

madsage
IRan Education
Research
NETwork
(IRERNET)

شبکه آموزشی - پژوهشی مادیج
با هدف بهبود پیشرفت علمی
و دسترسی راحت به اطلاعات
برای جامعه بزرگ علمی ایران
ایجاد شده است



مادیج

شبکه آموزشی - پژوهشی ایران

madsg.com
مادیج



مطالبی در خصوص تحلیل سازه ها

فایل PDF مربوط به ویدئو

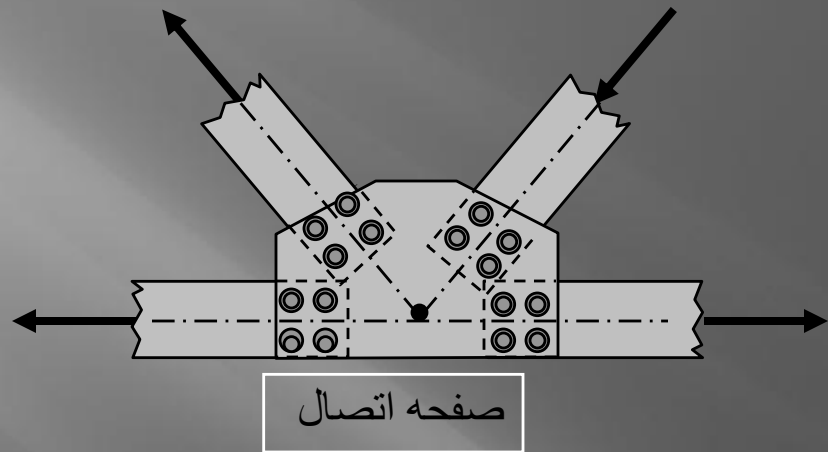


در صورت وجود اشکال لطفاً با ذکر آن و شماره صفحه به
ایمیل اینجانب اطلاع دهید. meysam4366@yaoo.com
با تشکر **میثمبرزگر**
mey30.persianguig.com



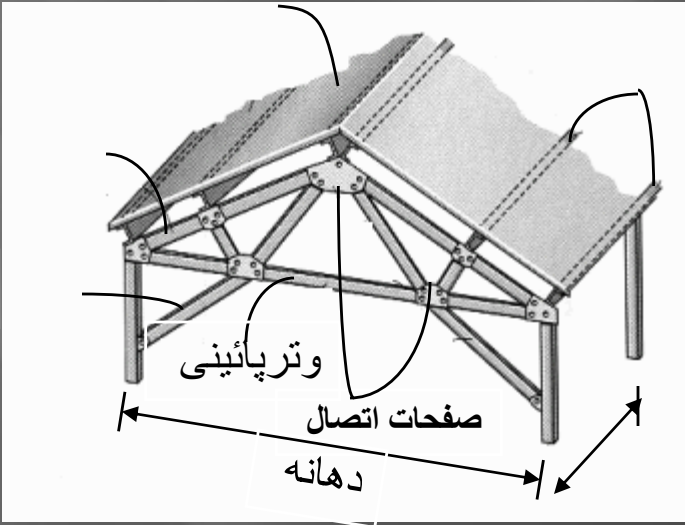
خرپا : طبقه بندی و انواع

انواع عادی خرپا



بام

• خرپای بام

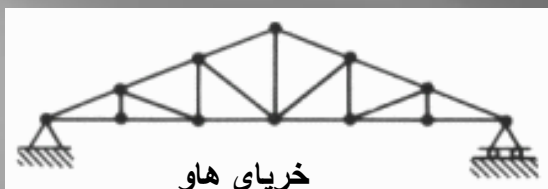


لایه ها

دهانه جانبی

وتربالایی

مهار زانوئی



خرپای هاو

Howe truss



خرپای پرات

Pratt truss



خرپای هاو

Howe truss



خرپای وارن

Warren truss



خرپای دنده اره ای

saw-tooth truss



خرپای فینک

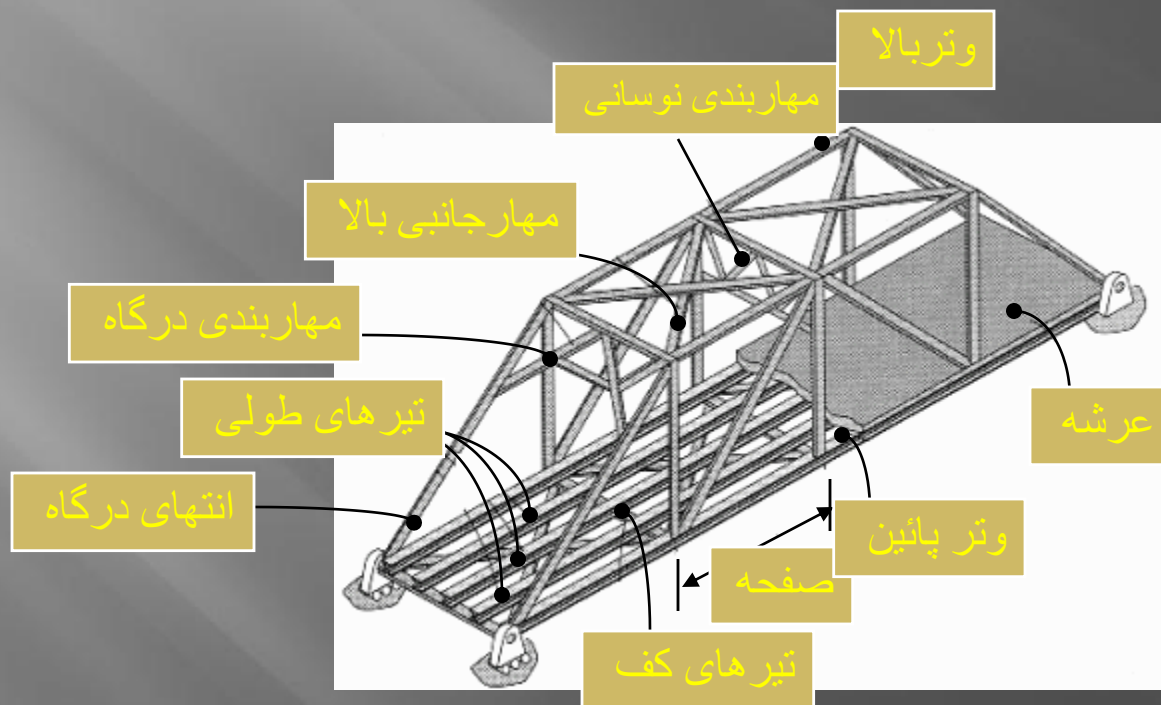
Fink truss



خرپای طاق سه مفصلی

three-hinged arch

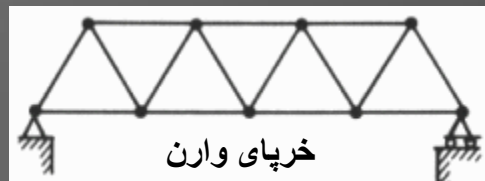
خرپای پل





خرپای طشتک پرات

trough Pratt truss



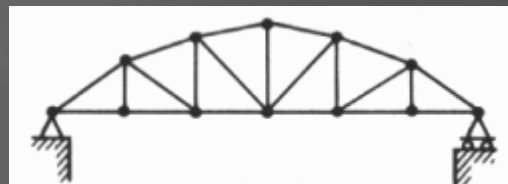
خرپای وارن

Warren truss



خرپای عرشه از نوع پرات

deck Pratt truss



خرپای پارکر

parker truss

(خرپای پرات با وتر منحنی)



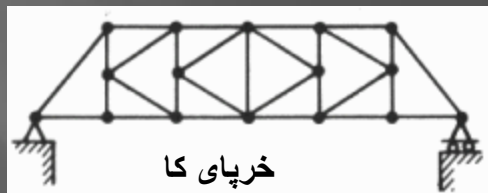
خرپای هاو

Howe truss



خرپای بالتیمور

Baltimore truss



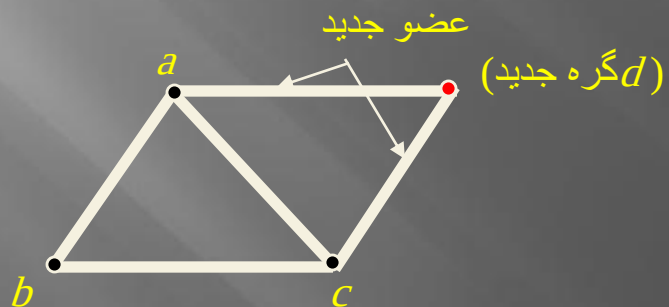
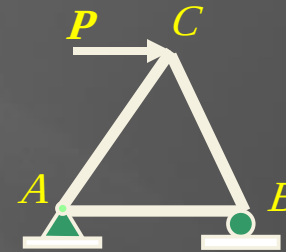
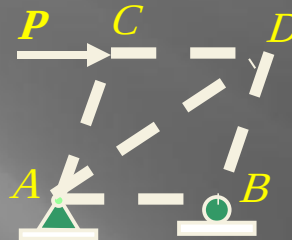
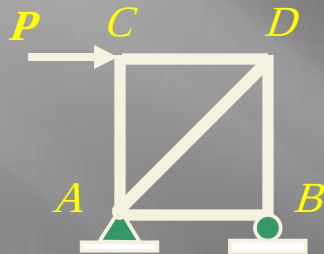
خرپای کا

K truss

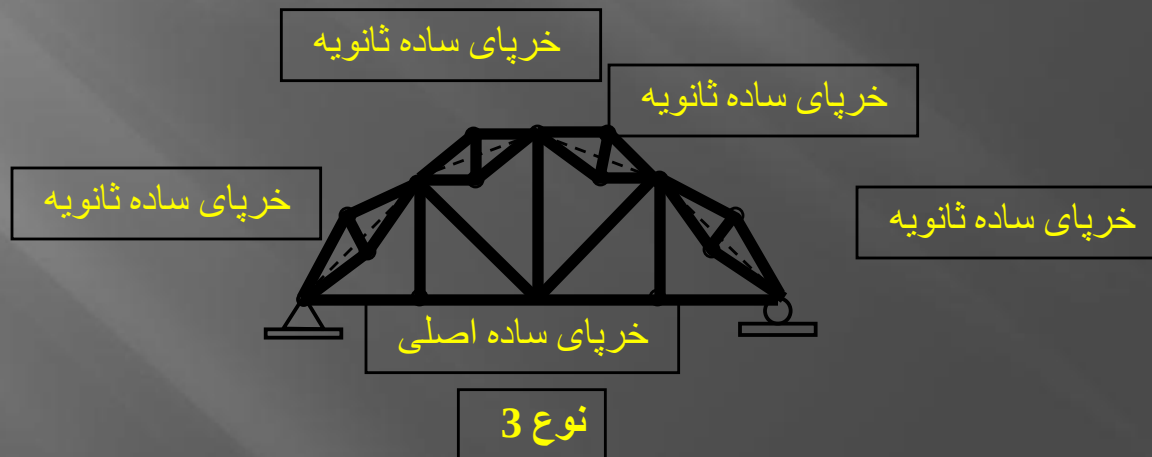
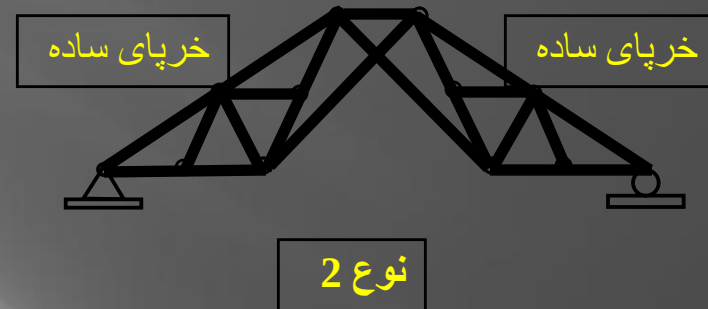
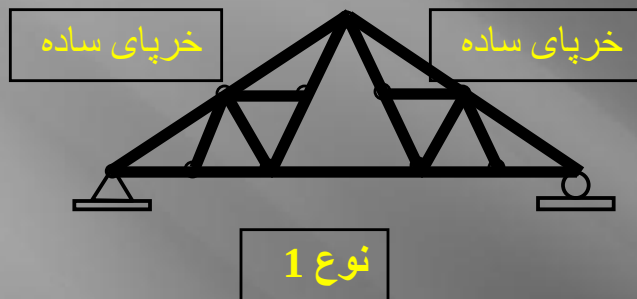
فرضیات طراحی :

- تمام اعضا در دو انتها با پینهای نرم بدون اصطکاک به یکدیگر متصل شده باشند.
- تمام بارها باید به گره ها اعمال شوند.
- توجه :
 - مرکز سطح تمام اعضا در گره ها باید بر هم منطبق باشند.
 - همه اعضا باید راست و مستقیم باشند(بدون انحنا).
 - شرایط اعمال بار باید قانون هوک را ارضا کند.

