\partial x}} dx + \underbrace{(y^2 + x)}_{\frac{\partial u}{\partial y}} dy = 0$$

شرط بودن $\left\{ \frac{\partial P}{\partial y} = 2 = \frac{\partial Q}{\partial x} \right.$ کامل است.

$$u(x, y) = \int (x^2 + y) dx + g(y)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{3} x^3 + x y + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + g'(y) \Rightarrow y^2 + x = x + g'(y)$$

$$g'(y) = y^2 \quad \int g'(y) = \int y^2 \Rightarrow g(y) = \frac{1}{3} y^3$$

$$u(x, y) = \frac{1}{3} x^3 + x y + \frac{1}{3} y^3 \quad \text{جواب}$$

$$Ex: (x^2 + x y^2) dx + (x^2 y + y^3) dy = 0$$

شرط بودن $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \Rightarrow$ کامل است

$$u(x, y) = \int (x^2 y + y^3) dy + g(x) = \frac{1}{3} x^2 y^3 + \frac{1}{4} y^4 + g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{3} x y^3 + g'(x) = x y^2 + g'(x)$$

$$x^2 + x y^3 = x y^2 + g'(x) \Rightarrow g'(x) = x^2 \Rightarrow \int g'(x) = \int x^2 dx$$

$$g(x) = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{3} x^2 y^3 + \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{3} x^3 + C$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$EX: \overbrace{(\sin xy + xy \cos xy)}^{\frac{du}{dx}} dx + \overbrace{(x^2 \cos xy)}^{\frac{du}{dy}} dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos xy + x \cos xy + (-x) \sin xy \cdot (x)$$

$$= x \cos xy + x \cos xy - x^2 \sin xy = 2x \cos xy - x^2 \sin xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cos xy + (-y) \sin xy \cdot (x^2) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{کامل است.}$$

$$u(x, y) = \int (x^2 \cos xy) dy + g(x) = x^2 \times \frac{1}{x} \sin xy + g(x) = x \sin xy + g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \sin xy + y \cos xy (x) + g'(x) = \sin xy + xy \cos xy + g'(x)$$

$$\cancel{\sin xy} + xy \cancel{\cos xy} = \cancel{\sin xy} + xy \cancel{\cos xy} + g'(x) \quad g'(x) = 0$$

$$g(x) = C \Rightarrow \underline{u(x, y) = x \sin xy + C}$$

$$EX: \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x \right) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \frac{1}{x}$$

چون شرط برقرار است معادله کامل میباشد

$$\sec^r x = (1 + \tan^r x)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$u = \int (\sqrt{1+x^2} + x^r + \ln x) dy + g(x)$$

$$u = y\sqrt{1+x^2} + x^r y - y \ln x + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} + rxy - \frac{y}{x} + g'(x) = \frac{yx}{\sqrt{1+x^2}} + rxy - \frac{y}{x} + g'(x)$$

$$\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + rxy - \frac{y}{x} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + rxy - \frac{y}{x} + g'(x) \quad g'(x) = 0 \quad g(x) = C$$

$$u = y\sqrt{1+x^2} + x^r y - y \ln x + C$$

$$EX: (x^r \tan y - \frac{y^r}{x^r}) dx + (x^r \sec^r y + xy^r + \frac{y^r}{x^r}) dy = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = r x^r (1 + \tan^r y) - \frac{r}{x^r} \cdot y^r = r x^r (1 + \tan^r y) - \frac{r}{x^r} y^r$$

$$\frac{dq}{dx} = x^r \sec^r y - \frac{y^r \cdot x}{x^r} = x^r (1 + \tan^r y) - \frac{y^r}{x^r}$$

ست
مساواة

$$u = \int (x^r \tan y - \frac{y^r}{x^r}) dx + g(y) = \tan y \cdot \frac{r}{r+1} x^{r+1} - \int y^r \cdot x^{-r} + g(y)$$

$$x^r \tan y - \frac{y^r}{-r} x^{-r} = x^r \tan y + \frac{y^r}{x^{+r}} + g(y)$$

$$u = x^r \tan y + \frac{y^r}{x^r} + g(y)$$

$$\frac{du}{dy} = x^r (1 + \tan^r y) + \frac{1}{x^r} x^r y^r + g'(y) = x^r (1 + \tan^r y) + \frac{y^r}{x^r} + g'(y)$$

$$x^r \sec^r y + xy^r + \frac{y^r}{x^r} = x^r (1 + \tan^r y) + \frac{y^r}{x^r} + g'(y)$$

$$g'(y) = y^r \Rightarrow \int g'(y) = \int y^r \quad g(y) = \frac{r}{r+1} y^{r+1} = y^r$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$u = x^2 + y^2 + \frac{y^2}{x^2} + y^2 + C$$

فاکتورهای انتگرال:

اگر معادله $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ تابع کامل نباشد و تابع $P(x, y)$

یافت شود، طوری که ضرایب این تابع علاوه بر معادله ضرب کنیم معادله به یک معادله کامل تبدیل

شود در این صورت $P(x, y)$ را یک فاکتور انتگرال یا یک عامل انتگرال ساز می نامیم.

مثال: نشان دهید تابع $P(x, y) = \frac{1}{x^2}$ یک تابع فاکتور انتگرال معادله

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad (x + y^2) dx - 2xy dy = 0 \quad \text{میباشد.}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \quad \frac{1}{x^2} [(x + y^2) dx - 2xy dy] = 0$$

$$\left(\frac{x}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) dx - \frac{2xy}{x^2} dy = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right) dx - \frac{2y}{x} dy = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \times 2y = \frac{2y}{x^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^2} \end{array} \right\} = \text{معادله به کامل تبدیل شد}$$

روش های پیدا کردن فاکتورهای انتگرال:

اگر معادله $P(x, y) + Q(x, y) = 0$ معادله کامل نباشد در حالات زیر می توان فاکتور انتگرال

برای آن پیدا کرد $P(x, y) + Q(x, y) = 0 \Rightarrow$ کامل نباشد $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

طابق اول: $\Rightarrow \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x)$ کابل نیست

فانتورانتگرال $f(x, y) = e^{\int f(x) dx}$

EX: $\overbrace{(x+y^2)}^P dx - \overbrace{2xy}^Q dy = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \end{array} \right. \Rightarrow$ کابل نیست

$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{-2xy} (2y + 2y) = \frac{2y}{-2xy} = \frac{-2}{x}$

فانتورانتگرال $f(x, y) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \int \frac{1}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln x^{-2}}$

$= x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

EX: $\overbrace{(x^2 \ln x - 2xy^2)}^P dx + \overbrace{(2x^2 y^2)}^Q dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2$ کابل نیست

$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{2x^2 y^2} (-2xy^2 - 2xy^2) = \frac{1}{2x^2 y^2} (-4xy^2) =$

$\frac{-4xy^2}{2x^2 y^2} = \frac{-2}{x}$

$f(x, y) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \int \frac{1}{x} dx} = e^{-2 \ln x}$

$e^{\ln x^{-2}} = e^{\log_e x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

طایفه فاکتور استرال $\frac{1}{x^r}$ معادله تبدیل به کسری کنیم.

$$\frac{1}{x^r} \left[(x^r \ln x - r x J^r) dx + (r x^r J^r dy) \right] = 0$$

$$\left(\frac{x^r \ln x}{x^r} - \frac{r x J^r}{x^r} \right) dx + \left(\frac{r x^r J^r}{x^r} \right) dy = 0$$

$$\left(\ln x - \frac{r J^r}{x^r} \right) dx + \left(\frac{r J^r}{x^r} \right) dy = 0$$

$$u = \int \frac{r J^r}{x^r} dy + g(x) = \frac{r}{x^r} \times \frac{1}{r} \cdot J^r + g(x) = \frac{J^r}{x^r} + g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{r x \cdot J^r}{x^r} + g'(x) = -\frac{r J^r}{x^r} + g'(x)$$

$$\cancel{\ln x} - \cancel{\frac{r J^r}{x^r}} = -\cancel{\frac{r J^r}{x^r}} + g'(x) \quad g'(x) = \ln x$$

$$g(x) = \int \ln x = x \ln x - x + C$$

$$u = \frac{J^r}{x^r} + x \ln x - x + C \quad \text{جاب نهایی}$$

EX: یک فاکتور استرال برای معادله زیر پیدا کنید.

$$(r x^r J + r J + 1) dx + (r x^r + r x) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = r x^r + r \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = r x^r + r \quad \rightarrow \quad \text{کامل نیست}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (r x^r + r) - (r x^r + r) = -r x^r$$

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{r x^r + r x} (-r x^r) = \frac{-r x^r}{r x (x^r + 1)} = \frac{-r x}{1 + x^r}$$

$$\text{فاکتور استرال: } f(x, y) = e^{\int L(x) dx} = e^{\int \frac{-r x}{1+x^r} dx} = e^{-\int \frac{r x}{1+x^r} dx} = e^{-\ln(1+x^r)} = \frac{1}{1+x^r}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

حالت دوم: اگر معادله $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ کامل نباشد و راسته

باشد $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x)$ در آن صورت فاکتور انتگرال می شود

$$f(x, y) = e^{\int f(x) dy}$$

EX: باید اکبرون فاکتور انتگرال معادله زیر را حل غاشید.

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (y - 4xy^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 9y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -4y^2$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = (4xy - 9y^2) - (-4y^2) = 4xy - 9y^2 + 4y^2 = 4xy - 5y^2$$

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{2xy^2 - 3y^3} (4xy - 5y^2) = \frac{2y(2x - 3y)}{y^2(2x - 3y)} = \frac{2y}{y^2} = \frac{2}{y}$$

$$f(x, y) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2 \int \frac{dy}{y}} = e^{-2 \ln y} = e^{-\ln y^2} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

حال فاکتور انتگرال را در معادله ضرب می کنیم.

$$\frac{1}{y^2} [(2xy^2 - 3y^3)dx + (y - 4xy^2)dy] = 0$$

$$(2x - 3y)dx + \left(\frac{y}{y^2} - 4x \right)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -4 \rightarrow \text{کامل می باشد}$$

$$u(x, y) = \int (2x - 3y)dx + g(y) = \frac{2}{2}x^2 - 3xy + g(y)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha^2 + g'(y) \quad \frac{y}{y^2} - \alpha^2 = -\alpha^2 + g'(y)$$

$$g'(y) = \frac{y}{y^2} \Rightarrow \int g'(y) = \int \frac{y}{y^2} dy \quad g(y) = -\frac{y}{y} + c$$

$$u(x, y) = \alpha^2 - \alpha^2 y - \frac{y}{y} + c$$

باید کردن تا انتگرال معادله زیری حل باشد

$$(\alpha^2 y \ln y) dx + (\alpha^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\alpha^2 \ln y) + \left(\frac{1}{y} \cdot \alpha^2 y\right) = \alpha^2 \ln y + \alpha^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \alpha^2 \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha^2 \ln y + \alpha^2) - (\alpha^2) = \alpha^2 \ln y$$

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{\alpha^2 y \ln y} \cdot \alpha^2 \ln y = \frac{1}{y}$$

$$f(x) = e^{-\int f(y) dy} = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} \left[(\alpha^2 y \ln y) dx + (\alpha^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy \right] = 0$$

$$(\alpha^2 \ln y) dx + \left(\frac{\alpha^2}{y} + y \sqrt{y^2 + 1} \right) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\alpha^2}{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\alpha^2}{y} \Rightarrow \text{کامل است}$$

$$u(x, y) = \int \alpha^2 \ln y + g(y) = \alpha^2 \ln y + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\alpha^2}{y} + g'(y) \Rightarrow \frac{\alpha^2}{y} + y \sqrt{y^2 + 1} = \frac{\alpha^2}{y} + g'(y)$$

$$g'(y) = y \sqrt{y^2 + 1}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$g'(j) = \frac{1}{j} \times j \sqrt{j^2 + 1} \quad g(j) = \frac{1}{j} \cdot \frac{2}{3} (j^2 + 1)$$

$$\Rightarrow u(m, j) = \alpha^2 L_2 j + \frac{1}{j} (j^2 + 1)$$

حالت سیم: معادله $p(m, j) dx + Q(m, j) dj = 0$ کامل نباشد. فرض می‌کنیم فاکتور انتگرال

به شکل $p(m, j) = \alpha^\alpha j^\beta$ این فاکتور را در معادله ضرب می‌کنیم پس شرط کامل

بودن لایبرس می‌کنیم اگر برای α و β جواب حقیقی بدست آید در این صورت معادله

این روش قابل حل میباشد

$$EX: j(2 - 3\alpha j) dx - \alpha dj = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial j} = 2 - 3\alpha j \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -1$$

$$\frac{\partial p}{\partial j} - \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 2 - 3\alpha j$$

$$\xrightarrow{\alpha^\alpha j^\beta} j(2 - 3\alpha j) dx - \alpha dj = 0 \Rightarrow (2j - 3\alpha j^2) dx - \alpha j dj = 0$$

$$\Rightarrow (2\alpha^\alpha j^{\beta+1} - 3\alpha^{\alpha+1} j^{\beta+2}) dx - (\alpha^{\alpha+1} j^\beta) dj = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial j} - \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{شرط کامل بودن} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial j} = \frac{\partial Q}{\partial \alpha}$$

$$2\alpha^\alpha (\beta+1) j^\beta - 3\alpha^{\alpha+1} (\beta+2) j^{\beta+1} = -(\alpha+1) \alpha^\alpha j^\beta$$

$$2(\beta+1) \alpha^\alpha j^\beta - 3(\beta+2) \alpha^{\alpha+1} j^{\beta+1} = -(\alpha+1) \alpha^\alpha j^\beta$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\begin{cases} 2\beta + 2 = -(\alpha + 1) \\ 2 + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = -\alpha - 1 \\ \beta = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases} \quad f(x, y) = x y^{-2}$$

با استفاده از فاکتورانتگرال معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y(y^2 - 2x^2)dx + x(2y^2 - x^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y^2 - 2x^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y^2 - 2x^2$$

$$\xrightarrow{x^\alpha y^\beta} x \left\{ (y^3 - 2x^2 y) dx + (2xy^2 - x^3) dy = 0 \right\}$$

$$(x^\alpha y^{\beta+3} - 2x^{\alpha+2} y^{\beta+1}) dx + (2x^{\alpha+1} y^{\beta+2} - x^{\beta+3} y^\alpha) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$(\beta+3)x^\alpha y^{\beta+2} - 2(\beta+1)x^{\alpha+2} y^\beta = 2(1+\alpha)x^\alpha y^{\beta+2} - (\alpha+3)x^{\alpha+2} y^\beta$$

$$\begin{cases} \beta+3 = 2(1+\alpha) \\ (\alpha+3) = 2(\beta+1) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta+3 = 2+2\alpha \\ \alpha+3 = 2\beta+2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ (-\alpha + 2\beta = 1) \times 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ -2\alpha + 4\beta = 2 \\ + \quad \beta = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{matrix}$$

$$f(x, y) = xy \quad \text{فاکتورانتگرال گیری}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

معادلات خطی مرتبه یک: هر معادله که به فرم $A(x) \frac{dy}{dx} + B(x)y + C(x) = 0$

معادله خطی مرتبه 1 است. برای حل آن ابتدا آن را به فرم استاندارد درمی آوریم و سپس

در روش معادلات کامل فاکتور انگرال برای آن پیدا می کنیم و معمولاً وقتی حل آن آسان می کنیم

$$\frac{1}{A(x)} \left[A(x) \frac{dy}{dx} + B(x)y + C(x) \right] = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{B(x)}{A(x)}y = \frac{-C(x)}{A(x)} \rightarrow y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{فرم استاندارد}$$

هنگامی است که روش جدایش پذیری
حل می شود.

حال اگر $Q(x) = 0 \rightarrow y' + P(x)y = 0$

روش کلی حل آسان می کنیم $Q(x) \neq 0 \rightarrow$

$$y' + P(x)y = Q(x) \xrightarrow{\times dx} \left[\frac{dy}{dx} \times dx \right] + P(x) \cdot y \cdot dx = Q(x) \cdot dx$$

$$P(x)y dx - Q(x) dx + dy = 0 \rightarrow \underbrace{(P(x)y - Q(x)) dx}_P + \underbrace{dy}_Q = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = P(x) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = P(x) \rightarrow \text{فاکتور انگرال گیری} \quad f(x, y) = e^{\int P(x) dx}$$

$$y' e^{\int P(x) dx} + P(x)y e^{\int P(x) dx} = Q(x) e^{\int P(x) dx}$$

$$\rightarrow \int \frac{d}{dx} \left(y e^{\int P(x) dx} \right) = \int Q(x) e^{\int P(x) dx}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\Rightarrow \int p(x) dx = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

$$J = e^{-\int p(x) dx} \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx$$

نیز می توان نوشت

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$J' + J = e^x$$

نیز می توان نوشت

$$J = e^{-\int 1 dx} \int e^{\int 1 dx} e^x dx = e^{-x} \int e^x \cdot e^x dx = e^{-x} \int e^{2x} dx$$

$$= e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C \right) = \frac{1}{2} e^x + C e^{-x}$$

$$\tan x J' + J = x \sec x$$

مثال:

$$\frac{1}{\tan x} [\tan x J' + J = x \sec x]$$

$$J' + \frac{J}{\tan x} = \frac{x \sec x}{\tan x}$$

$$J' + J \cot x = x \csc x$$

$$J = e^{-\int \cot x \cdot dx} \int e^{\int \cot x \cdot dx} \cdot x \csc x \cdot dx =$$

$$J = e^{-\ln |\sin x|} \int e^{\ln |\sin x|} x \cdot \csc x \cdot dx =$$

$$\frac{1}{\sin x} \int \sin x \cdot \left(x \times \frac{1}{\sin x} \right) dx = \frac{1}{\sin x} \left(\frac{x^2}{2} + C \right)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

تذکره: اگر در معادله ای α تابعی از J باشد نقش α در J عوض می شود در این گونه معادلات

معادلات بهر حسب α مرتب می کنیم سپس از روش حل معادلات خطی مرتب 1 استفاده

می کنیم.

$$\alpha' + p(J) \alpha = q(J)$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{dJ}} \rightarrow \alpha = e^{-\int p(J) dJ} \int e^{\int p(J) dJ} q(J) dJ$$

EX: $J' = \frac{J}{\alpha + J^2}$ $\xrightarrow{\text{معکوس می کنیم}}$ $\alpha' = \frac{\alpha + J^2}{J}$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{J} + \frac{J^2}{J} \quad \alpha' - \frac{\alpha}{J} = J$$

$$\rightarrow \alpha = e^{\int \frac{1}{J} \cdot dJ} \int e^{-\int \frac{1}{J} \cdot dJ} \cdot J^2 \cdot dJ =$$

$$\alpha = e^{\ln J} \int e^{-\ln J} \cdot J^2 d\alpha = J \left(\frac{J^2}{2} + C \right)$$

مصادره یفراین زیر را ص غایتید.

$$(1+J^2) d\alpha - (\sqrt{1+J^2} \cos J - \alpha J) dJ = 0$$

$$(1+J^2) d\alpha = (\alpha J - \sqrt{1+J^2} \cos J) dJ$$

$$1+J^2 = J' (\alpha J - \sqrt{1+J^2} \cos J) \Rightarrow J' = \frac{1}{\alpha'}$$

$$\alpha' (1+J^2) = \alpha J - \sqrt{1+J^2} \cos J$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$x' = \frac{xJ}{1+J^2} - \frac{\sqrt{1+J^2}}{1+J^2} \cos J \quad x' = \frac{J}{1+J^2} x = \frac{-\cos J}{\sqrt{1+J^2}}$$

$$x = e^{-\int p(J) dJ} \int e^{\int p(J) dJ} q(J) dJ \rightarrow$$

$$x = -e^{-\frac{1}{2} \int \frac{2J}{1+J^2} dJ} \int e^{\frac{1}{2} \int \frac{2J}{1+J^2} dJ} \frac{\cos J}{\sqrt{1+J^2}} dJ = -e^{-\ln(1+J^2)} \int \cos J dJ$$

$$x = -(1+J^2)(\sin J + C)$$

معادلاتی که قابل تبدیل به معادله خطی مرتبه یک می باشد:

۱- معادله برنولی: هر معادله ای که برضیم $J^n (n \neq 0, 1) J' + p(n)J = q(n)J^n$ باشد

معادله برنولی نامیده می شود برای حل آن با انتخاب متغیر مناسب می توان آن را به یک

معادله خطی تبدیل کرد. سپس حل نمود.

$$J^n \div \text{طرفین معادله} \Rightarrow \frac{J'}{J^n} + \frac{p(n)J}{J^n} = \frac{q(n)J^n}{J^n}$$

$$\Rightarrow J' J^{-n} + p(n) J^{1-n} = q(n) \quad (I)$$

$$J^{1-n} = u \Rightarrow u' = (1-n) J' J^{-n} \quad (II)$$

$$(I) \Rightarrow \frac{u'}{1-n} + p(n)u = q(n) \quad u' + (1-n)p(n)u = (1-n)q(n)$$

$$u' + p(n)u = Q(n) \quad \text{خطی مرتبه ۱ بر حسب } u$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$J' - J = \alpha J^r \quad \text{مسال 1}$$

$$\div J^r \Rightarrow \frac{J'}{J^r} - \frac{J}{J^r} = \frac{\alpha J^r}{J^r} \Rightarrow J J^{-r} - J^{1-r} = \alpha$$

$$J J^{-r} - J^{1-r} = \alpha \quad \text{I} \quad \begin{cases} J^{-r} = u \\ u' = -J' J^{-r} \end{cases} \quad \text{II}$$

$$\text{I, II} \Rightarrow -u' - u = \alpha \Rightarrow \underline{u' + u = -\alpha} \quad \text{خط ترتیب 1}$$

$$\Rightarrow u = e^{-\int dx} \int e^{\int dx} (-\alpha) dx = e^{-x} \int e^x (-\alpha) dx = ?$$

بقیه اصل کنیم

$$r \alpha J' - r J = \frac{\alpha^r}{J^r} \quad \text{مسال 12}$$

$$\div r \alpha \Rightarrow \frac{r \alpha J'}{r \alpha} - \frac{r J}{r \alpha} = \frac{\alpha^r}{r \alpha J^r} \Rightarrow J' - \frac{r J}{r \alpha} = \frac{\alpha^r}{r J^r}$$

$$\times J^r \Rightarrow J J^r - \frac{r J^r}{r \alpha} = \frac{\alpha^r}{r} \quad \text{I}$$

$$\begin{cases} J^r = u \Rightarrow r J^r J' = u' \quad \text{II} \\ \frac{u'}{r} = J J' \end{cases}$$

$$\text{I, II} \Rightarrow \frac{u'}{r} - \frac{r}{r \alpha} u = \frac{1}{r} \alpha^r \xrightarrow{\times r} \underline{u' - \frac{r}{\alpha} u = \alpha^r} \quad \text{خط ترتیب 2}$$

$$\Rightarrow u = e^{\int -\frac{r}{\alpha} dx} \int e^{\int \frac{r}{\alpha} dx} (\alpha^r) dx =$$

$$= e^{r \ln \alpha} \int e^{-r \ln \alpha} (\alpha^r) dx = \alpha^r \int \frac{1}{\alpha^r} \alpha^r dx = \alpha^r \int dx =$$

$$= \alpha^r (x + C)$$

$$\underline{J^r = \alpha^r + C \alpha^r}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

تذکرہ: اگر دو متغیر جبرونی شکل معادله ہو تو ہم $\frac{dx}{dy} + x f(y) = x^n g(y)$ اسدین
نقش x و y عوض شدہ باشد ابتدا طرفین را بر x^n تقسیم می کنیم آنگاه x^{1-n} و y را

$$J' = \frac{2x^r}{x^r + J + 1} \cdot \frac{1}{x^r} = \frac{2x^r}{x^r + J + 1} \Rightarrow 2x^r x' = x^r + J + 1$$

$$2x^r x' - x^r = J + 1 \quad u' - u = (J + 1) \quad \begin{cases} x^r = u \\ 2x^r x' = u' \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = e^{\int dy} \left(\int e^{-\int dy} (J + 1) dy \right) \Rightarrow$$

$$x^r = e^J \left(\int e^{-J} (J + 1) dy \right) = e^J \int (J e^{-J} + e^{-J}) dy =$$

$$x^r = e^J (J e^{-J} - 2e^{-J} + C) \quad \text{جواب آخر}$$

$$J' = \frac{2xJ}{x^r - J^2 - K} \cdot \frac{1}{x^r} = \frac{2xJ}{x^r - J^2 - K} \quad 2x x' J = x^r - J^2 - K$$

$$\div J \rightarrow 2x x' = \frac{x^r}{J} - J - \frac{K}{J} \quad 2x x' = \frac{x^r}{J} - \frac{(J^2 + K)}{J}$$

$$\begin{cases} x^r = u \\ 2x x' = u' \end{cases} \rightarrow u' - \frac{1}{J} u = -\frac{J^2 + K}{J}$$

$$u = e^{\int \frac{1}{J} dy} \left(- \int e^{-\int \frac{1}{J} dy} \left(\frac{J^2 + K}{J} \right) dy \right) \rightarrow x^r = J \left(- \int \frac{J^2 + K}{J} dy \right)$$

$$x^r = J \left(-J + \frac{K}{J} + C \right) \quad \text{جواب آخر}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$(۲) \text{ معادله ریاضیاتی: هر معادله به فرم } (P_1(x) \neq 0) \quad J' + P_1(x)J^2 + P_2(x)J + P_3(x) = 0$$