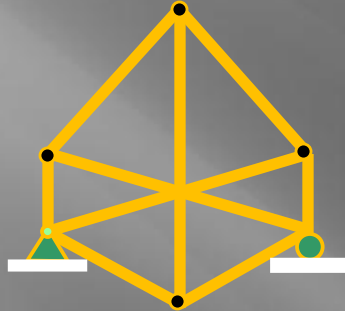
خرپای ساده



خرپای مرکب



• خریای بغرنج (پیچیده)



• معینی

تعداد گره j
تعداد عضو m
تعداد واکنشهای تکیه گاهی R

معین استاتیکی
نامعین استاتیکی

$$m + R = 2j$$

$$m + R > 2j$$

بطور کلی , درجه نامعینی از معادله : $(m + R) - 2j$ بدست می آید.

• پایداری

ناپایدار

$$m + R < 2j$$

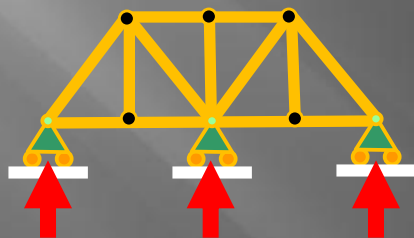
ناپایدار

$$m + R \geq 2j$$

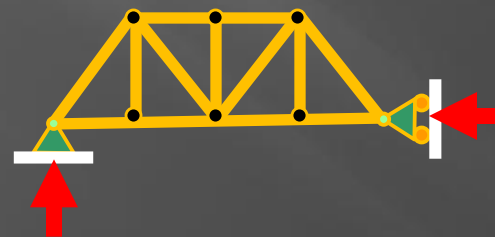
اگر امتداد واکنشهای تکیه گاهی متقارب یا موازی یا اگر برخی مولفه های خریا مکانیسم تاشوئی را تشکیل دهد



ناپایداری خارجی

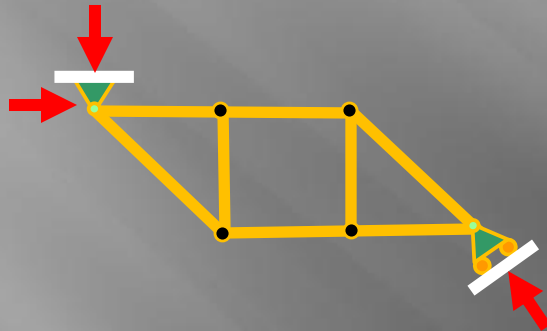


ناپایدار - واکنش های موازی

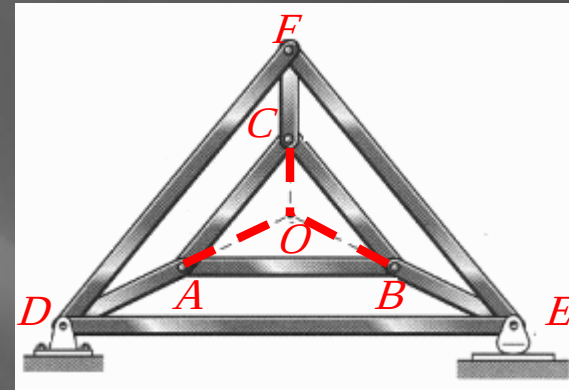


ناپایدار - واکنش های متقارب

ناپایدار داخلی

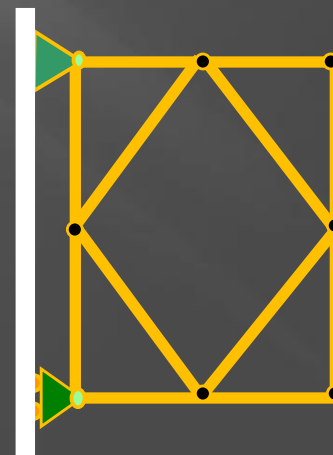
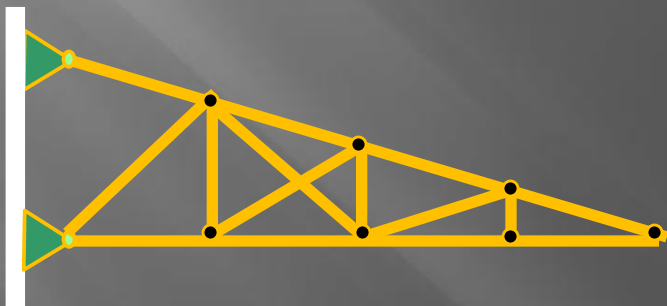
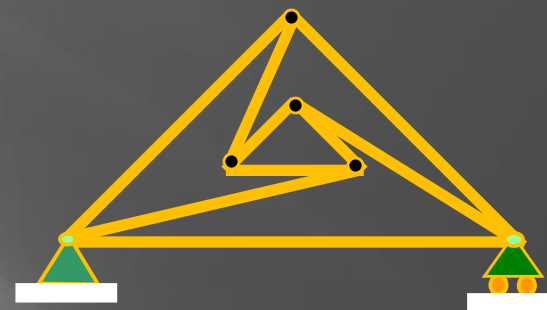
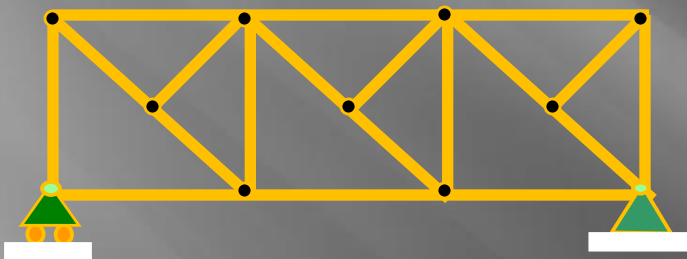


$$8 + 3 = 11 < 2 \times (6)$$

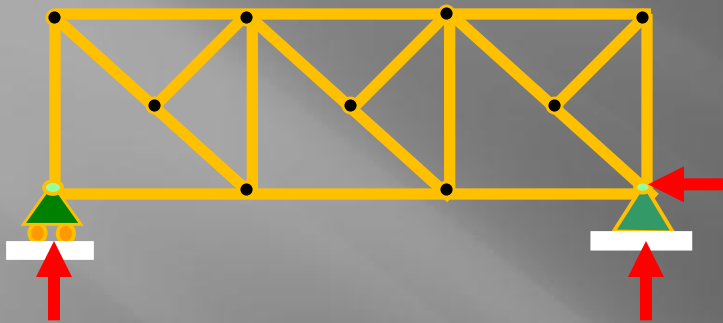


CF و AD, BE در نقطه O متقار بند

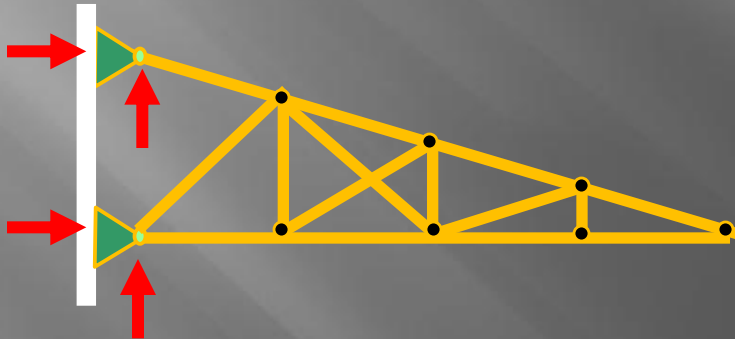
هریک از خراباهای زیر را از نظر پایداری، ناپایداری، معینی استاتیکی، نامعینی استاتیکی طبقه بندی کنید. بارگذاری دلخواه است و می توانید در هر گره ای اعمال کنید.



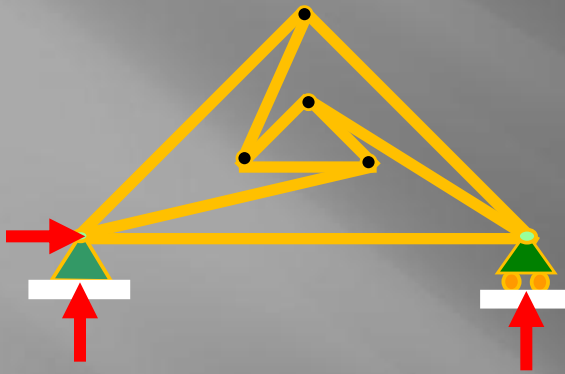
حل :



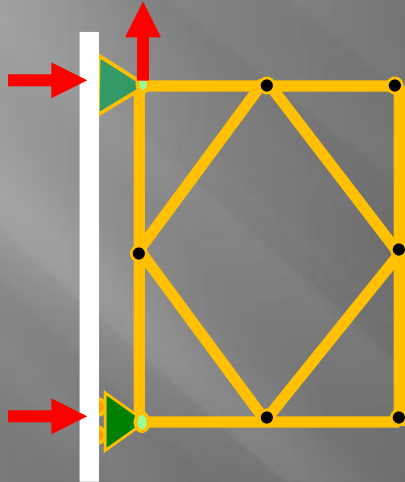
از لحاظ خارجی پایدار , زیرا واکنشها تماما موازی و متقارب نیستند . چون $m = 19$, $j = 11$, $R = 3$ از معادله خواهیم داشت : $22 = 22$ بنابراین خرپا معین استاتیکی است .
با بررسی خرپا مشخص می شود از لحاظ داخلی نیز پایدار است .



از لحاظ خارجی پایدار است . چون $m = 15$, $R = 4$, $j = 9$ لذا $m + R > 2j$ یا $19 > 18$ خرپا یک درجه نامعین استاتیکی است . با بررسی خرپا مشخص می شود از لحاظ داخلی پایدار است .



از لحاظ خارجی پایدار. چون $m=9, R=3, j=6$ لذا $m+R=12$ یا $12=12$ خریا معین استاتیکی است. با بررسی خریا مشخص می شود از لحاظ داخلی پایدار است.



از لحاظ خارجی پایدار. چون $m=12, R=3, j=8$ لذا $b+r < 2j$ یا $15 < 16$ خریا ناپایدار داخلی است.

خرپا: روش مفصل و مقطع

روش مفصلها

- وقتی خریادر تعادل است، تمام مفصلهایش نیز باید در تعادل باشند.
- روش مفصلها را وقتی معادلات تعادل در مفصلها برقرار است و نیرو به گره وارد میشود می توان بکار بست.