باشد معادله ریاضیاتی نامیده می شود

در صورتیکه یک جواب خصوصی آن باشد $J_1 = P_1(x)$ در اختیار باشد جواب عمومی آن

به فرم $J = J_1 + \frac{1}{Z}$ در نظریه گریم ریس به شکل زیر Z را اصل معادله خط مرتبه

یک زیر بدست می آوریم.

$$J = J_1 + \frac{1}{Z} \rightarrow J' = J_1' + \frac{Z'}{Z^2}$$

$$J_1' - \frac{Z'}{Z^2} + P_1(x)(J_1^2 + \frac{2J_1}{Z} + \frac{1}{Z^2}) + P_2(x)(J_1 + \frac{1}{Z}) + P_3(x) = 0$$

$$(\cancel{J_1' + P_1(x)J_1^2} + P_2(x)J_1 + P_3(x)) + (-\frac{Z'}{Z^2} + \frac{P_1(x)(2J_1)}{Z} + \frac{P_1(x)}{Z^2} + \frac{P_2(x)}{Z}) = 0$$

$$Z' - P_1(x)(2J_1)Z - P_1(x) - ZP_2(x) = 0$$

$$Z' - (2J_1P_1(x) + P_2(x))Z = P_1(x) \quad Z = ?$$

پس: معادله دیفرانسیل زیر را حل می نمائید

$$J' = 1 + \frac{J}{\alpha} - \frac{J^2}{\alpha^2} \quad J_1(x) = \alpha$$

$$J = J_1 + \frac{1}{Z} \Rightarrow J = \alpha + \frac{1}{Z} \Rightarrow J' = 1 - \frac{Z'}{Z^2}$$

$$1 - \frac{Z'}{Z^2} = 1 + \frac{J}{\alpha} - \frac{J^2}{\alpha^2} \rightarrow 1 - \frac{Z'}{Z^2} = 1 + (\alpha + \frac{1}{Z})\frac{1}{\alpha} - (\alpha + \frac{1}{Z})^2\frac{1}{\alpha^2}$$

$$1 - \frac{Z'}{Z^2} = \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{1}{\alpha Z} - \cancel{1} - \frac{2}{\alpha Z} - \frac{1}{Z^2\alpha^2}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$z' - \frac{1}{x} z + \frac{r}{x} z = \frac{1}{x^r}$$

$$z' + \left(\frac{1}{x}\right) z = \frac{1}{x^r} \xrightarrow{\text{ظفر رتبنازل}} z = ?$$

$$\text{EX 2)} \quad y' - r \tan x \sec x - y' \sin x \quad J_1(x) = \sec x$$

$$y' + y' \sin x - r \tan x \sec x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1(x) = \sin x \\ P_r(x) = 0 \\ P_r(x) = -r \tan x \sec x \end{array} \right.$$

$$z' - (r \sec x \times \sin x + 0) z = \sin x \longrightarrow z' - r \tan x z = \sin x$$

$$\text{ظفر رتبنازل} \quad z = e^{\int r \tan x dx} \int e^{-\int r \tan x dx} \sin x dx$$

$$= e^{-r \ln \cos x} \int e^{r \ln \cos x} \sin x dx = \frac{1}{\cos^r x} \int \cos^r x \sin x dx =$$

$$\left(\frac{-\cos^r x}{r} + C \right) \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{-1}{3} \cos x + \frac{e}{\cos^3 x}$$

تذکر: بعضی از معادلات با انتخاب متغیرها مناسب قابل تبدیل یک معادله خطی مرتبه 1

$$\underbrace{y' \cos y}_{u'} + \underbrace{\sin y}_{u} = x + 1$$

ر بایستد، طوری

$$u' + u = x + 1 \longrightarrow \sin y = e^{-\int dx} \int e^{\int dx} (x+1) dx =$$

$$= e^{-x} \int e^x (x+1) dx = e^{-x} (x e^x + e)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$xJ' + rJ = \frac{\ln x}{x^r} \quad \text{---} \quad \begin{cases} x=1 \\ J=r \end{cases}$$

$$\div x \longrightarrow J' + \frac{r}{x} J = \frac{\ln x}{x^r}$$

$$J = e^{-\int + \frac{r}{x} dx} \int e^{+\frac{r}{x} dx} \left(\frac{\ln x}{x^r} \right) dx = e^{-r \ln x} \int e^{r \ln x} \left(\frac{\ln x}{x^r} \right) dx = e^{\ln x^{-r}} \int e^{\ln x^r} \left(\frac{\ln x}{x^r} \right) dx = \frac{1}{x^r} \int x^r \left(\frac{\ln x}{x^r} \right) dx = \frac{1}{x^r} \int \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$J = \frac{1}{x^r} \left(\frac{1}{r} \ln^r(x) + C \right) \quad \text{جواب عددی}$$

$$\frac{x=1}{J=r} \longrightarrow r = \frac{1}{1} \left(\frac{1}{r} \ln^r(1) + C \right) \longrightarrow C = r$$

$$\implies J = \frac{\ln^r x}{r x^r} + \frac{r}{x^r} \quad \text{جواب نهایی}$$

$$J' + \frac{r}{x} J = r x e^{-x^r} \sqrt{J}$$

یافته

Subject:

Year. 200 Month. Day.

معادلاتی نسبت به مشتق حل نشده

۱- هر معادله‌ای بتوان J را بر حسب x یا به کمک اصطلاحاً گوییم نسبت به مشتق حل شده

در برای حل چنین معادلاتی در صورتی از حالات زیر در ریش می‌سازیم جوابی بیایمی کنیم.

حالت اول) معادله فاقد x باشد در این حالت با انتخاب $J' = p$ معادله به یک معادله

معکوس تبدیل شده به صورت زیر حل می‌شود فاقد x باشد $F(J') = 0$

$$J' = p \Rightarrow \frac{dJ}{dx} = p \rightarrow dJ = p dx \quad F(p) = 0$$

مثال:

$$J'^2 - 3J' + 2 = 0 \quad J' = p \quad p^2 - 3p + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ p = 1 \end{cases}$$

$$p = \frac{dJ}{dx} \rightarrow \begin{cases} \frac{dJ}{dx} = 2 & dJ = 2dx & | J = 2x + C_1 | \\ \frac{dJ}{dx} = 1 & dJ = dx & | J = x + C_2 | \end{cases}$$

حالت دوم) معادله فاقد x باشد:

$$F(J, J') = 0 \rightarrow J = F(J') \quad J' = p$$

$$\rightarrow \frac{dJ}{dx} = p \rightarrow dJ = p dx \quad J = F(p)$$

$$dJ = F'(p) dp \rightarrow p dx = F'(p) dp \quad dx = \frac{F'(p)}{p} dp$$

$$\Rightarrow \int dx = \int \frac{F'(p)}{p} dp$$

$$\begin{cases} J = F(p) \\ \text{جواب پارامتری} \end{cases}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

Ex: $J = j' e^{j'}$ ← تابع از j' است

$$\begin{cases} j' = p \\ dj = p dx \end{cases} \quad J = p^r e^p \rightarrow dj = (r p e^p + e^p p^r) dp$$
$$\rightarrow p dx = (r p e^p + e^p p^r) dp \xrightarrow{\div p} dx = (r e^p + e^p p) dp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \int (r e^p + e^p p) dp \\ J = p^r e^p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = r e^p + p e^p - e^p = e^p + p e^p \\ J = p^r e^p \end{cases}$$

(۴) حالت سیم: معادله ناقد J باشد: در این حالت $J' = p$ و معادله را به شکل زیر می‌نویسند:

$$f(x, j') = 0 \quad x = f(j') \quad j' = p \rightarrow \frac{dj}{dx} = p \rightarrow \frac{dj}{p} = dx$$

$$x = f(p) \rightarrow dx = f'(p) dp \rightarrow \frac{dj}{p} = f'(p) dp$$

$$dj = p f'(p) dp \Rightarrow \begin{cases} J = \int p f'(p) dp \\ x = f(p) \end{cases}$$

Ex: $x = \ln j' + \sin j'$ ناقد J است $\rightarrow j' = p \rightarrow dx = \frac{dj}{p}$

$$x = \ln p + \sin p \xrightarrow{\text{تفاضل}} dx = \frac{dp}{p} + \cos p \cdot dp$$

$$\frac{dj}{p} = \frac{dp}{p} + \cos p \cdot dp \xrightarrow{\times p} dj = dp + \cos p \cdot p \cdot dp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J = \int dp + \int p \cdot \cos p \cdot dp = p + \int p \cdot \cos p \cdot dp \\ x = \ln p + \sin p \end{cases}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

EX2) $\alpha = J' + J''$ نامتجانست $J' = p \rightarrow \frac{dJ}{dp} = d\alpha$

$\alpha = p' + p'' \xrightarrow{\text{مشتق}} d\alpha = 1p dp + 2p' dp \rightarrow \frac{dJ}{dp} = (1p + 2p') dp$

$dJ = (1p + 2p') dp \rightarrow \begin{cases} J = \int (1p + 2p') dp = \frac{1}{2} p^2 + \frac{2}{3} p^3 + C \\ \alpha = p' + p'' \end{cases}$

(۴) معادله کترو: هر معادله کترو $J = \alpha J' + F(J)$ با سید معادله کترو می باشد

برای حل آن با انتخاب $J' = p$ آن را حل می کنیم.

$J = \alpha J' + F(J)$

$\begin{cases} J' = p \Rightarrow dJ = p d\alpha \rightarrow J = p\alpha + F(p) \rightarrow dJ = p d\alpha + \alpha dp + F'(p) dp \end{cases}$

$p d\alpha = p d\alpha + \alpha dp + F'(p) dp \rightarrow (\alpha + F'(p)) dp = 0$

$\begin{cases} dp = 0 \rightarrow \boxed{p = C} \xrightarrow{\text{در معادله نهایی شود}} J = C\alpha + F(C) \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha + F'(p) = 0 & \alpha = -F'(p) \end{cases}$ جواب غیر عادی

EX: $J = \alpha J' + J''$ معادله کترو $J' = p \rightarrow \frac{dJ}{d\alpha} = p \rightarrow dJ = p d\alpha$

$J = \alpha p + p' \xrightarrow{\text{مشتق}} dJ = p d\alpha + \alpha dp + 1p dp$

$p d\alpha = p d\alpha + \alpha dp + 1p dp \rightarrow (\alpha dp + 1p dp) = 0$

$\rightarrow (\alpha + 1p) dp = 0 \rightarrow \begin{cases} dp = 0 & \boxed{p = C} \\ \alpha + 1p = 0 & \alpha = -1p \end{cases}$ غیر عادی

$\Rightarrow \boxed{J = C\alpha + C^2}$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

۹) معادله لاگرانژ: هر معادله بر منبج $J = \alpha f(J') + g(J)$ معادله لاگرانژ می باشد

و برای حل آن با انتخاب $J' = p$ معادله به شکل زیر حل می کنیم

$$J = \alpha f(J') + g(J) \xrightarrow{J'=p} J = \alpha f(p) + g(p)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} dJ = f(p) d\alpha + \alpha f'(p) dp + g'(p) dp$$

$$p d\alpha = f(p) d\alpha + \alpha f'(p) dp + g'(p) dp$$

$$p d\alpha - f(p) d\alpha = \alpha f'(p) dp + g'(p) dp \rightarrow (p - f(p)) d\alpha = (\alpha f'(p) + g'(p)) dp$$

$$\frac{d\alpha}{dp} = \frac{\alpha f'(p)}{p - f(p)} = \frac{g'(p)}{p - f(p)} \quad \text{معادله خطی مرتبه ۱}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= e^{\int \frac{f'(p)}{p - f(p)} dp} \left(e^{-\int \frac{f'(p)}{p - f(p)} dp} \left(\frac{g'(p)}{p - f(p)} \right) dp \right) \\ J &= \alpha f(p) + g(p) \end{aligned} \right.$$

$$J = \alpha x y' + y^2 \quad J' = p \quad \frac{dy}{dx} = p \quad dy = dx p \quad \text{نکات:}$$

$$J = \alpha x p + p^2 \rightarrow dy = \alpha p dx + x dp + 2p dp$$

$$dx p = \alpha p dx + x dp + 2p dp \rightarrow -p dx = x dp + 2p dp$$

$$-p dx = (x + 2p) dp \rightarrow \frac{dx}{dp} = \left(\frac{x}{-p} - 2 \right) dp \rightarrow x' + \frac{x}{p} = -2$$

$$x = e^{-\int \frac{1}{p} dp} \int e^{\frac{1}{p} dp} (-2) dp = e^{-\ln p} \int e^{\ln p} (-2) dp \quad \text{معادله خطی مرتبه ۱}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$= \frac{1}{\rho^2} \int \rho^2 (-r) \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{2}{3} \rho^3 + C \right) \\ J = 2\alpha \rho + \rho^2 \end{cases}$$

معادله مرتبه را و بالاتر

معادله مرتبه ای به شکل

$$f_1(x) J^{(n)} + f_2(x) J^{(n-1)} + \dots + f_n J = Q(x)$$

مرتبه n می نامیم معادله مرتبه n هگن با ضرایب ثابت می نامیم. $Q(x) = 0$ باشد معادله مرتبه n هگن در صورتی که f_i ها عدد ثابت

باشد معادله مرتبه n هگن با ضرایب ثابت می نامیم.

$$a_1 J^{(n)} + a_2 J^{(n-1)} + \dots + a_n J = 0$$

برای حل چنین معادلاتی ابتدا معادلات مرتبه n هگن با ضرایب ثابت را حل می کنیم به کمک آن

روش کلی حل معادلات مرتبه n هگن با ضرایب ثابت را بیان می کنیم.