- تمام اعضا راست هستند و نیرو و عضو در یک صفحه میباشند
شرایط دوران و لنگر بطور خودکار ارضا شده اند تنها لازم است معادلات $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ برقرار باشند.

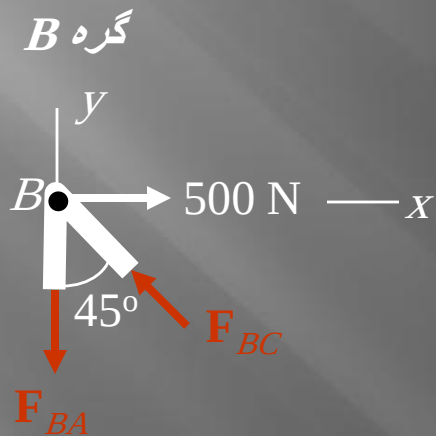
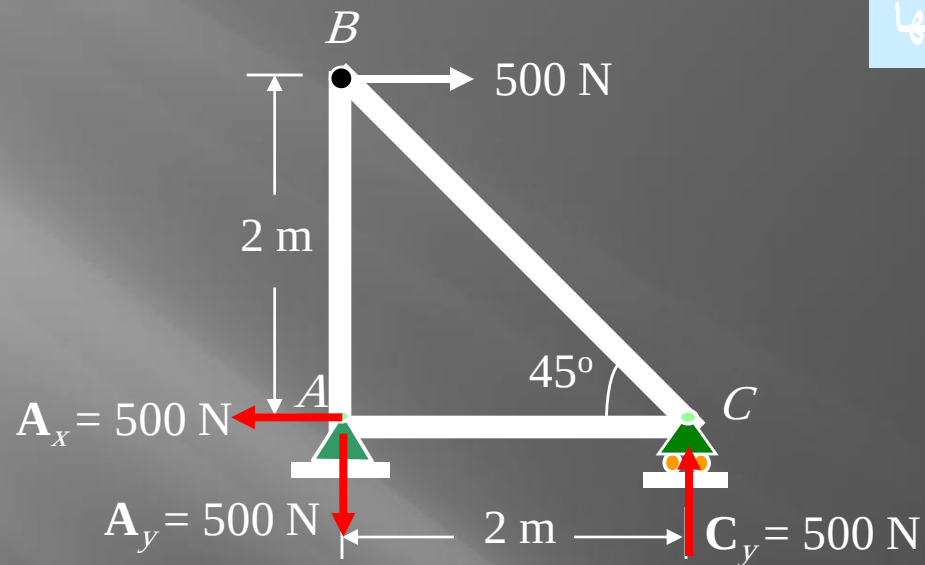
□ نمودار جسم آزاد را در گره ای که حداقل یک نیرو به آن وارد شده است رسم می کنیم (ممکن است لازم باشد که در ابتدا نیروهای تکیه گاهی را تعیین کنیم)

● نیروهای مجهول را مشخص می کنیم

- همیشه فرض می کنیم نیروهای مجهول در عضو کششی هستند گره را به کشش وادار می کنند.
- در انتها اگر علامت نیرو منفی بدست آمد باید علامت آنرا قرینه کنیم.

- محورهای مختصات را رسم و نیروها را روی آن تجزیه می کنیم.
- معادلات $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ را برقرار کرده و نیروهای مجهول را بدست می آوریم.
- در ادامه به روش مشابه از گره به گره دیگر حرکت کرده و تمام نیروهای مجهول را پیدا می کنیم.

● نیرو در اعضای تحت فشار به سمت گره (مفصل را فشار میدهد) و در اعضای تحت کشش از گره دور میشوند.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

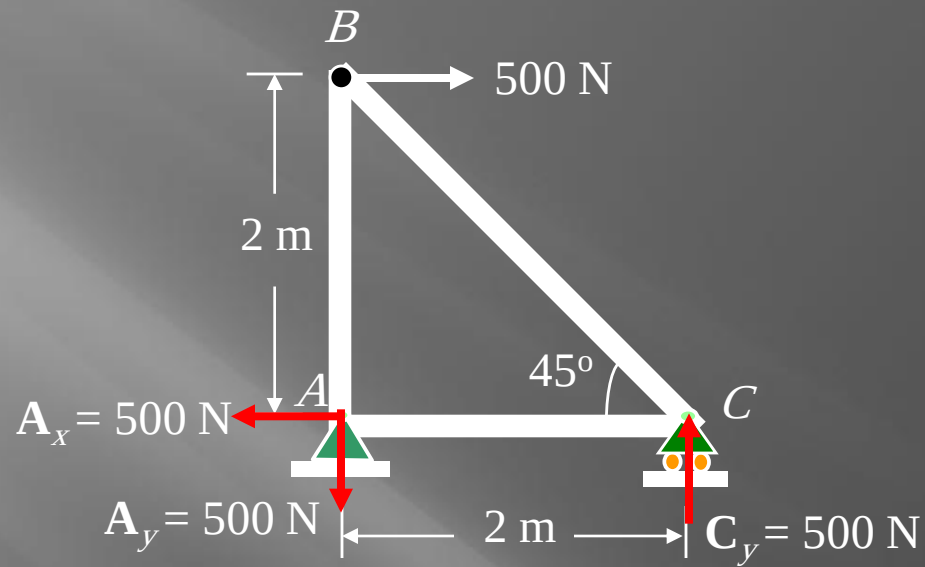
$$500 - F_{BC} \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{BC} = 707.11 \text{ N (C)}$$

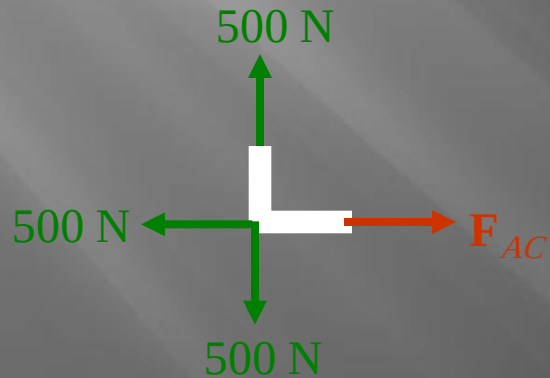
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$- F_{BA} + F_{BC} \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{BA} = 500 \text{ N (T)}$$



گره A



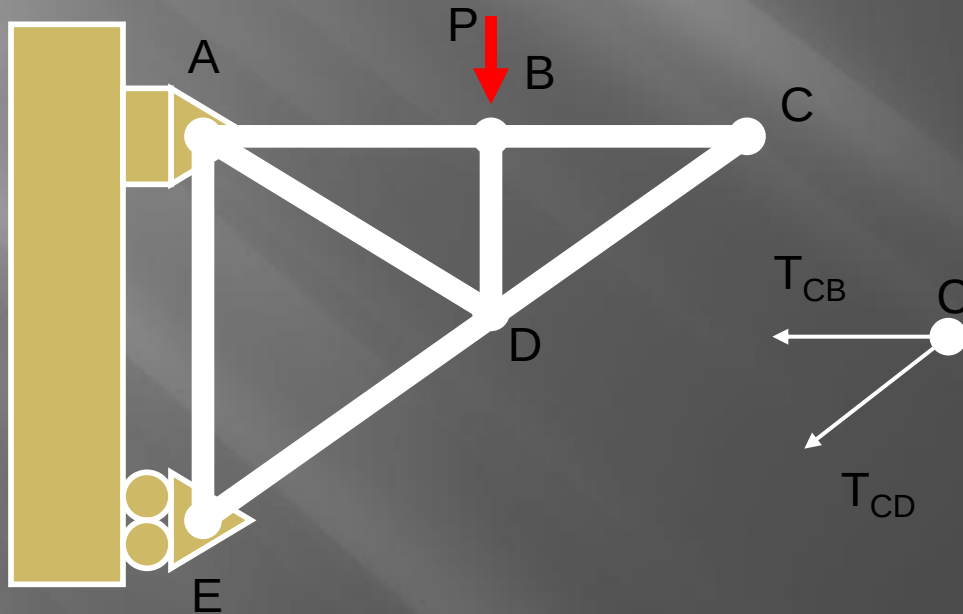
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$500 - F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = 500 \text{ N (T)}$$

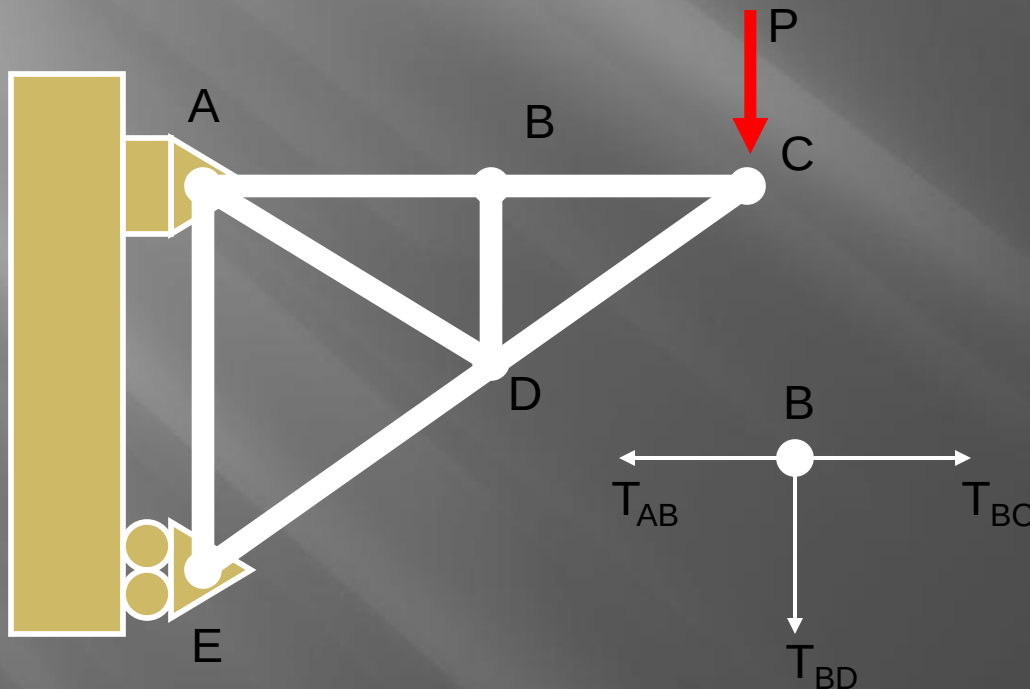
اعضای صفر نیرویی

- با تحلیلهای مکرر و بدست آوردن نیروی اعضا می توان عضو هایی که نیرویی را حمل نمی کنند شناسایی کرد
 - به موارد زیر توجه کنید:
- در گره هایی که دو عضو غیر متصل به تکیه گاه دارند و فاقد نیروی خارجی اند هر دو عضو صفر نیرویی اند..



در اینجا BC و CD
صفر نیرویی اند.

□ وقتی سه عضو در یک گره به هم می رسند طوری که دو عضو در یک راستا و عضو سوم با آنها زاویه ای می سازد در صورتیکه به گره نیرویی خارجی وارد نشود، عضو سوم صفر نیرویی است.

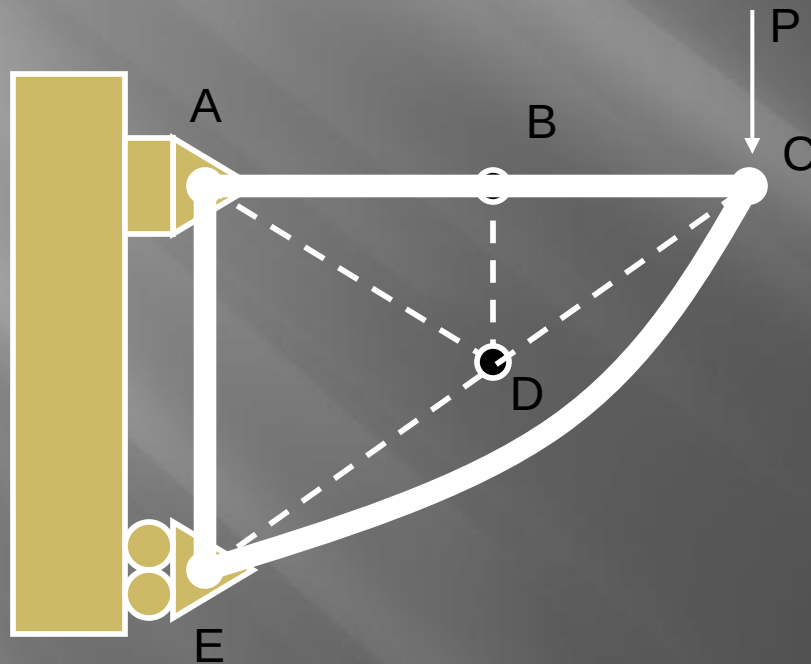


در اینجا، به گره B هیچ نیرویی وارد نمیشود لذا عضو BD صفر نیرویی است.

همچنین: $T_{AB} = T_{BC}$

□ وقتی اعضای صفر نیرویی برداشته شوند ممکن است :

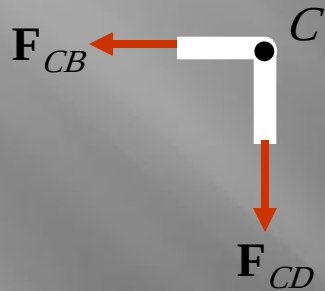
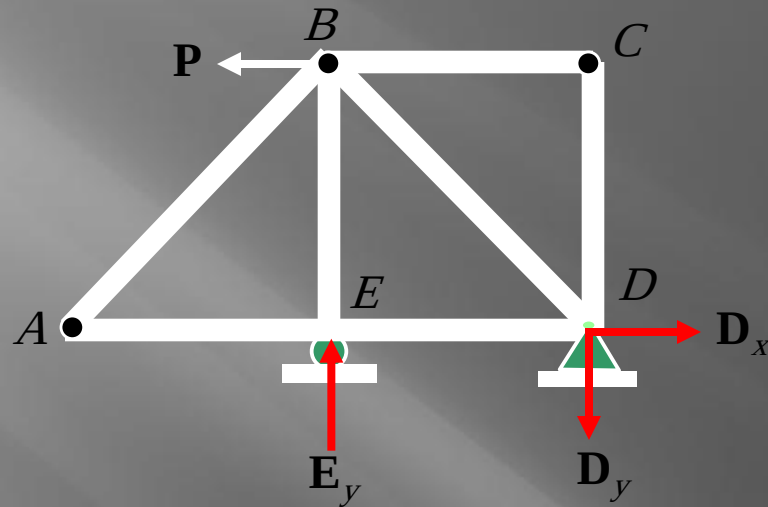
- هر تغییری در بارگذاری منجر به حرکت اعضا دیگر شود.
- پایداری خریا دستخوش تغییر شود.



ممکن است فکر کنید بابر داشتن AD و BD یک مثلث ساخته می شود...

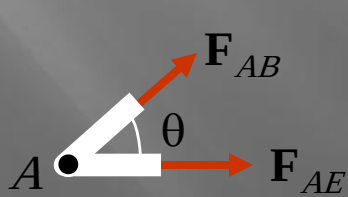
با این کار الزامات در شرایط ایستایی ارضا می شوند

در حالیکه عضو CE عضو فشاری و مستعد به کمانش می باشد



$$+\rightarrow F_{CB} = 0 \quad \Sigma F_x = 0:$$

$$+\uparrow F_{CD} = 0 \quad \Sigma F_y = 0:$$



$$+\uparrow F_{AB} = 0$$

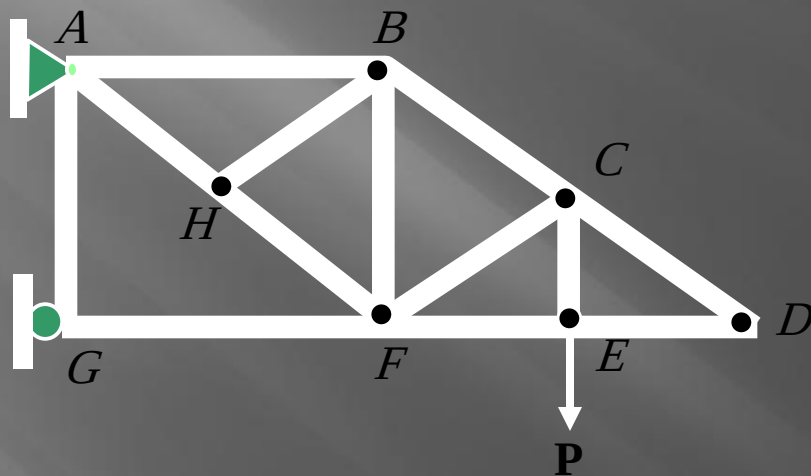
$$F_{AB} \sin \theta = 0, \quad \Sigma F_y = 0:$$

$$+\rightarrow F_{AE} = 0$$

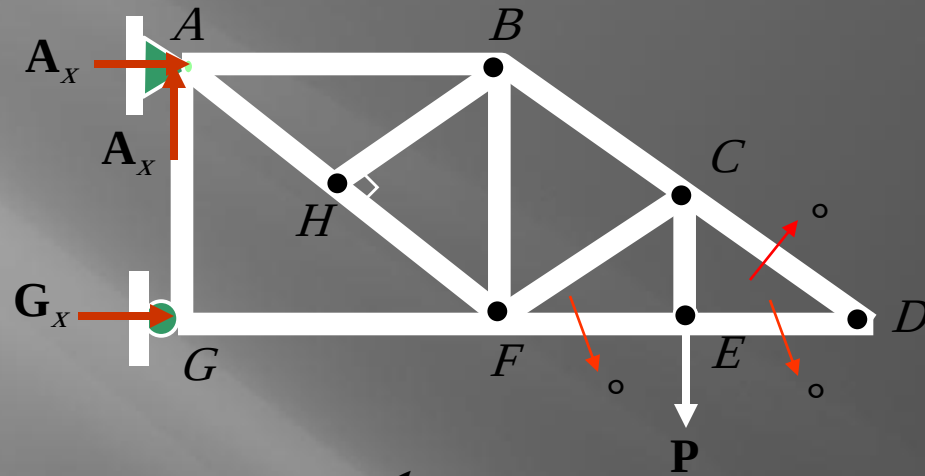
$$F_{AE} + 0 = 0, \quad \Sigma F_x = 0:$$

مثال:

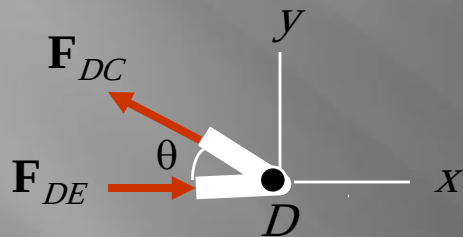
با استفاده از روش مفاصل اعضای صفر نیرویی را در خربای زیر نشان دهید.



حل :



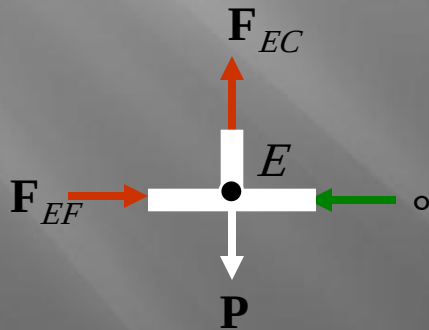
گره D



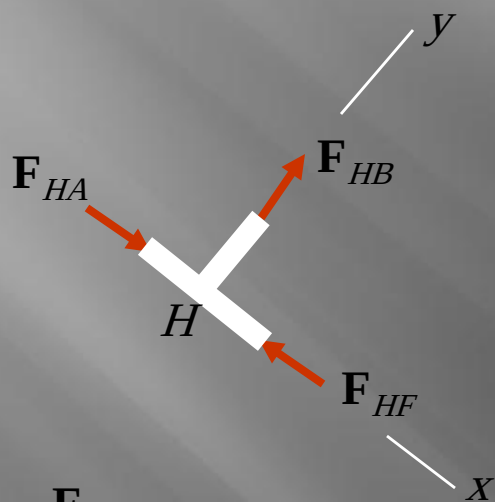
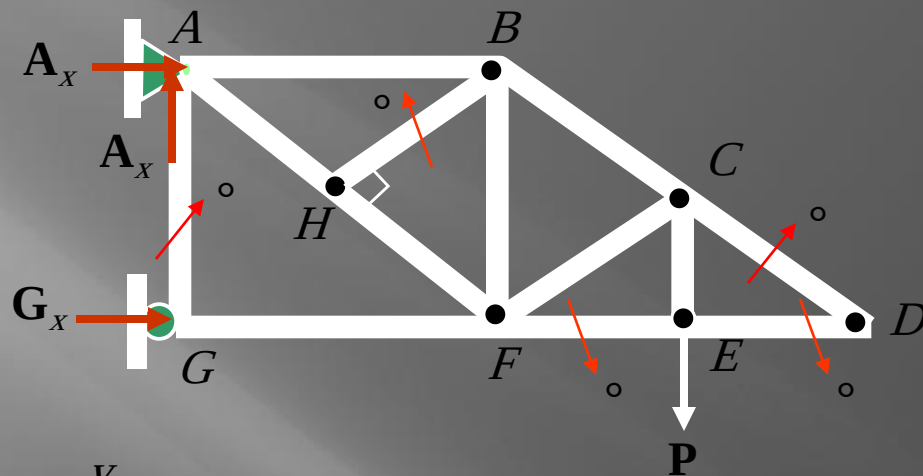
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: F_{DC} = 0 \quad F_{DC} \sin \theta = 0,$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: F_{DE} = 0 \quad F_{DE} + 0 = 0,$$

گره E

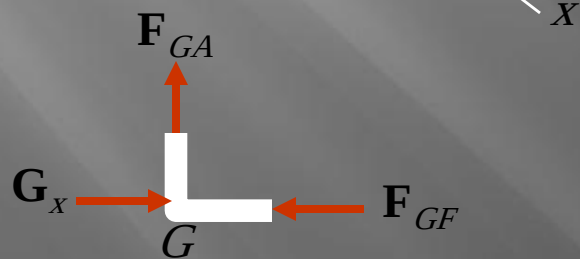


$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: F_{EF} = 0$$



گره H

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{HB} = 0$$



گره G

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{GA} = 0$$

روش مقاطع

□ وقتی جسمی در تعادل است آنگاه هر قسمت از آن جسم نیز در تعادل خواهد بود.