روش حل معادلات مرتبه n هگن با ضرایب ثابت:

$$a_1 J'' + a_2 J' + a_3 J = 0$$

$$\begin{cases} J = e^{rx} \\ J' = r e^{rx} \\ J'' = r^2 e^{rx} \end{cases} \rightarrow a_1 r^2 e^{rx} + a_2 r e^{rx} + a_3 e^{rx} = 0$$

معادله مختصه معادله دیفرانسیل $e^{rx} (a_1 r^2 + a_2 r + a_3) = 0 \rightarrow a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0$

پس از تشکیل معادله مختصه (معشر) معادله دیفرانسیل یکی از حالات زیر اتفاق می افتد در هر حالت جواب

معادله دیفرانسیل را به شکل زیر حساب می کنیم.

نکات: نکته اول اگر $J_1, J_2, \dots, J_n$ جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل

Subject:

Year. 200 Month. Day.

باشد جواب عمومی معادله ترکیب خطی همگام است

تعریف استقلال خطی: n جواب $J_1, J_2, \dots, J_n$ و مستقل خطی می گویند

صورتی است که در آن ها قاعدهی بروجیب α باشد

شرط: $a_1 J'' + a_2 J' + a_3 J = 0$

$$a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \Delta > 0 \longrightarrow r_1 \neq r_2 \\ 2) \Delta = 0 \longrightarrow r_1 = r_2 \\ 3) \Delta < 0 \longrightarrow \begin{cases} r_1 = p + iq \\ r_2 = p - iq \end{cases} \end{array} \right.$$

$$1) \Delta > 0 \quad r_1 \neq r_2 \implies \begin{cases} J_1 = e^{r_1 \alpha} \\ J_2 = e^{r_2 \alpha} \end{cases} \longrightarrow J = C_1 e^{r_1 \alpha} + C_2 e^{r_2 \alpha}$$

$$2) \Delta = 0 \quad r_1 = r_2 \implies \begin{cases} J_1 = e^{r_1 \alpha} \\ J_2 = \alpha e^{r_1 \alpha} \end{cases} \longrightarrow J = C_1 e^{r_1 \alpha} + C_2 \alpha e^{r_1 \alpha}$$

$$3) \Delta < 0 \quad \begin{cases} r_1 = p + iq \\ r_2 = p - iq \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} J_1 = e^{(p+iq)\alpha} \\ J_2 = e^{(p-iq)\alpha} \end{cases}$$

$$\longrightarrow J = e^{p\alpha} (C_1 \cos q\alpha + C_2 \sin q\alpha)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

صفحه

$$1) \quad J'' - 4J' + 4J = 0 \quad r^2 - 4r + 4 = 0 \quad (r-2)(r-2) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

$$J = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$$2) \quad J'' - 4J' + 4J = 0 \quad r^2 - 4r + 4 = 0 \quad (r-2)(r-2) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

$$J = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$$3) \quad J'' + 2J' + 4J = 0 \quad r^2 + 2r + 4 = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0$$

$$r_1, r_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i = \underbrace{-1}_p \pm \underbrace{\sqrt{3}}_q i$$

$$J = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x) = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)$$

تعریف روشنی: اگر J_1 و J_2 جواب معادله دیفرانسیل باشند روشنی آنها به شکل زیر

$$\begin{cases} J_1 = e^{r_1 x} \\ J_2 = e^{r_2 x} \end{cases} \quad \text{تعریف می شود.}$$

$$\omega(J_1, J_2) = \begin{vmatrix} J_1 & J_2 \\ J_1' & J_2' \end{vmatrix} = J_1 J_2' - J_2 J_1'$$

شرط لازم روشنی برای آنکه J_1 و J_2 جواب مستقل خطی باشند آن است که روشنی آنها برای صفر باشد

$$\omega(J_1, \dots, J_n) = \begin{vmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_n \\ J_1' & J_2' & \dots & J_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_1^{(n-1)} & J_2^{(n-1)} & \dots & J_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

در شرح معادلات مرتبه n همين با ضرب ثابت

$$a_1 J^{(n)} + \dots + a_n J = 0$$

$$a_1 r^n + a_2 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$\begin{cases} r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \dots \neq r_n \\ r_1 = \dots = r_m \neq r_{m+1} \neq \dots \neq r_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} J_1 = e^{r_1 x} \\ \vdots \\ J_n = e^{r_n x} \end{cases} \Rightarrow J = C_1 J_1 + \dots + C_n J_n$$

$$J = C_1 J_1 + \dots + C_n J_n$$

$$\begin{cases} J_1 = e^{r_1 x} \\ J_2 = x e^{r_2 x} \\ \vdots \\ J_m = x^{m-1} e^{r_m x} \\ J_{m+1} = e^{(r_{m+1})x} \\ \vdots \\ J_n = e^{r_n x} \end{cases}$$

$$J^{(r)} - J - J'' + J = 0$$

$$r^4 - r^2 - r' + 1 = 0 \quad r^2(r^2 - 1) - (r^2 - 1) = 0 \quad (r^2 - 1)(r^2 - 1) = 0$$

$$(r-1)(r+1)(r^2-1)(r^2+1) = 0 \quad (r-1)(r+1)(r-1)(r+1)(r^2+1) = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 & r_2 = -1 & r_3 = 1 & r_4 = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ r_3 = r_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1 = C_1 e^x \\ J_2 = C_2 e^{-x} \\ J_3 = C_3 x e^x \\ J_4 = C_4 x e^{-x} \end{cases}$$

$$r_5 = i \longrightarrow J_5 = \cos x$$

$$r_6 = -i \longrightarrow J_6 = \sin x$$

$$J = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^x + C_4 x e^{-x} + C_5 \cos x + C_6 \sin x$$

حل معادلات مرتبه n غیر همگن با ضرایب ثابت (در مع ضرایب نامعین):

برای حل چنین معادلاتی جواب عمومی آن را به فرم $J = J_h + J_p$ در نظر می گیریم

که در آن J_h جواب معادله همگن J_p با توجه به $Q(x)$ در حالات زیر طبقه بندی می شود

ن / بیانشد
 $J = J_h + J_p$
 J_p یک جواب خصوصی که با توجه به وضعیت $Q(x)$ در حالات زیر

حاصل می شود است. J_h جواب معادله همگن متناظر فوق است.

حالات اول: $Q(x)$ یک چند جمله ای درجه n باشد

$J_p = x^k$ (یک چند جمله ای کامل از درجه n با ضرایب نامعین)

که تعداد ریشه ها برابر صفر معادله همگن متناظر است.

$$J'' - 3J' + 2J = 2x$$

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 2x \quad r^3 - 3r^2 - 2r = 0 \quad r(r-2)(r-1) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 1 \end{cases}$$

$$J_h = C_1 e^{0 \times x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^x = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^x$$

$$J_p = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx \quad \left. \begin{aligned} J' &= 2Ax + B \\ J'' &= 2A \\ J''' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

چون $2Ax$ همان درجه یک (ضرایب ثابت) است

به تقاطع ها صفر توان

x می نداریم چون متنا

$(r_1 = 0)$ یک ریشه صفر داشت پس توان x

$(k=1)$ برابر با است.

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\text{سویچ صاف} \Rightarrow 0 - r(rA) + r(rAx + B) = rx$$

در صورتی که سواریم

$$0 - rA + rAx + rB = rx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} rA = r \quad A = \frac{1}{r} \\ rB - rA = 0 \quad rB = r \quad B = \frac{r}{r} \end{array} \right\} \quad Jp = Ax^r + Bx = \frac{1}{r} x^r + \frac{r}{r} x$$

$$\text{جواب نهایی} \quad J = J_h + J_p = C_1 + C_2 e^{rx} + (C_3 e^{rx} + \frac{1}{r} x^r + \frac{r}{r} x)$$

طالت رقم:

$$Q(x) = e^{Ax} \times \text{ضریب ریاضی}$$

$$Jp = x^k e^{px} \quad (k \text{ ضریب اظطرار ریاضی با ضرایب نامعین})$$

کما قدر درجه ها برابر p معادله منبسط است.

$$J'' - rJ' + rJ = rx x^r$$

$$r^3 - fr^2 + fr = 0 \quad r(r^2 - fr + f) = 0 \quad r(r-r)(r-r) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = r \\ r_3 = r \end{array} \right.$$

$$J_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} = C_1 + C_2 e^{rx} + C_3 x e^{rx}$$

$$Jp = e^{rx} \cdot \frac{x^r}{r} (Ax^r + Bx + C)$$

چون k هم رقم است $\rightarrow$ چون $k=2$ برابر p بود (2) $\rightarrow$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$Q(x) = R(x) \sin \varphi x + S(x) \cos \varphi x \quad \text{طلب ۱۲}$$

$S(x)$ و $R(x)$ درجه‌های اند m, n باشند

$$J_p = x^k [M(x) \sin \varphi x + N(x) \cos \varphi x]$$

که تعداد φ ها $p+1$ باشد معادله معین باشد.

$M(x), N(x)$ درجه‌های کامل با ضرایب معین اند $\deg \max\{m, n\}$

$$J'' + J' = x^2 \cos x + 0 \sin x \quad \text{این سمت را فرض کنیم}$$

$$y'' + y' = 0 \quad y(y' + 1) = 0 \quad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2' = -1 \end{cases} \Rightarrow y_2' = -1 \Rightarrow y_2 = -x \quad \begin{cases} y_3' = \pm i \\ y_4' = \mp i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_3 = \pm i \\ y_4 = \mp i \end{cases}$$

$k=1$ چون فقط $+1$ و -1 در جدول است دیگر در این جدول نیست.

$$J_h = C_1 e^{rx} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

$$J_p = x^1 [(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (A'x^2 + B'x + C') \sin x]$$

$$Q(x) = e^{px} [R(x) \sin \varphi x + S(x) \cos \varphi x] \quad \text{حالت چهارم:}$$

$S(x)$ و $R(x)$ درجه‌های اند m, n باشند

$$J_p = e^{px} x^k [M(x) \sin \varphi x + N(x) \cos \varphi x]$$

که تعداد φ ها $p+1$ باشد معادله معین باشد

$$\deg \max\{m, n\}$$

$M(x), N(x)$ درجه‌های کامل با ضرایب معین اند

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$J'' - 4J' + 4J = \alpha^2 e^{r\alpha} \sin \alpha + 0 e^{r\alpha} \cos \alpha \quad \text{از فرض دوم}$$

$$J'' - 4J' + 4J = 0 \quad r^2 - 4r + 4 = 0 \quad r(r - 4 + 4) = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ (r^2 - 4r + 4) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 3 \end{cases}$$

$$J_h = C_1 e^{r_1 \alpha} + C_2 e^{r_2 \alpha} + C_3 e^{r_3 \alpha} = C_1 + C_2 e^{\alpha} + C_3 e^{3\alpha}$$

$$J_p = e^{r\alpha} \{ (A\alpha^2 + B\alpha + C) \sin \alpha + (A'\alpha^2 + B'\alpha + C') \cos \alpha \}$$

نکته: اگر $Q(x)$ شکل مجموع درجه چندین درجات فوق باشد برای هر حالت یک جواب

فرض پیدا می کنیم پس تمام جوابها فرض را با هم جمع می کنیم

$$J'' - 3J' + 9J = \alpha^2 e^{r\alpha} + \alpha + \alpha \cos \alpha + 0 \sin \alpha$$

$$r^2 - 3r + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad r(r - 3 + 9) = 0 \quad r(r - 3)(r - 3) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = r_3 = 3 \end{cases}$$

$$J_h = C_1 e^{r_1 \alpha} + C_2 e^{r_2 \alpha} + C_3 \alpha e^{r_3 \alpha} = C_1 + C_2 e^{3\alpha} + C_3 \alpha e^{3\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J'' - 3J' + 9J = \alpha \quad J_p = \alpha(A\alpha + B) \\ J'' - 3J' + 9J = \alpha^2 e^{r\alpha} \quad J_p = \alpha^2 e^{r\alpha} (A_1 \alpha^2 + B_1 \alpha + C_1) \\ J'' - 3J' + 9J = \alpha \cos \alpha \quad J_p = \{ (A_2 \alpha + B_2) \cos \alpha + (A_3 \alpha + B_3) \sin \alpha \} \end{array} \right.$$

به دست آوردن جواب خصوصی با استفاده از اپراتوری معکوس:

تعریف اپراتور معکوس: $\frac{1}{F(D)} y = y_1 \iff F(D) y_1 = y$

مثال: $(D+1) \sin x = \cos x + \sin x \iff \frac{1}{D+1} (\cos x + \sin x) = \sin x$

چند فرمول برای دست آوردن اپراتور معکوس:

$$A) \frac{1}{F(D)} \cdot e^{ax} = \begin{cases} \frac{1}{F(D)} \cdot e^{ax} & \text{اگر } F(a) \neq 0 \\ \frac{x^k \cdot e^{ax}}{k! \cdot P(a)} & \text{اگر } F(D) = (D-a)^k \cdot P(D) \end{cases}$$

B) $\frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{1}{F(-a^2)} \sin ax$ $\cos ax$ نیز همین طور می باشد.