□ روش تحلیل

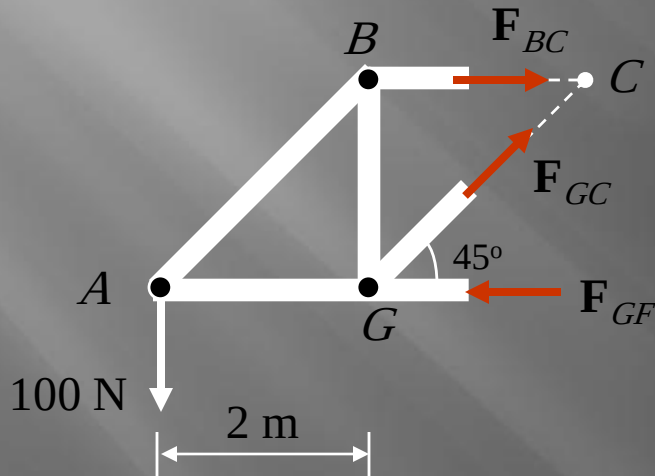
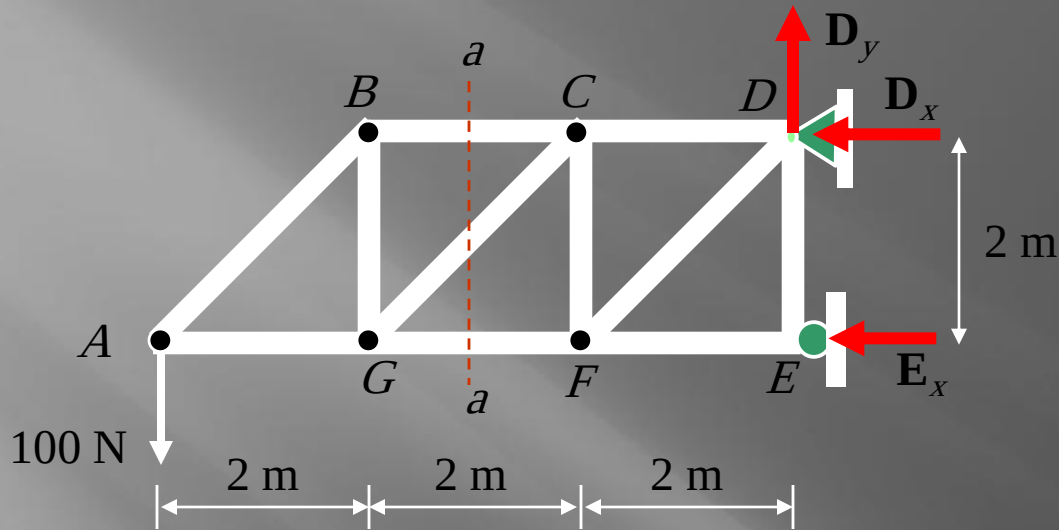
■ بازدن مقطع یا برشی در قسمتی از خریا که نیرو در آن مشخص است شروع میکنیم.

■ ممکن است قبل از جدا کردن خریا لازم باشد نیروهای تکیه گاهی را تعیین کنیم. سپس بانوشتن معادلات تعادل برای قسمتی که نیروها در آن مجهول است ادامه می دهیم.

● جسم آزاد را برای قسمتی که کمترین نیرو به آن وارد شده است می کشیم.

● سپس به ترتیب نیروهای مجهول را با کمک معادلات تعادل بدست خواهیم آورد.

روش مقاطع



$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0:$$

$$100(2) - F_{BC}(2) = 0$$

$$F_{BC} = 100 \text{ N (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$-100 + F_{GC} \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{GC} = 141.42 \text{ N (T)}$$

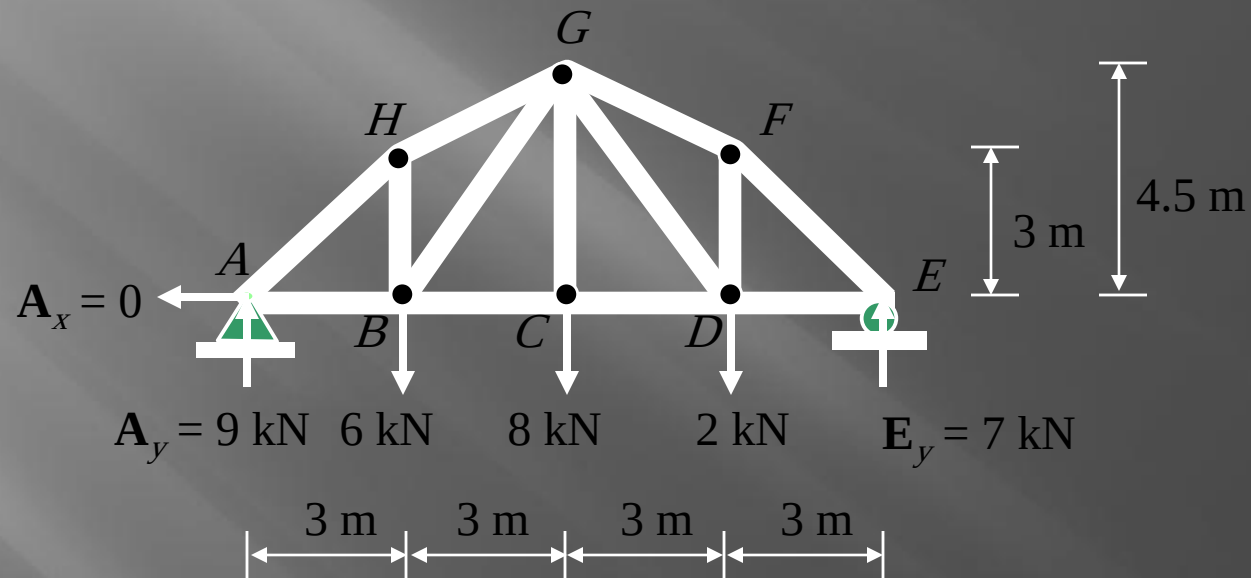
$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0:$$

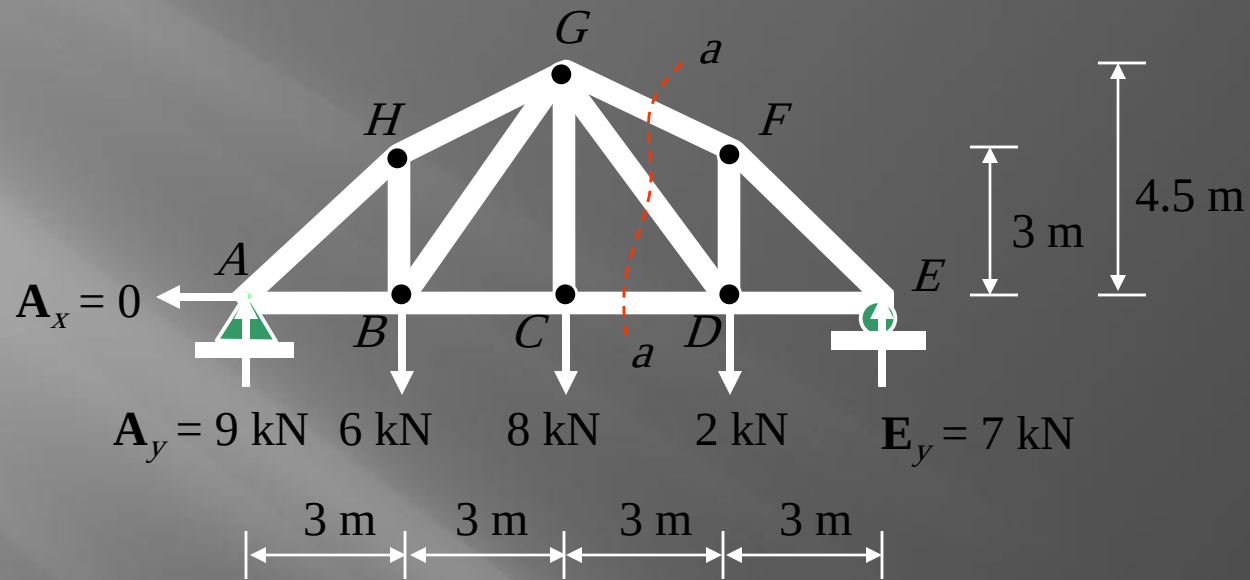
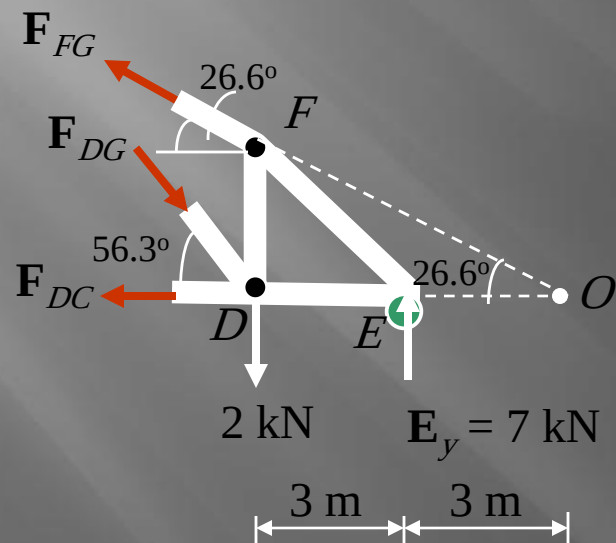
$$100(4) - F_{GF}(2) = 0$$

$$F_{GF} = 200 \text{ N (C)}$$

مثال:

نیروی اعضای GF و GD از خریای شکل زیر را تعیین کنید. این اعضا در کشش هستند یا فشار.



مقطع *a-a*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0:$$

$$F_{FG} \sin 26.6^\circ (3.6) + 7(3) = 0,$$

$$F_{FG} = -17.83 \text{ kN (C)}$$

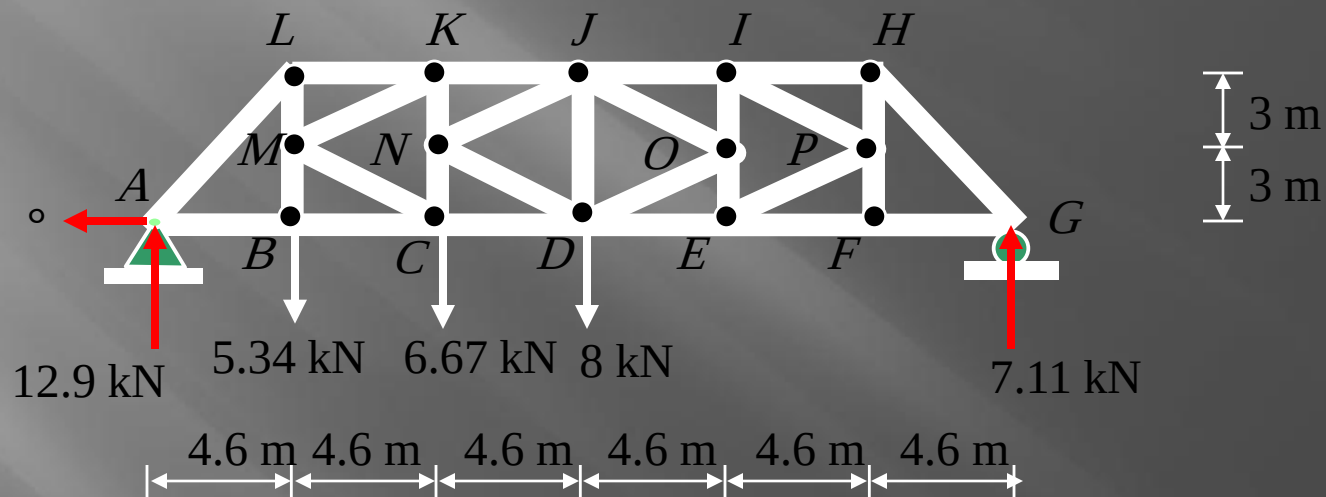
$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = 0:$$

$$- 7(3) + 2(6) + F_{DG} \sin 56.3^\circ (6) = 0,$$

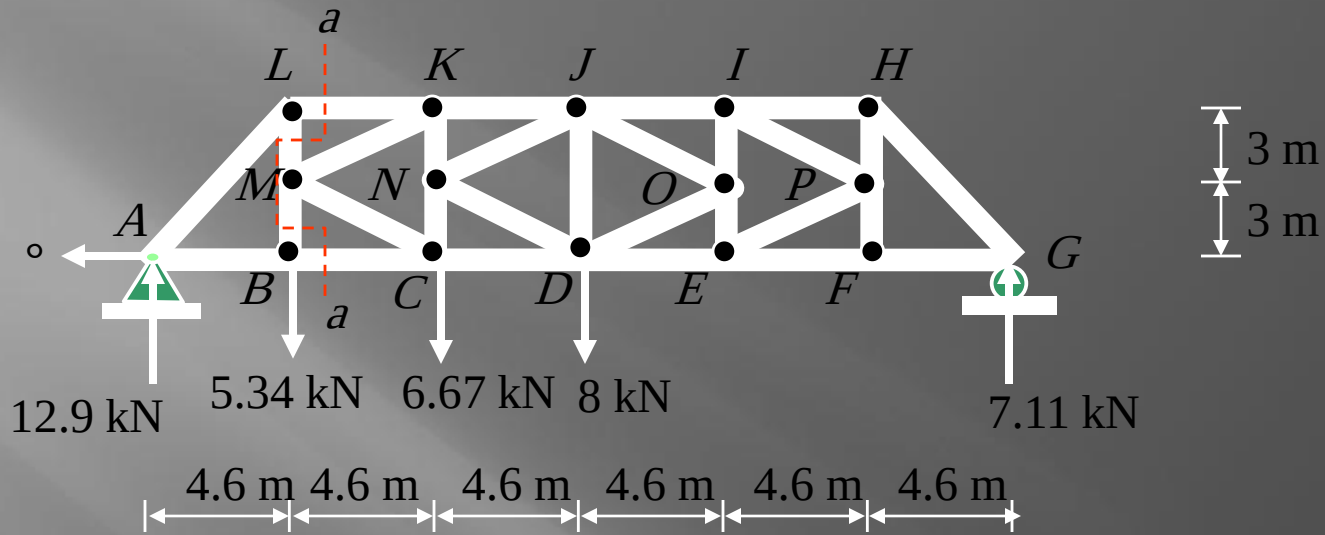
$$F_{DG} = 1.80 \text{ kN (C)}$$

مثال :

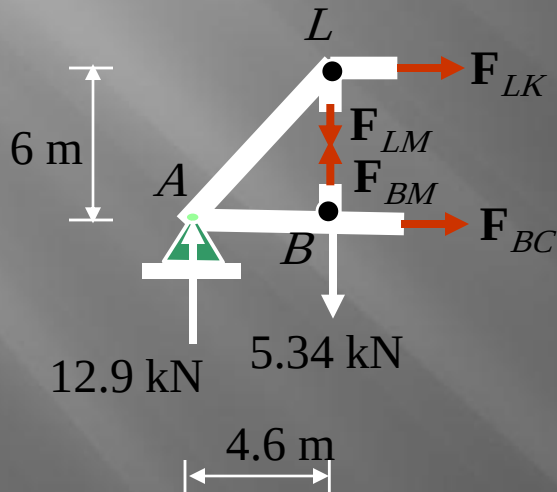
نیروی اعضای BC و MC از خربای K شکل زیر بدست آورید.



حل:



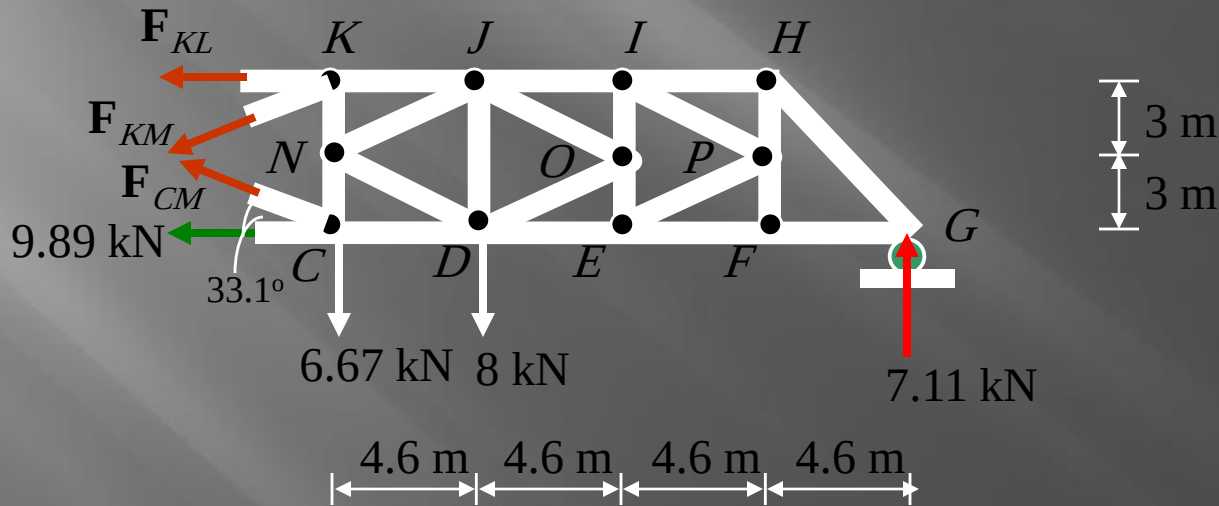
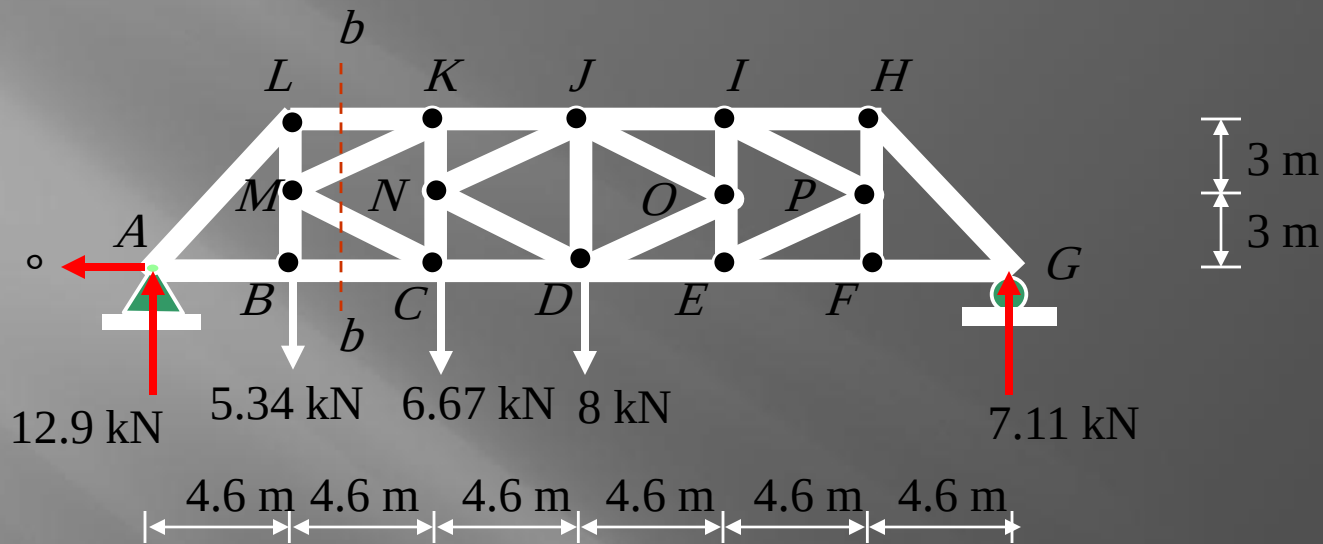
مقطع $a-a$



$$+\circlearrowleft \sum M_L = 0:$$

$$F_{BC}(6) - 12.9(4.6) = 0,$$

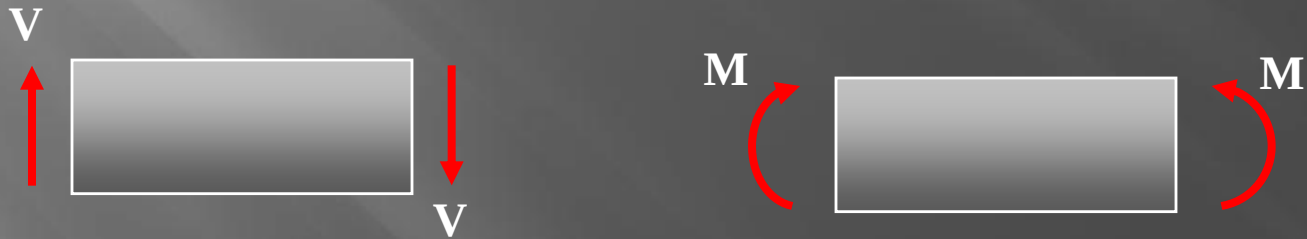
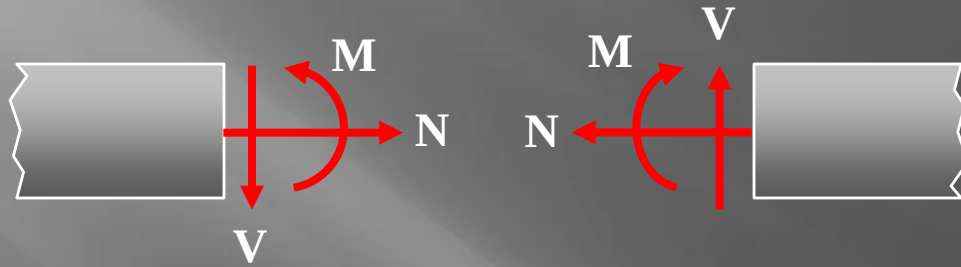
$$F_{BC} = 9.89 \text{ kN (T)}$$



$$\begin{aligned}
 + \curvearrowright \Sigma M_K = 0: & \quad -F_{CM} \cos 33.1^\circ (6) - 9.89(6) - 8(4.6) + 7.11(18.4) = 0 \\
 & \quad F_{CM} = 6.90 \text{ kN (T)}
 \end{aligned}$$