C) $\frac{1}{F(D)} (e^{ax} \cdot f(x)) = e^{ax} \cdot \frac{1}{F(D+a)} \cdot f(x)$

مثال در حالت A: $\frac{1}{D(D-1)^2(D-2)^3} \cdot e^{2x} = \frac{x^3 \cdot e^{2x}}{3! \cdot 2} = \frac{1}{12} x^3 e^{2x}$

عامل مشترک در مخرج 2 است. بنابراین k برابر توان (D-2) یعنی 3، معنی حسابات

مخرج برابر P(D) می باشد.

مثال: $y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 6} \cdot (e^{2x} + 1)$

$$y_p = \frac{1}{(D-2)(D-3)} \cdot (e^{2x} + e^{0x}) = \frac{x \cdot e^{2x}}{-1} + \frac{1}{4}$$

مثال برای سوال B:

$$y^{(4)} + 3y' + y = \sin x$$

$$\frac{1}{D^4 + 3D + 1} \cdot \sin x = \frac{1}{1 + 3D + D^4} \cdot \sin x = \frac{1}{3D + 2} \cdot \sin x$$

$$= \frac{3D - 2}{9D^2 - 4} \cdot \sin x = \frac{-1}{13} (3D - 2) \sin x = \frac{-1}{13} (3 \cos x - 2 \sin x)$$

مثال برای حالت C:

$$y'' + y' + y = x + 1$$

$$\frac{1}{D^2 + D + 1} (x + 1) = (1 - D + D^2 + \dots)(x + 1) = [(x + 1) + (-1) + \dots] = x$$

$$\begin{array}{r} - (1 + D + D^2) \quad | \quad \frac{D^2 + D + 1}{1 - D + D^2 + \dots} \\ \hline -D - D^2 \\ - (1 - D - D^2 - D^3) \\ \hline D^3 \end{array}$$

$$y'' + y = 1 + e^x + x e^x + e^{2x} \cdot \sin x$$

مثال برای سوال:

$$\Rightarrow y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i \rightarrow y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 1} (1 + e^x + x e^x + e^{2x} \cdot \sin x)$$

$$y_p = 1 + \frac{1}{2} e^x + e^x - \frac{1}{(D+1)^2 + 1} (x) + e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 + 1} \cdot \sin x = \dots$$

معادله کوپس اولی در معادله ای به فرم $\alpha^2 J'' + a_1 \alpha J' + a_2 J = 0$... با ضرایب

کس اولی در معادله برای حل آن با تغییر متغیر $\alpha = e^t$ انتخاب کنیم در این صورت

معادله به فرم یک معادله مرتبه ۱ با ضرایب ثابت تبدیل می شود.

$$\alpha = e^+ \rightarrow t = \ln \alpha \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} = e^{-t}$$

$$J' = \frac{dJ}{d\alpha} = \frac{dJ}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} J'_t = e^{-t} J'_t$$

$$J'' = \frac{d^2 J}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} J'_t \right) = -\frac{1}{\alpha^2} J'_t + \left(\frac{dJ'_t}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \right) \frac{1}{\alpha}$$

(u.v)' = u'v + uv'

$$J'' = -\frac{1}{\alpha^2} J'_t + \frac{1}{\alpha^2} J''_t = -e^{-2t} J'_t + e^{-2t} J''_t$$

$$e^{2t} (-e^{-2t} J'_t + e^{-2t} J''_t) + a_1 e^t (e^{-t} J'_t) + a_2 J = 0$$

$$J'' - J' + a_1 J' + a_2 J = 0 \rightarrow J'' + (a_1 + 1) J' + a_2 J = 0$$

که معادله خطی مرتبه ۲ با ضرایب ثابت

$$Ex: \alpha^2 J'' + 2\alpha J' + J = 0$$

$$J'' + (2-1) J' + J = 0 \rightarrow J'' + J' + J = 0$$

$$r^2 + r + 1 = 0 \rightarrow (r_1, r_2) = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{1} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$J_1 = e^{-\alpha} \cos \sqrt{3} \alpha \quad J_2 = e^{-\alpha} \sin \sqrt{3} \alpha$$

$$J = C_1 J_1 + C_2 J_2$$

Subject:

Year: 200 Month: Day:

روش کاهش مرتبه: اگر معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ یک جواب y_1 داشته باشد، جواب این

معادله (y_1) را ضرایب v با انتخاب $y_2 = y_1 v$ که در آن v تابعی بر حسب x است

جواب عمومی معادله را بدست می آوریم

$$y_2 = y_1 v + v y_1$$

$$y_2' = y_1' v + v y_1' + v y_1' + y_1 v'$$

در معادله می قرار می دهیم

$$(y_1' v + v y_1' + v y_1' + y_1 v') + p(x)(y_1 v + v y_1) + q(x)(y_1 v) = 0$$

$$v(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + (v y_1' + v y_1' + v y_1' + p(x)v y_1) = 0$$

$$-v y_1' + 2v y_1' + p(x)v y_1 = 0 \quad \times \frac{1}{v y_1} \rightarrow \frac{v'}{v} + 2 \frac{y_1'}{y_1} + p(x) = 0$$

$$\int \frac{v'}{v} + \int 2 \frac{y_1'}{y_1} + \int p(x) dx = 0 \rightarrow \ln v + 2 \ln y_1 = - \int p(x) dx$$

$$\ln v y_1^2 = - \int p(x) dx \rightarrow v y_1^2 = e^{- \int p(x) dx}$$

$$v = \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{- \int p(x) dx} \rightarrow v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{- \int p(x) dx} \cdot dx$$

مثلاً هرگاه یک جواب معادله بدست آید، روشی که به این روش می گویند (طرح شد) می باشد

$$EX: \begin{cases} x^2 y'' + 2x y' = 0 \\ y_1 = x^{-1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1' = -x^{-2} \\ y_1'' = 2x^{-3} \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 (2x^{-3}) + 2x (-x^{-2}) = 0$$

$$2x^{-1} + (-2x^{-1}) = 0 \quad \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

فرمول اشتباه است

Subject:

Year: 200 Month: Day:

$$\Rightarrow V = \int \frac{1}{J_1^2} \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot dx = \int \frac{1}{x^{-2}} \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} \cdot dx = \int x^2 \cdot e^{-\ln x} \cdot dx$$

$$= \int dx = x \quad \Rightarrow \quad J_2 = J_1, V = \frac{1}{x} (x) = 1 \quad J = \frac{C_1}{x} + C_2$$

حل معادلات به روش تغییر پارامتره برای حل معادله

در صورتی که J_1 و J_2 در جواب معادله همگن متناظر فوق باشند.

$$J_h = C_1 J_1 + C_2 J_2$$

$$J_p = u_1(x) J_1 + u_2(x) J_2$$

$$J_p' = u_1' J_1 + J_1' u_1 + u_2' J_2 + J_2' u_2$$

$$J_p' = (u_1' J_1 + u_2' J_2) + (J_1' u_1 + J_2' u_2) = J_1' u_1 + J_2' u_2$$

$$J_p'' = J_1'' u_1 + u_1' J_1' + u_2' J_2' + J_2'' u_2$$

حال در معادله گذاشته سپس جواب را از این به دست می آوریم.

$$\begin{cases} u_1' J_1 + u_2' J_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' J_1' + u_2' J_2' = g(x) \end{cases}$$

$$u_1 = \int \frac{g(x) J_2}{w(J_1, J_2)} dx$$

$$u_2 = \int \frac{g(x) J_1}{w(J_1, J_2)} dx$$

$$J_h + J_p = J$$

$$EX: J'' + J = \sec x$$

$$r^2 + 1 = 0 \rightarrow r^2 = -1 \rightarrow r = \pm i \rightarrow r = \pm i$$

$$\begin{cases} J_1 = \cos x \\ J_2 = \sin x \end{cases}$$

$$J_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$J_p = u_1 J_1 + u_2 J_2 \quad w(J_1, J_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - (-\sin^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$u_1 = \int \frac{\sec x \cdot \sin x}{1} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln |\cos x|$$

$$u_2 = \int \frac{\sec x \cdot \cos x}{1} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x \cdot dx = \int dx = x$$

$$J_p = (\ln |\cos x|) \cos x + x \sin x$$

$$J_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\Rightarrow J = J_p + J_h = (\ln |\cos x|) \cos x + x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

نقشه برای حل معادله: $J^{(n)} + P_1(x) J^{(n-1)} + \dots + P_n(x) J = g(x)$

n جواب معادله همبسته متناظر باشد $J_1, \dots, J_n$

$$J_h = C_1 J_1 + \dots + C_n J_n \quad J_p = u_1 J_1 + u_2 J_2 + \dots + u_n J_n$$

$$\Rightarrow J = J_h + J_p \quad \begin{cases} u_1' J_1 + u_2' J_2 + \dots + u_n' J_n = 0 \\ u_1 J_1' + u_2 J_2' + \dots + u_n J_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1^{(n-1)} J_1 + u_2^{(n-1)} J_2 + \dots + u_n^{(n-1)} J_n = g(x) \end{cases}$$

$$J'' + J' = \tan x$$

حل

$$r^2 + r = 0 \quad r(r+1) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

$$J_h = C_1 e^0 + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$J_h = C_1 + C_2 \cos \alpha + C_3 \sin \alpha$$

↓

$$J_p = u_1 x_1 + u_2 \cos \alpha + u_3 \sin \alpha$$

$$\frac{d}{d\alpha} \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 \cos \alpha + u_3 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\alpha} \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 (-\sin \alpha) + u_3 (\cos \alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\alpha} \begin{cases} 0 + u_2 (-\cos \alpha) + u_3 (-\sin \alpha) = 0 \end{cases}$$

دسته - راجع شود

و u_1 و u_2 و u_3 را پیدا می کنیم

از اینجا در معادله حل قرار می دهیم

حل معادلات به کمک تبدیلات لاپلاس:

برای حل یک معادله به کمک تبدیلات لاپلاس، ابتدا از طرفین تبدیل لاپلاس گرفته پس معادله

را به یک معادله معمولی است بر حسب لاپلاس تابع بدست می آوریم. اگرگاه از طرفین تبدیل معکوس

لاپلاس می گیریم تا جواب معادله بدست آید.