تحليل تيرها و قابرها

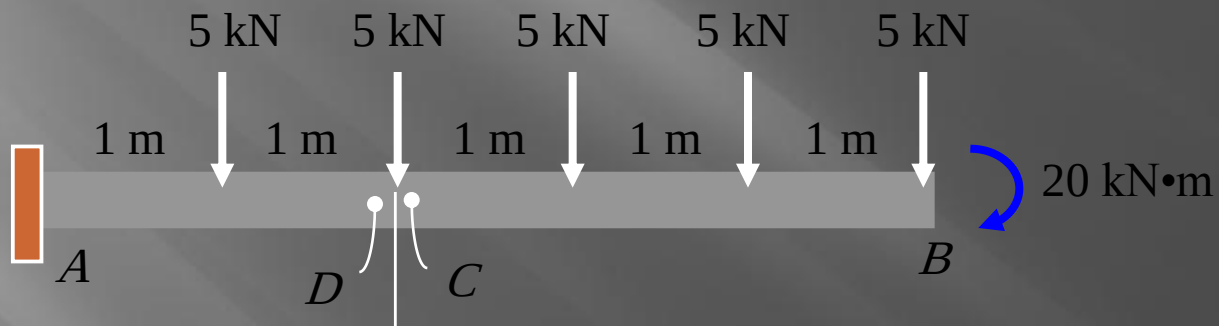
نیروهای داخلی در نقاط خاص



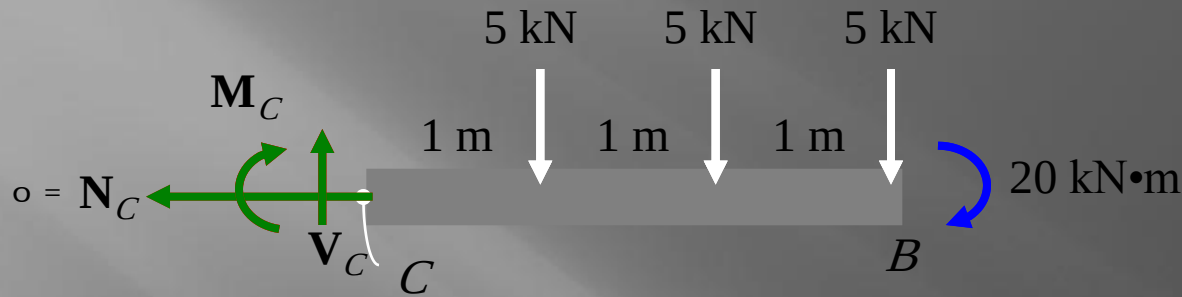
علامت مثبت قراردادی

مثال

برش و لنگر داخلی را در تیر کنسول زیر در نقاط مدنظر تعیین کنید. D و C

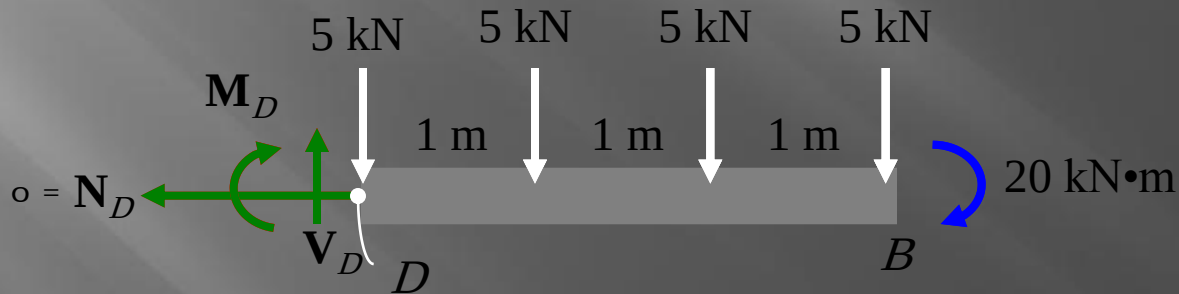


حل



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: V_C - 5 - 5 - 5 = 0, \quad V_C = 15 \text{ kN}$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_C = 0: -M_C - 5(1) - 5(2) - 5(3) - 20 = 0, \quad M_C = -50 \text{ kN}$$

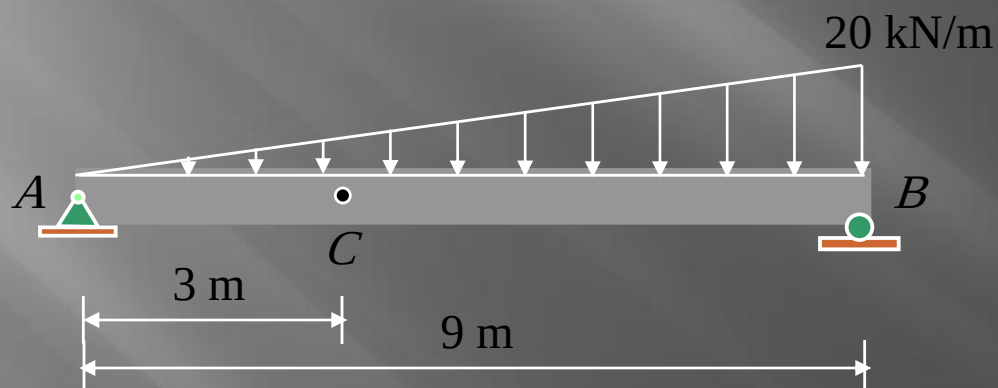


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: V_D - 5 - 5 - 5 - 5 = 0, \quad V_D = 20 \text{ kN}$$

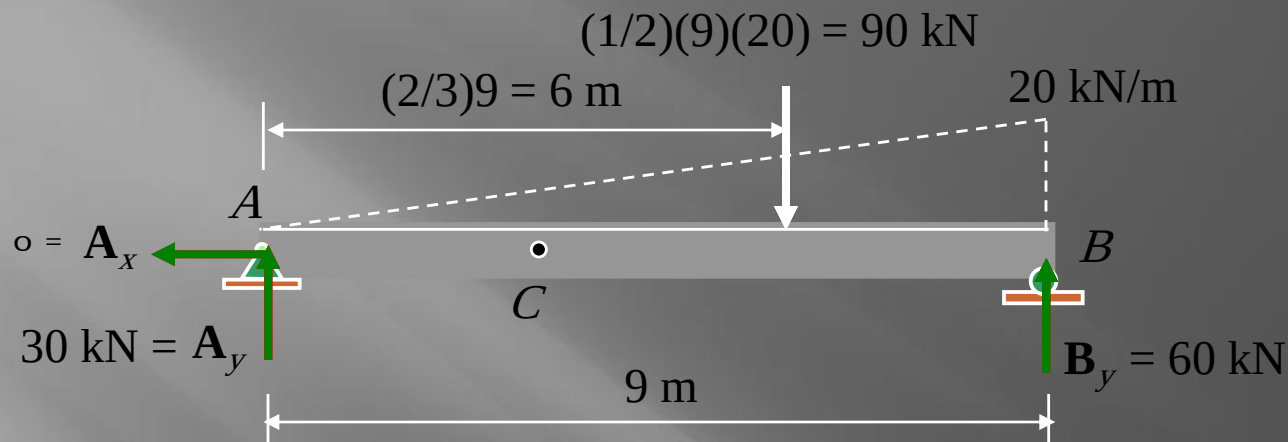
$$+\curvearrowright \Sigma M_D = 0: -M_D - 5(1) - 5(2) - 5(3) - 20 = 0, \quad M_D = -50 \text{ kN}$$

مثال

برش و لنگر داخلی را در تیر زیر در نقطه C تعیین کنید.

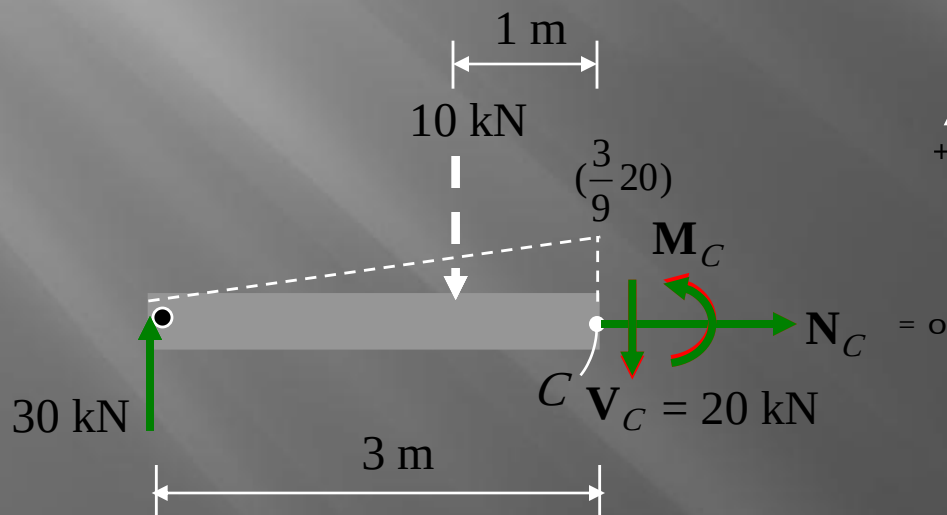


حل



$$\sum M_A = 0: B_y(9) - 90(6), \quad B_y = 60 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: A_y - 90 + 60 = 0 \quad A_y = 30 \text{ kN}$$