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \iff L^{-1}(F(s)) = f(t)$$

$$1) L(f \pm g) = L(f) \pm L(g)$$

$$2) L(\lambda f) = \lambda L(f) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3) L^{-1}(F_1 \pm F_2) = L^{-1}(F_1) \pm L^{-1}(F_2)$$

$$4) L^{-1}(\lambda F_1) = \lambda L^{-1}(F_1)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$1) L(a) = \frac{a}{s}$$

$$L^{-1}\left(\frac{a}{s}\right) = a$$

$$\text{C.W.1: } L(a) = \int_0^{+\infty} e^{-st} a dt = a \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} \right) = a \left(0 + \frac{1}{s} \right) = \frac{a}{s}$$

$$\text{EX: } L^{-1}\left(\frac{a}{s}\right) = a$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

$$2) L(at) = \frac{a}{s^2}$$

$$\begin{aligned} \text{C.W.1: } L(at) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} at dt = a \int_0^{+\infty} \underbrace{t}_{u} \underbrace{e^{-st}}_{dv} dt \\ &= a \left(-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} e^{-st} dt \right) = a \left(0 + \left(-\frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} \right) \right) \end{aligned}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} t = u \quad du = dt \\ e^{-st} dt = dv \\ v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right.$$

$$= a \left(\frac{1}{s^2} \right) = \frac{a}{s^2}$$

$$\text{EX: } L^{-1}\left(\frac{a}{s^2}\right) = at$$

$$3) L(at^n) = \frac{an!}{s^{n+1}}$$

$$\text{EX: } L^{-1}\left(\frac{a!}{s^2}\right) = \rightarrow t^2$$

$$\text{EX: } L(t^r + ct - a) = L(t^r) + L(ct) - aL(1) = \frac{r!}{s^{r+1}} + \frac{r}{s^2} - \frac{a}{s}$$

$$4) L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$\text{C.W.1: } L(e^{at}) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{+\infty} =$$

$$0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

$$\text{EX: } L^{-1}\left(\frac{1}{s-r}\right) = e^{rt}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$$

$$5) L(\sinh at) = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad L^{-1}\left(\frac{a}{s^2 - a^2}\right) = \sinh at$$

$$\text{Sol: } L(\sinh at) = L\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}L(e^{at}) - \frac{1}{2}L(e^{-at}) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2} \frac{s+a - s+a}{s^2 - a^2} = \frac{2a}{s^2 - a^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\text{Ex: } L^{-1}\left(\frac{r}{s^2 - r^2}\right) = \sinh rt$$

$$9) L(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$v) L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$1) L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\text{Ex: } L^{-1}\left(\frac{\omega s - 1}{s(s^2 + 1)(s - 1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{A}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{B}{s-1}\right) + L^{-1}\left(\frac{C\delta + D}{s^2 + 1}\right)$$

$$= AL^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + BL^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + CL^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right) + DL^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) =$$

$$= A + Be^t + C \cos t + D \sin t$$

$$\text{or } L(f(t)) = F(s) \quad \text{قيد: } f$$

$$L(f(bt)) = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right)$$

$$L\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

$$\text{Ex: } L\left(\frac{1-e^{-rt}}{t}\right) = \frac{1}{r} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{s}{r}}\right) = \frac{1}{r} \ln\left(1 + \frac{r}{s}\right)$$

قضیہ تبدیل لاپلاس مشتق :
اگر جس یک تابع ناسد، رخواہم تبدیل لاپلاس مشتقات مختلف کی راہی سہہ کنیم از غرول

زیر استفادہ می کنیم

$$L(j^{(n)}) = s^n L(j) - s^{n-1} j(0) - s^{n-2} j'(0) - s^{n-3} j''(0) - \dots - j^{(n-1)}(0)$$

$$L(j') = s L(j) - j(0)$$

$$L(j'') = s^2 L(j) - s j(0) - j'(0)$$

$$L(j''') = s^3 L(j) - s^2 j(0) - s j'(0) - j''(0)$$

EX: $L(e^{-t}) = \begin{cases} j = e^{-t} \\ t=0 \\ j' = -e^{-t} \end{cases} \quad j(0) = 1$

$$L(j') = s L(j) - j(0) \rightarrow L(-e^{-t}) = s L(e^{-t}) - 1$$

$$1 = s L(e^{-t}) + L(e^{-t}) = (s+1) L(e^{-t}) \rightarrow L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$$

EX2) $L(\sin^2 t) : \begin{cases} j = \sin^2 t \\ j' = 2 \cos t \sin t \\ t=0 \end{cases} \quad j(0) = 0$

$$L(j') = s L(j) - j(0)$$

$$L(2 \cos t \sin t) = s L(\sin^2 t) - 0 \quad L(\sin^2 t) = s L(\sin^2 t)$$

$$\frac{2}{s^2 + 1} = s L(\sin^2 t) \rightarrow L(\sin^2 t) = \frac{2}{s(s^2 + 1)}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$L(t \cos rt) = \begin{cases} J = t \cos rt \\ J' = \cos rt + (-r \sin rt) t = \cos rt - r t \sin rt \quad (\text{EX 3}) \\ J(0) = 0 \end{cases}$$

$$J' = \cos rt - r t \sin rt$$

$$\begin{aligned} J'' &= -r \sin rt - [r \sin rt + r \cos rt - r] = -r \sin rt - r \sin rt - r \cos rt + r \\ &= -r \sin rt - r \cos rt \end{aligned}$$

$$\text{نیز } L(J'') = s^2 L(J) - s J(0) - J'(0)$$

$$\Rightarrow L(-r \sin rt - r \cos rt) = s^2 L(t \cos rt) - 1$$

$$-L(t \cos rt)(r + s^2) = \frac{r \times r}{s^2 + r^2} - 1$$

$$-L(t \cos rt) = \frac{1 - s^2 - r^2}{(s^2 + r^2)^2} = \frac{r - s^2}{(s^2 + r^2)^2} \Rightarrow L(t \cos rt) = \frac{s^2 - r}{(s^2 + r^2)^2}$$

معادله را تغییر می دهیم

$$J'' - J' - 2J = 0 \quad J(0) = 1 \quad J'(0) = r$$

$$L(J'') - L(J') - 2L(J) = L(0) = 0$$

$$s^2 L(J) - s J(0) - J'(0) - s L(J) - J(0) - 2L(J) = 0$$

$$s^2 L(J) - s - r - s L(J) + 1 - 2L(J) = 0$$

$$s^2 L(J) - s - r - s L(J) - 2L(J) = 0$$

$$L(J)(s^2 - s - 2) = s + 1 \quad L(J) = \frac{s+1}{s^2 - s - 2} = \frac{s+1}{(s-r)(s+r)}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$y = L^{-1} \left(\frac{s+1}{(s-e)(s+r)} \right) = L^{-1} \left(\frac{A}{s-r} + \frac{B}{s+1} \right) = Ae^{rt} + Be^{-t}$$

$$2) y'' - ry' + ry = re^{-t} \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$$

$$L(y'') - rL(y') + rL(y) = rL(e^{-t})$$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) - r[sL(y) - y'(0)] + rL(y) = rL(e^{-t})$$

$$s^2 L(y) - rs + 1 - rsL(y) + r + rL(y) = rL(e^{-t})$$

$$s^2 L(y) - rs + 1 - rsL(y) + rL(y) = \frac{r}{s+1}$$

$$L(y) \left[\frac{s^2 - rs + r}{(s-r)(s-1)} \right] = \frac{r}{s+1} + rs - 1 = \frac{r - rs - 1 + rs^2 + rs}{s+1}$$

$$L(y) = \frac{rs^2 - as - a}{(s+1)(s-r)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-r} + \frac{C}{s-1}$$

$$y = L^{-1} \left(\frac{A}{s+1} \right) + L^{-1} \left(\frac{B}{s-r} \right) + L^{-1} \left(\frac{C}{s-1} \right) = Ae^{-t} + Be^{rt} + Ce^{t}$$

$$y = Ae^{-t} + Be^{rt} + Ce^{t}$$

مثال ۲: $L(f(t)) = f(s)$ اگر

$$L\left(\int_0^t f(r) dr\right) = \frac{1}{s} f(s) \Rightarrow \int_0^t f(r) dr = L^{-1}\left(\frac{1}{s} f(s)\right)$$

$$EX: L\left(\int_0^t \cos(r) dr\right) \quad f(t) = \cos t \quad L(\cos t) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$L\left(\int_0^t \cos(r) dr\right) = \frac{1}{s} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+c)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+c}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} - f(s)\right)$$

$$\int_0^t e^{-cr} dr = \left. \frac{1}{-c} e^{-cr} \right|_0^t = -\frac{1}{c} e^{-ct} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c} (1 - e^{-ct})$$

تغییرات انتگرالی:

$$1) \text{ اگر } L(f(t)) = f(s) \Rightarrow L(e^{bt} f(t)) = f(s-b)$$

$$L^{-1}(f(s-b)) = e^{bt} f(t)$$

EX: $L(e^{rt} \cos t) =$ $L(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$ $\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow \frac{s-r}{(s-r)^2+1}$

$$\Rightarrow L(e^{rt} \cos t) = \frac{(s-r)}{(s-r)^2+1}$$

EX: $L(te^{rt}) =$ $L(t) = \frac{1}{s^2}$ $\frac{s}{s^2} \Rightarrow \frac{s-r}{(s-r)^2}$

$$\Rightarrow L(te^{rt}) = \frac{1}{(s-r)^2}$$

تعریف تابع پدیده واحد:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t > c \end{cases}$$

فرض کنیم تابع پدیده واحد را با ضابطه

$$L(u_c(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt = \int_0^c e^{-st} u_c(t) dt + \int_c^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt$$

$$= \int_c^{\infty} e^{-st} dt = \left. -\frac{1}{s} e^{-st} \right|_c^{\infty} = 0 + \frac{e^{-cs}}{s} = \frac{e^{-cs}}{s}$$

نتیجه: اگر $L(f(t)) = f(s)$ باشد

$$L(u_c(t) f(t-c)) = e^{-cs} L(f(t)) = e^{-cs} f(s)$$

$$\Rightarrow L^{-1}(e^{-cs} f(s)) = u_c(t) f(t-c)$$

Subject: _____

Year. 200 Month. Day.

EX: $f(t) = u_r(t) \cdot (t^r - ct + r)$ $L(f(t)) = ?$ $c = r$

$$t^r - ct + r = (t-r)^r + t - r \iff t^r - rt + r + t - r = t^r - rt + t$$

$$f(t) = u_r(t) ((t-r)^r + (t-r))$$

$$L(f(t)) = L(u_r(t) \cdot (t-r)^r + (t-r)) = e^{-rs} L(t^r + t) = -e^{-rs} \left(\frac{r}{s^{r+1}} + \frac{1}{s^2} \right)$$

★ اگر $L(f(t)) = f(s)$ در این صورت:

$$L((-1)^n t^n f(t)) = f^{(n)}(s)$$

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n f^{(n)}(s) \rightarrow L^{-1}(f^{(n)}(s)) = (-t)^n L^{-1}f(s)$$

EX: $L(t \cos t) = ?$ $L(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$

$$\Rightarrow L(t \cos t) = (-1) \left(\frac{s}{s^2+1} \right)' = \frac{-s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{-(1-s^2)}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

استرال تبدیل لاپلاس: $L(f(t)) = f(s)$ اگر $f(s) = \int_s^\infty f(u) du$

$$f(t) = t \int_s^\infty f(u) du$$

EX: $L\left(\frac{\sinh t}{t}\right) = \int_s^\infty L(\sinh t) = \frac{1}{s^2-1}$

$$\rightarrow \int_s^\infty \frac{du}{u^2-1} = \int \frac{A}{u-1} du + \int \frac{B}{u+1} du = \frac{1}{2} \int_s^\infty \frac{du}{u-1} + \frac{1}{2} \int_s^\infty \frac{du}{u+1} =$$

$$\frac{1}{2} [\ln(u-1) - \ln(u+1)] = \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} \Big|_s^\infty = -\frac{1}{2} \ln \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1}$$

Subject:

Year, 200 Month, Day.

EX2) $L\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$ میگردیم $L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$

$\rightarrow L\left(\frac{e^{-t}}{t}\right) = \int_s^{+\infty} \frac{du}{u+1} = \ln|u+1| \Big|_s^{+\infty}$ وگذاست.

EX3) $L\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$ میگردیم $L(1-\cos t) = L(1) - L(\cos t) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$

$\rightarrow \int_s^{+\infty} \left[\frac{du}{u} - \frac{u}{u^2+1} du \right] = \ln u - \frac{1}{2} \ln(u^2+1) \Big|_s^{+\infty} = \ln u - \ln(u^2+1)^{1/2}$

$= \ln \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \Big|_s^{+\infty} = 0 - \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$

گازولوشن (پیش):

$f * g = \int_0^t f(t-x) g(x) dx$

خاص: 1) $f * g = g * f$

2) $f * (g * h) = (f * g) * h$

3) $f * (g+h) = (f * g) + (f * h)$

4) $c(f * g) = f * (cg) = c f * g$

5) $f * f \geq 0$, $f * 1 \neq f$

EX: $t * \sin t = \int_0^t f(t-x) g(x) dx$ $\begin{cases} f(t) = t \\ g(t) = \sin t \end{cases}$

$= \int_0^t \underbrace{(t-x)}_{\text{پس}} \sin x dx \quad \begin{cases} t-x=u & du = -dx \\ \sin x dx = dv & v = -\cos x \end{cases}$

$= -(t-x) \cos x \Big|_0^t - \int_0^t \cos x dx = -(t-x) \cos x - \sin x \Big|_0^t$

$= -\sin t - (-t) = t - \sin t$

Subject:

Year: 200 Month: Day:

$$\text{EX2)} \quad 1 * e^{-t} = \int_0^t 1 * e^{-\alpha} d\alpha = \int_0^t e^{-\alpha} d\alpha = -e^{-\alpha} \Big|_0^t \quad \begin{cases} g(\alpha) = e^{-\alpha} \\ f(t) = 1 \end{cases}$$
$$= -e^{-t} + 1 = 1 - e^{-t}$$

توضیح: اگر $L(f(t)) = F(s)$ و $L(g(t)) = G(s)$ و

$$L(f * g) = L(f) * L(g) = F(s) * G(s) \quad , \quad L^{-1}(F(s) * G(s)) = f * g$$

$$\text{EX: } L\left(\int_0^t (t-\alpha) \sin \alpha d\alpha\right) = L(t * \sin \alpha t) = L(t) * L(\sin \alpha t)$$

$$= \frac{1}{s^2} * \frac{\gamma}{s^2 + \gamma^2}$$

$$\text{EXr)} \quad L\left(\int_0^t e^{-\alpha} \sin \alpha (t-\alpha) d\alpha\right) = L(\sin \alpha t * e^{-t}) = L(e^{-t}) * L(\sin \alpha t)$$

$$= \frac{1}{s+1} * \frac{\gamma}{s^2 + \gamma^2}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s^2+\gamma^2)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1} * \frac{1}{s^2+\gamma^2}\right)$$

$$\begin{cases} F(s) = \frac{1}{s+1} \\ G(s) = \frac{1}{s^2+\gamma^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) = e^{-t} \\ g(t) = e^{-\gamma t} \end{cases} \Rightarrow L^{-1}(F(s)G(s)) = f * g = e^{-t} * e^{-\gamma t}$$

$$= \int_0^t e^{-(t-\alpha)} e^{-\gamma \alpha} d\alpha = \int_0^t e^{-t} \cdot e^{\alpha} \cdot e^{-\gamma \alpha} d\alpha = e^{-t} \int_0^t e^{-\alpha(\gamma-1)} d\alpha$$

$$= e^{-t} (-e^{-\alpha} \Big|_0^t) = e^{-t} (-e^{-\gamma t} + 1) = e^{-t} - 1$$

معادلات اشتغال: هر معادله که تابع جواب آن زیر علامت اشتغال باشد یک

معادله اشتغالی نامیده می شود. برای حل چنین معادلاتی از طریق تبدیل لاپلاس

می گیریم. پس معکوس لاپلاس می گیریم تا جواب معادله بدست آید.

طوریست حل معادله $y(t) = \sin 2t + \int_0^t y(x) \sin 2(t-x) dx$

$$L(y(t)) = L(\sin 2t) + L\left(\int_0^t y(x) \sin 2(t-x) dx\right) \quad \dots \quad L(y(t)) = Y$$

$$Y = \frac{2}{s^2 + 4} + L(y(t) * \sin 2t) \quad \dots \quad Y = \frac{2}{s^2 + 4} + L(y(t)) \times L(\sin 2t)$$

$$Y = \frac{2}{s^2 + 4} + Y \frac{2}{s^2 + 4} \rightarrow Y - Y \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{2}{s^2 + 4} \rightarrow Y \left(1 - \frac{2}{s^2 + 4}\right) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$Y \left(\frac{s^2 + 4}{s^2 + 4}\right) = \frac{2}{s^2 + 4} \quad Y = \frac{2}{s^2 + 4} \quad y(t) = L^{-1}(Y)$$

$$\rightarrow y(t) = L^{-1}(Y) = L^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} L^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} L^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} t$$

$$\text{Ex2)} \quad y'' + y' = \cos t + \int_0^t \sin(t-x) y'(x) dx \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$L(y'') + L(y') = L(\cos t) + L\left(\int_0^t \sin(t-x) y'(x) dx\right)$$

$$s^2 L(y) - s y(0) - y'(0) + s L(y) - y(0) = \frac{s}{s^2 + 1} + L(\sin t * y'(x))$$

$$L(y) [s^2 + s] = \frac{s}{s^2 + 1} + L(\sin t) \times L(y'(t)) \quad \begin{cases} L(y) = Y \end{cases}$$

$$Y(s^2 + s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1} Y(s L(y') - y'(0))$$

$$Y(s^2 + s - \frac{s}{s^2 + 1}) = \frac{s}{s+1}$$

$$Y = \frac{1}{s^2 + s^2 + s}$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + s^2 + s}\right)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

حل دستگاه یک تبدیل لاپلاس: برای حل یک دستگاه یک تبدیل لاپلاس ابتدا از هر

یک از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می گیریم سپس دستگاه را بر حسب تبدیلات لاپلاس

حل می کنیم سپس تبدیل معکوس لاپلاس می گیریم. در صورتی که شرایط اولیه را داشته

باشد یک جواب خاص برای دستگاه پیدا می شود.

$$\text{EX: } \begin{cases} J_1' = -J_2 \\ J_2' = J_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} J_1(0) = 1 \\ J_2(0) = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L(J_1') = -L(J_2) \\ L(J_2') = L(J_1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} sL(J_1) - J_1(0) = -L(J_2) \\ sL(J_2) - J_2(0) = L(J_1) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{فرقی کنیم} \\ y_1 = L(J_1) \\ y_2 = L(J_2) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} sy_1 - 1 = -y_2 \\ sy_2 = y_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} sy_1 + y_2 = 1 \\ sy_2 - y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} sy_1 + y_2 = 1 \\ s^2y_2 - sy_1 = 0 \end{cases}$$

$$s^2y_2 + y_2 = 1 \quad y_2(s^2 + 1) = 1 \quad y_2 = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$L^{-1}(y_2) = J_2 \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \sin t$$

$$J_2' = J_1 \Rightarrow (\sin t)' = \cos t = J_1$$

و یا

$$\frac{s^2}{s^2 + 1} - sy_1 = 0 \quad y_1 = \frac{s}{s^2 + 1} \quad y_1 = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right) = \cos t$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\text{Ex2)} \begin{cases} \ddot{y}_1 + y_1 - \ddot{y}_r - r y_r = 0 \\ y_1 + y_r = \cos t + r \cos rt \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_1'(0) = 1 \\ y_r'(0) = r \quad y_r(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(y_1') + L(y_1) - L(y_r') - r L(y_r) = 0 \\ L(y_1') + L(y_r') = L(\cos t) + r L(\cos rt) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^r L(y_1) - s L(y_1(0)) - y_1'(0) + L(y_1) - s^r L(y_r) + s L(y_r(0)) + y_r'(0) - r L(y_r) = 0 \\ s L(y_1) - y_1(0) + s L(y_r) - y_r(0) = \frac{s}{s^r+1} + \frac{r \times r s}{s^r+r} \end{cases}$$

داره ها مندرج ذلی کی بنیم

$$\begin{cases} (s^r+1)y_1 - (s^r+r)y_r = -1 \\ s y_1 + s y_r = \frac{r}{s^r+1} + \frac{r s}{s^r+r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (s^r+1)y_1 - (s^r+r)y_r = -1 \\ y_1 + y_r = \frac{1}{s^r+1} + \frac{r}{s^r+r} \end{cases}$$

ن
دستینا ضرائب

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^r+1 & -(s^r+r) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = s^r+1 + s^r+r = r s^r + s$$

سریلا

$$\Delta y_1 = \begin{vmatrix} -1 & -(s^r+r) \\ \frac{1}{s^r+1} + \frac{r}{s^r+r} & 1 \end{vmatrix} = -1 + (s^r+r) \left[\frac{1}{s^r+1} + \frac{r}{s^r+r} \right]$$

$$= -1 + \frac{s^r+r}{s^r+1} + r = \frac{s^r+r}{s^r+1} + r$$

$$\Delta y_r = \begin{vmatrix} s^r+1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{s^r+1} + \frac{r}{s^r+r} \end{vmatrix} = (s^r+1) \left(\frac{1}{s^r+1} + \frac{r}{s^r+r} \right) + 1$$

$$= \frac{r(s^r+1)}{s^r+r} + r$$

$$y_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta} = \frac{\frac{s^r+r}{s^r+1} + r}{r s^r + s} = \frac{r s^r + r}{(s^r+1)(r s^r + s)}$$

$$y_r = \frac{\Delta y_r}{\Delta} = \frac{r + \frac{r(s^r+1)}{s^r+r}}{r s^r + s} = \frac{r s^r + r + r s^r + r}{(s^r+r)(r s^r + s)} = \frac{2 r s^r + 2 r}{(s^r+r)(r s^r + s)}$$

تابع تحلیلی تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ تحلیلی داریم در صورتی که دارای بسط تیلور باشد یعنی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

نقطه‌ای: نقطه $x=a$ برای معادله $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ (*)

صورتی که $f(a) \neq 0$ باشد

$$EX: (1-x^2)y'' + 5xy' + 7y = 0$$

این دو نقطه غیر معمولی (صفر) $x = \pm 1$ $(1-x^2) = 0$

هستند و نقطه $x=0$ نقطه معمولی

تفسیر: اگر نقطه $x=a$ یک نقطه معمولی معادله $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$

باشد در این صورت معادله فوق دارای جوابی به فرم یک سری توانی به شکل زیر می‌باشد.

$$y = c_1 (x-a)^{\alpha_1} + c_2 (x-a)^{\alpha_2} \quad (\text{یک سری توانی بصورت } (x-a)^{\alpha_1} \text{ و } (x-a)^{\alpha_2})$$

حال اگر $a=0$ باشد داریم:

$$y = c_1 (x)^{\alpha_1} + c_2 (x)^{\alpha_2} \quad (\text{سری توانی بصورت } x^{\alpha_1} \text{ و } x^{\alpha_2})$$

مثال: جواب معادله $y'' - \alpha y' + y = 0$ را به صورت یک سری توانی بنویسید.

$$f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = -\alpha$$

$$f_3(x) = 1$$

$$f_1(0) = 1 \neq 0 \quad \text{چون}$$

صفر یک نقطه معمولی است پس جواب به فرم سری توانی داریم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

معادله را مشتق گیری ادا می‌کنیم و به فرم معادله خاص

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

و برای $x=0$ معادله می‌باشد

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

برای آنکه سری ها از نقطه یکسانی شروع بشود که بتوان از آنجا ماکزیمم گیری کرد. در سری های اول

برای $n \geq 2$ می گذاریم تا سری از $n=0$ شروع بشود. در سری دوم نیز چون اگر n از

صفر شروع شود کل سری صفری شود پس تأثیرات سری را از نقطه 2 شروع می کنیم.

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)(n+2-1)C_{n+2} x^{n+2-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n [(n+2)(n+1)C_{n+2} - nC_n + C_n] = 0$$

چون برابر صفر شده فقط ضرایب می تواند حاصل صفرگذاشته باشند:

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} - nC_n + C_n = 0 \quad (n+2)(n+1)C_{n+2} = (n-1)C_n$$

$$C_{n+2} = \frac{(n-1)C_n}{(n+2)(n+1)} \quad \text{فرمول بازگشتی} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=0 \rightarrow C_2 = \frac{(0-1)C_0}{(0+2)(0+1)} = -\frac{C_0}{2} \\ n=1 \rightarrow C_3 = 0 \\ n=2 \rightarrow C_4 = \frac{C_2}{2} = -\frac{C_0}{2^2} \\ n=3 \rightarrow C_5 = 0 \\ n=4 \rightarrow C_6 = 0 \end{array} \right.$$

$$J = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \dots$$

$$J = C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2} x^2 + 0 - \frac{C_0}{2^2} x^4 + 0 + \dots$$

$$J = C_0 \left(-\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2^2} x^4 + 1 + \dots \right) + C_1 x$$

سری توانی با ضرایب متناوب

Subject:

Year. 200 Month. Day.

معادله تفراندر: هر معادله در بر منجم $m(m+1)j - 2\alpha j' + (1-\alpha^2)j'' = 0$ را معادله تفراندری گویند

صفر یک نقطه معروضی است. $f_1(0) = 1 \neq 0$

پس معادله دارای جوابی به صورت $j = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ میباشد

$$داریم: j' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad j'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

حال در معادله جایگزینی کنیم. (مضامین $m(m+1) = 2$ در تفراندری داریم) و بنویسیم:

$$(1-\alpha^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

تغییر اندیس می دهیم. $n+2 = n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n [(n+2)(n+1) c_{n+2} - n(n-1) c_n - 2\alpha n c_n + c_n] = 0$$

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} - n(n-1) c_n - 2\alpha n c_n + c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{n(n-1) + 2\alpha n - 1}{(n+2)(n+1)} c_n = \frac{n^2 + n - 1}{(n+2)(n+1)} c_n$$

$$\begin{cases} n=0 \rightarrow c_2 = \frac{-1}{2} c_0 = -\frac{1}{2} c_0 & n=1 \rightarrow c_3 = 0 \rightarrow c_4 = c_5 = c_6 = 0 \dots \\ n=1 \rightarrow c_3 = \frac{-1}{6} c_1 \end{cases}$$

Subject:

Year, 200 Month, Day.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$= c_0 + c_1 x + (-\frac{r}{p} c_0 x^r) - \frac{r}{p} c_1 x^{r+1} + \dots +$$

$$= c_0 (1 - \frac{r}{p} x^r) + c_1 (x - \frac{r}{p} x^{r+1} + \dots)$$

روش خرد بینوس (روش توسعه یافته سری تانگن) : $f_1(x) y'' + f_2(x) y' + f_3(x) y = 0$

$f_1(x) = 0$ نقطه صفر را مستقر بنامیم.

$$\text{قضیه: } y'' + \frac{g(x)}{x} y' + \frac{h(x)}{x^2} y = 0, \quad g(x), h(x) \text{ نقطه صفر کلی ندارند (بالا به پایین)}$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{تبدیل به سری توسعه یافته به ازای } r \text{ در مخرج}$$

(صفر یک نقطه مستقر منظم)

$$Ex: x^2 y'' + x g(x) y' + h(x) y = 0$$

$$\div x^2 \rightarrow y'' + \frac{g(x)}{x} y' + \frac{h(x)}{x^2} y = 0 \quad \text{تبدیل به صورت استاندارد}$$

$$\begin{cases} g(x) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} x + \frac{g''(0)}{2!} x^2 + \dots \\ h(x) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} x + \frac{h''(0)}{2!} x^2 + \dots \end{cases} \quad \text{سبک تبدیل}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

جایگذاری در معادله:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r} \left[g(0) + \frac{g'(0)}{1!} x + \frac{g''(0)}{2!} x^2 + \dots \right]$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \left[h(0) + \frac{h'(0)}{1!} x + \frac{h''(0)}{2!} x^2 + \dots \right] = 0$$

حرف برادر صفر شدیم ضریب های آن صفر اند

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$n=0 \quad \{ r(n-1)C + rCg(0) + Ch(0) = 0$$

$$\{ r' - r + r g(0) + h(0) = 0$$

$$r' + (g(0) - 1)r + h(0) = 0$$

زیر لیسیم می‌کنیم

حال اگر r_1 و r_2 در $\mathbb{R}$ باشد (شعبه‌های مختلف)

$$1) r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z} \quad \{ J_1 = \alpha^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha^n$$

$$\{ J_2 = \alpha^{r'} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha^n$$

$$2) r_1 = r_2 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1-g(0)}{r} \Rightarrow \{ J_1 = \alpha^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha^n$$

$$\{ J_2 = J_1 \ln \alpha + \alpha^{r'} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \alpha^n$$

$$3) r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} \quad \{ J_1 = \alpha^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha^n$$

$$\{ J_2 = k J_1 \ln \alpha + \alpha^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha^n$$

$$J = \alpha J_1 + \beta J_2$$

در صورتی که α و β را به گونه‌ای انتخاب کنیم که J جواب باشد.

$$EX: r \alpha J'' + r(1-\alpha) J' - J = 0 \quad \div \quad r \alpha J'' + r(1-\alpha) J' - J = 0$$

$$J'' + \frac{r(1-\alpha)}{r\alpha} J' - \frac{1}{r\alpha} J = 0 \Rightarrow J'' + \frac{r(1-\alpha)}{r\alpha} J' - \frac{1}{r\alpha} J = 0$$

باید طبق فرمول $g(m)$ و $h(m)$ را بیابیم. $g(m)$ و $h(m)$ را بیابیم و در فرمول قرار دهیم. α و β را بیابیم.

$$J'' + \frac{(1-\alpha)}{r\alpha} J' - \frac{1}{r\alpha} J = 0 \Rightarrow J'' + \frac{(1-\alpha)}{r\alpha} J' - \frac{1}{r\alpha} J = 0$$

$$g(\alpha) = \frac{1-\alpha}{r} \quad h(\alpha) = -\frac{1}{r\alpha}$$

Subject:

Year, 200 Month, Day,

طراحی $y'' + (g(x)-1)y + h(x) = 0$ طبق فصل $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = 0$

$$y'' + (\frac{1}{x} - 1)y + 0 = 0 \quad y'' - \frac{1}{x}y = 0 \quad y(r - \frac{1}{x}) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = y_2 = 0 - (\frac{1}{x}) \\ = \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین $y_1 = y_2 = \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$ مع اینست که اینها را می توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} y_1 = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y_2 = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{\frac{1}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = A y_1 + B y_2 \end{array} \right.$$

EX2: $x^r y'' - x y' + (x^r + 1)y = 0 \xrightarrow{\div x^r} y'' - \frac{x}{x^r} y' + \frac{x^r + 1}{x^r} y = 0$

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{x^r + 1}{x^r} y = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = -1 & g(x) = -1 \\ h(x) = x^r + 1 & h(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' + (g(x)-1)y + h(x) = 0 \longrightarrow y'' + (-1-1)y + 1 = 0 \quad y'' - 2y + 1 = 0 \quad y'' - 2y + 1 = 0$$

$$y'' - 2y + 1 = 0 \quad (y-1)'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \end{cases} \quad \text{پس می توانیم بنویسیم} \quad y_1 = y_2$$

$$\begin{cases} y_1 = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = A y_1 + B y_2 \end{array} \right.$$

ردیف	نام محصول	تعداد	قیمت (تومان)
فیلم های مهندسی عمران			
۱	مجموعه ۱۲ فیلم آموزشی مهندسی عمران دوبله	4 DVD	۸۰۰۰
۲	مهندسی بینهایت , مجموعه ۵۴ مستند آموزشی	6 DVD	۹۵۰۰
۳	۵۱ فیلم آموزشی مهندسی عمران - ابر سازه ها	6 DVD	۱۰۰۰۰
۴	مجموعه اشتباهات مهندسی	4 DVD	۱۰۰۰۰
۵	مستند برج دبی	1 DVD	۲۵۰۰
۶	مقالات چهارمین کنگره سراسری مهندسی عمران	1 CD	۳۵۰۰
۷	مقالات هفتمین کنگره سراسری مهندسی عمران	1 CD	۳۵۰۰
۸	فیلم مراحل ساخت برج ماریچ در اسپانیا	1 CD	۲۵۰۰
۹	مستند آموزشی بررسی ساخت برترین آسمانخراشها	1 CD	۲۵۰۰
۱۰	فیلم مستند گسترش مسجد النبی	2 CD	۳۰۰۰
۱۱	فیلم آموزشی آشنایی و بررسی جزئیات برج بلند سیرز در شیکاگو آمریکا	1 CD	۲۵۰۰
۱۲	فیلم آموزشی ساخت فرودگاه کانسای ژاپن	1 CD	۲۵۰۰
۱۳	فیلم آموزشی مراحل ساخت سد کارون ۳	2 CD	۴۵۰۰
۱۴	فیلم آموزشی مراحل ساخت پل های کارون ۳	1 CD	۲۷۰۰
۱۵	مجموعه فیلم های مستند عظیم تر بسازید	3 DVD	۴۰۰۰
۱۶	مستند آموزشی زلزله های عظیم	1 DVD	۲۵۰۰
محصولات مربوط به معماری			
۱۷	ماجرای جویی در معماری (دوبله فارسی)	2 DVD	۴۵۰۰
۱۸	مجموعه مجلات و کتابهای مهندسی معماری و دکراسیون داخلی تا سال ۲۰۱۰	5 DVD	۱۰۰۰۰
۱۹	مجموعه فیلمهای برترین آثار بهترین معماران جهان	2 DVD	۴۵۰۰
۲۰	Help فارسی نرم افزار اتوکد به همراه کتاب الکترونیکی آموزشی ۶۲۰ صفحه ای	1 CD	۴۰۰۰
۲۱	جدیدترین آبجکتهای سه بعدی معماری برای 3D Max	1 DVD	۳۵۰۰
مجموعه نقشه های اتوکد			
۲۲	سمبلهای اتوکد	1 CD	۲۵۰۰
۲۳	۳۴۰ نقشه ساختمانهای اداری تجاری و فرهنگی و ...	1 CD	۳۰۰۰
۲۴	بیش از ۱۰۰ نقشه معماری ساختمان	1 CD	۳۰۰۰
۲۵	مجموعه نقشه اتوکد طرح هادی و ثبتي	1 CD	۳۰۰۰
۲۶	مجموعه نقشه های اتوکد معماری و سازه	1 CD	۳۰۰۰
۲۷	۸۰۰ نقشه سازه ساختمان در محیط اتوکد	1 CD	۳۰۰۰
۲۸	بیش از ۱۰۰ نقشه سه بعدی	1 CD	۳۰۰۰
آموزش نرم افزار های عمران و معماری			
۲۹	آموزش ETABS	1 DVD	۷۵۰۰
۳۰	آموزش SAFE	1 DVD	۶۵۰۰
۳۱	آموزش 2010 AOUTOCAD	1 DVD	۶۵۰۰
۳۲	آموزش 3D HOME	1 DVD	۶۵۰۰
۳۳	آموزش ARCHICAD	1 DVD	۶۵۰۰
۳۴	آموزش SAP	1 DVD	۸۵۰۰
۳۵	آموزش TEKLA STRUCTURES	1 DVD	۶۵۰۰

ردیف	نام محصول	تعداد	قیمت (تومان)
فیلم ها و محصولات آموزش زبان انگلیسی (ویژه)			
۳۶	مجموعه کامل آموزش زبان انگلیسی English For You (به همراه نسخه قابل نمایش در موبایل) مجموعه English For You و یا به اختصار، EFU برترین مجموعه ویدئویی آموزش زبان انگلیسی است که حقیقتاً نیاز به اسناد و کلاس را به طور کامل برطرف می کند. در این مجموعه شما انگلیسی را از اساتید انگلیسی زبان یاد می گیرید و مطمئناً تفاوت آن را با مؤسسات ایران که اکثراً اساتیدی دانشگاهی دارند متوجه خواهید شد.	6 DVD	۷۵۰۰
۳۷	سریال آموزشی زبان انگلیسی EXTRA (به همراه نسخه قابل نمایش در موبایل و فایل ورد متن) سریال آموزش زبان EXTR@-TV مجموعه ای است ویدئوی که در قالب طنز و با روشی بسیار ساده و قوی بیننده را در مسیری ویژه جهت یادگیری زبان انگلیسی قرار می دهد.	3 DVD	۴۸۰۰
۳۸	جامع ترین دوره ی آموزشی IELTS	2 DVD	۳۵۰۰
۳۹	آموزش گرامر زبان انگلیسی بصورت فیلم - Complete English Grammar Series	1 DVD	۴۰۰۰
۴۰	انگلیسی به روش اعجاب انگیز X.L.C	1 DVD	۳۵۰۰
۴۱	دوره آموزش زبان NEW Interchange Intro	1 DVD	۳۵۰۰
۴۲	بسته آموزش مکالمه Fluent English	1 CD	۳۰۰۰
۴۳	آموزش زبان انگلیسی در خواب	1 CD	۲۰۰۰
۴۴	آموزش زبان نصرت ۲ همراه با تقویت حافظه نصرت	1 DVD	۳۵۰۰

فروشگاه تخصصی مهندسی عمران و معماری افتخار دارد که در راستای بالا بردن توان علمی شما دانشجویان و مهندسين عزيز محصولات متنوع آموزشی را برای شما به عنوان اولین فروشگاه تخصصی مهندسی عمران و معماری مهیا کرده است

شما دوست گرامی میتوانید برای سفارش هر یک از محصولات به یکی از سه روش زیر اقدام فرمایید

۱ - سفارش از طریق سایت (خرید پستی - تحویل و تصویه درب منزل)

برای سفارش به این روش به سایت WWW.OMRANSHOP.IR رفته و روی دکمه خرید پستی محصول مورد نظر کلیک کنید و مشخصات خود را در فرم وارد نموده و منتظر بمانید تا بسته پستی شما توسط پستی درب منزل تحویل شما شود و همانجا طبق فاکتور مبلغ مورد نظر را به پستی تحویل دهید

۲ - سفارش تلفنی یا از طریق ایمیل

اگر به اینترنت دسترسی ندارید یا در مرحله ثبت سفارش به مشکلی برخوردید میتوانید محصولات درخواستی خود را همراه با آدرس دقیق و کد پستی و نام گیرنده به شماره همراه ۰۹۱۵۳۲۳۱۵۵۰ پیامک کنید یا با تماس تلفنی این موضوع را با همکاران ما درمیان بگذارید و یا از طریق ایمیل info@icivil.ir موارد بالا را ایمیل بزنید تا همکاران ما در فروشگاه راسا اقدام به ثبت سفارش برای شما کنند

۳ - خرید نقدی

مزیت خرید نقدی بر آنست که بسته شما زودتر به دست شما خواهد رسید و شما از هزینه پستی معاف هستید برای ثبت سفارش مبلغ محصولات درخواستی را به شماره حساب های اعلام شده در سایت واریز نموده و فرم خرید پستی را تکمیل کنید در صورتی که به اینترنت دسترسی ندارید با همکاران ما با شماره تماس ۰۹۱۵۳۲۳۱۵۵۰ تماس حاصل فرمایید تا شمارا راهنمایی کنند

با تشکر از شما

هدف اصلی ما بالا بردن توان مهندسی و سطح علمی شماست

با آرزوی موفقیت برای شما

www.omranshop.ir

www.icivil.ir

info@icivil.ir

09153231550

شبکه آموزشی - پژوهشی مادیج
با هدف بهبود پیشرفت علمی
و دسترسی راحت به اطلاعات
برای جامعه بزرگ علمی ایران
ایجاد شده است



madsg.com
مادیج

IRan Education & Research NETwork
(IRERNET)