$$\sum F_y = 0:$$

$$-V_C - 10 + 30 = 0,$$

$$V_C = 20 \text{ kN}$$

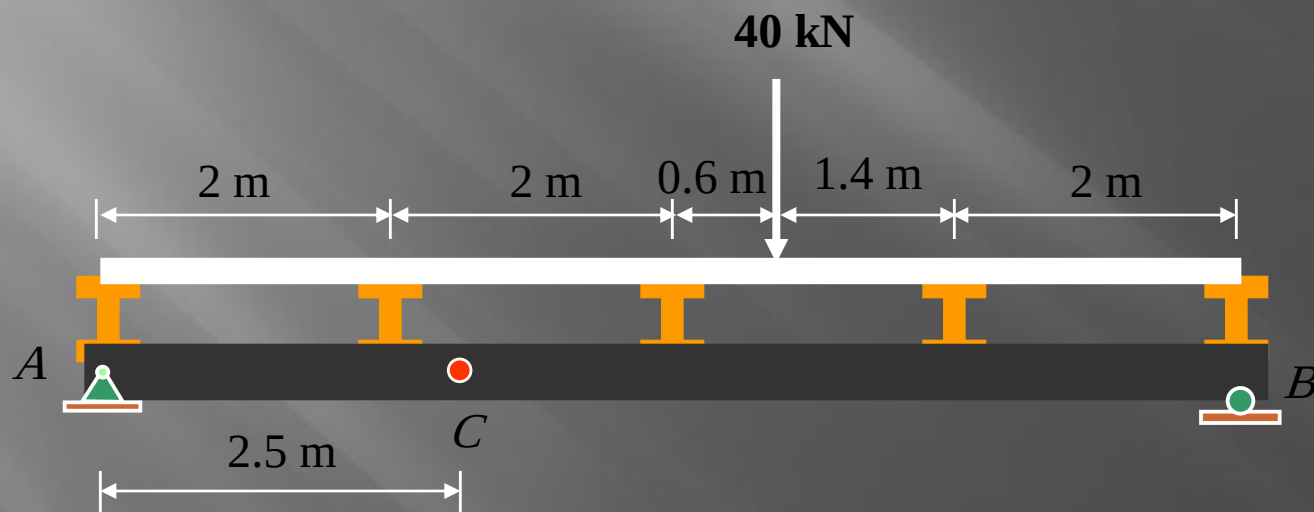
$$\sum M_C = 0:$$

$$M_C + 10(1) - 30(3) = 0,$$

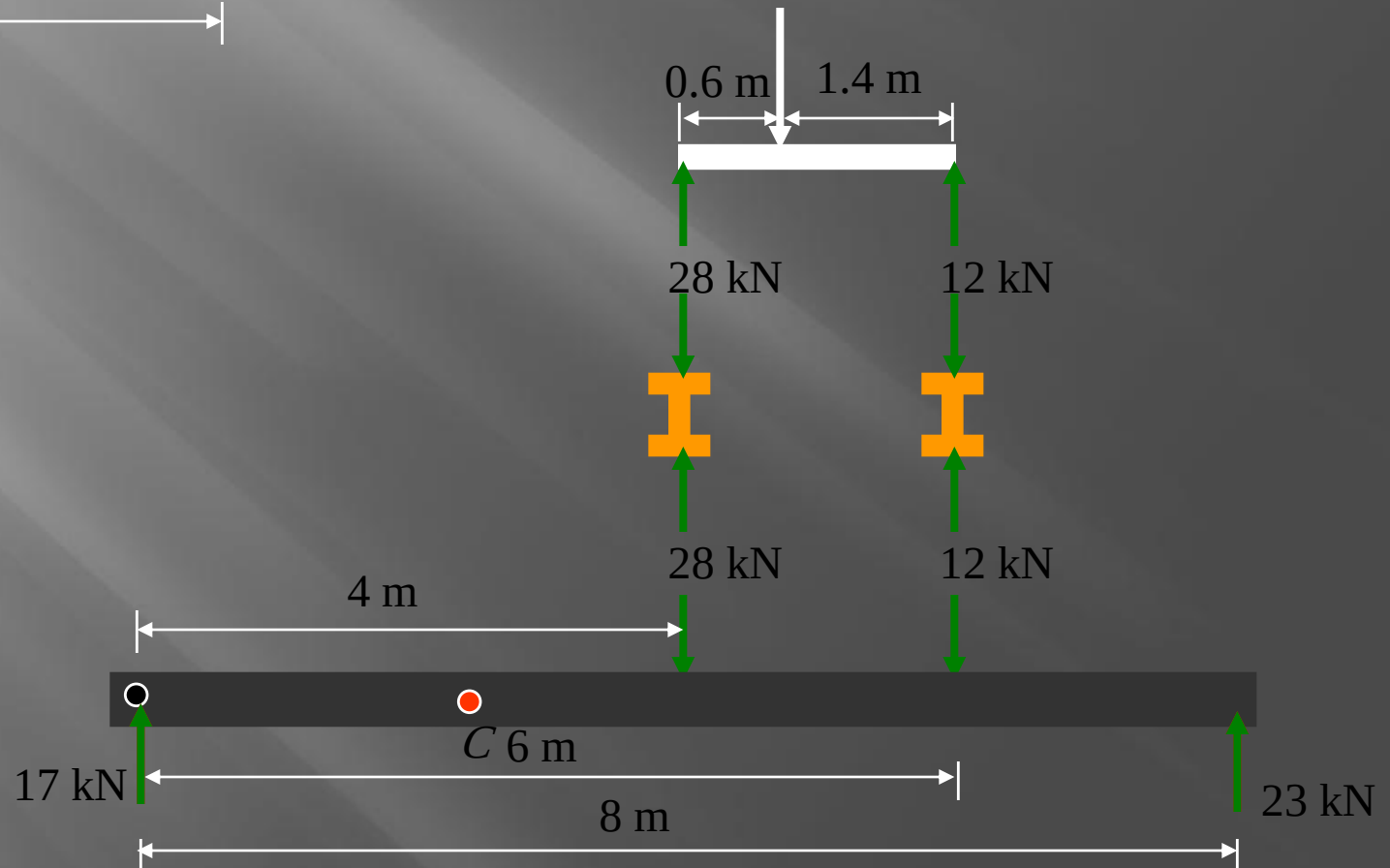
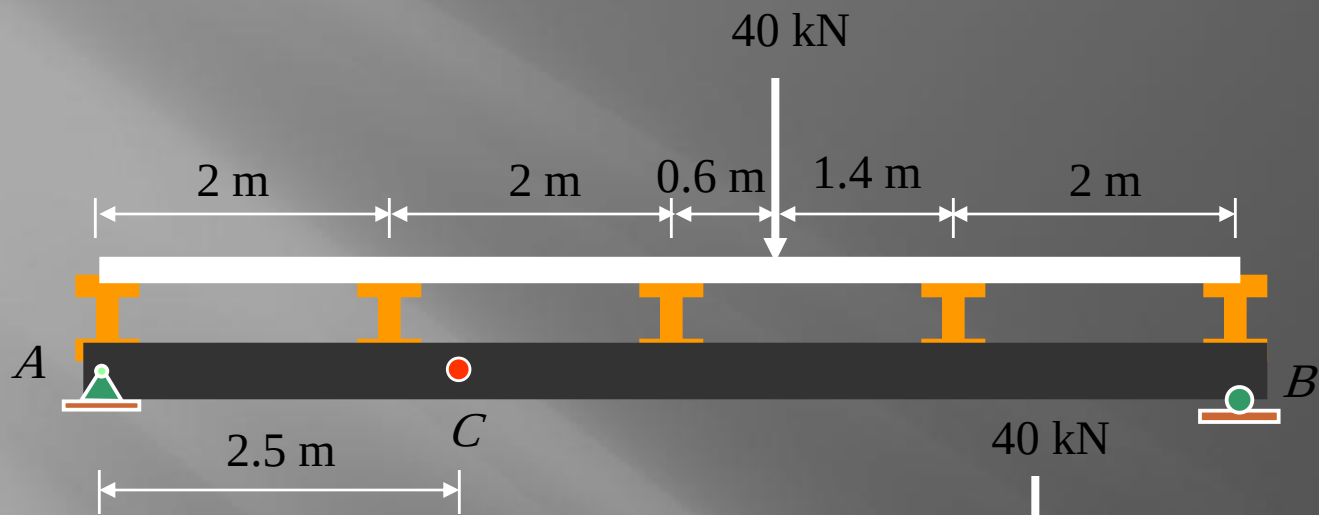
$$M_C = 80 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

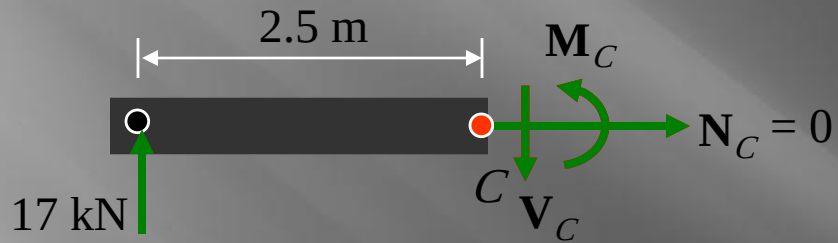
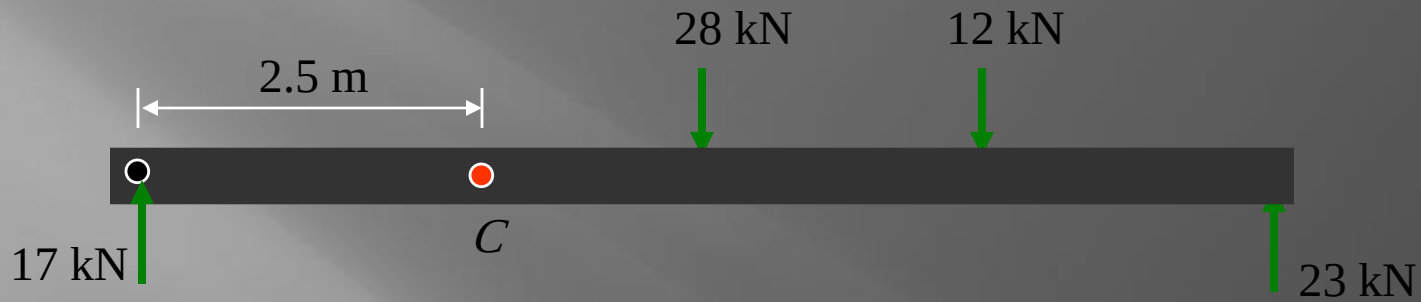
مثال

بار 40 kN بر کف مهار شده بوسیله تیرچه ها وارد می شود. این تیرها بارها را به شاهتیر AB منتقل می کنند. برش و لنگر را در نقطه C از تیر حمال (شاهتیر) تعیین کنید.



حل :





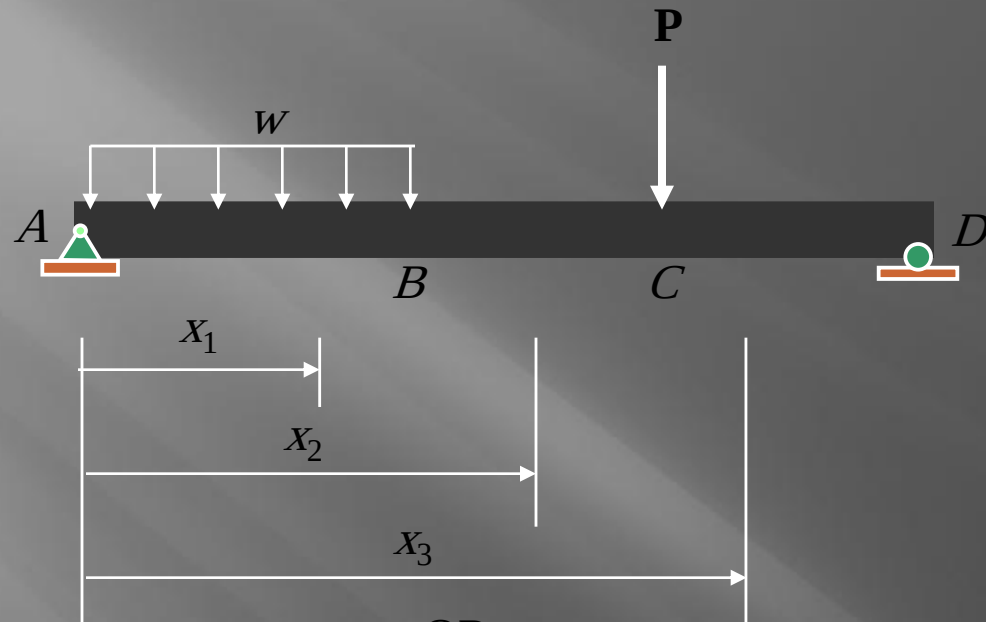
$$\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$-V_C + 17 = 0, \quad V_C = 17 \text{ kN}$$

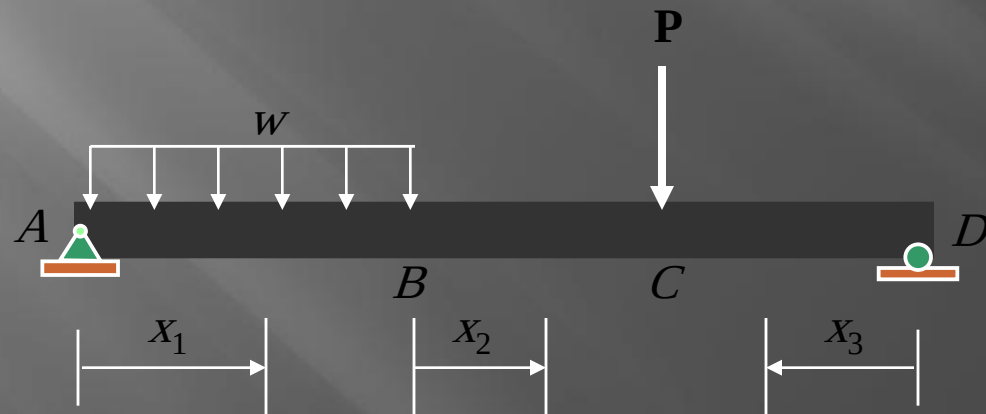
$$\curvearrowright \Sigma M_C = 0:$$

$$M_C - 17(2.5) = 0, \quad M_C = 42.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

عملکرد پیرش و خمش

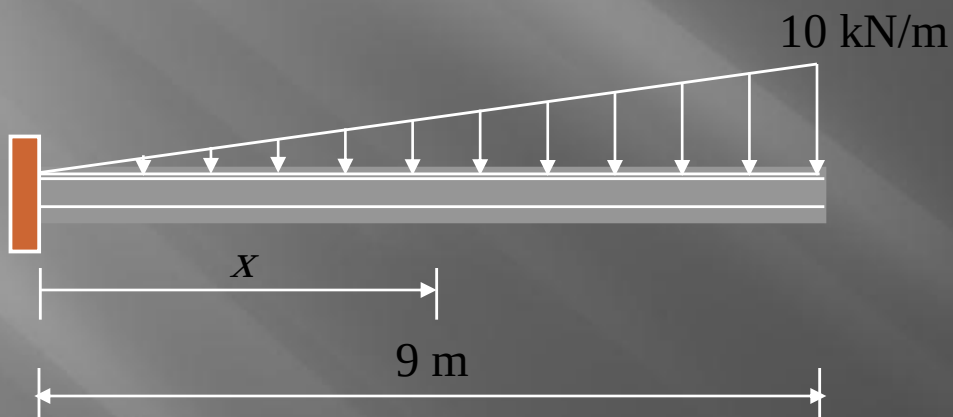


OR

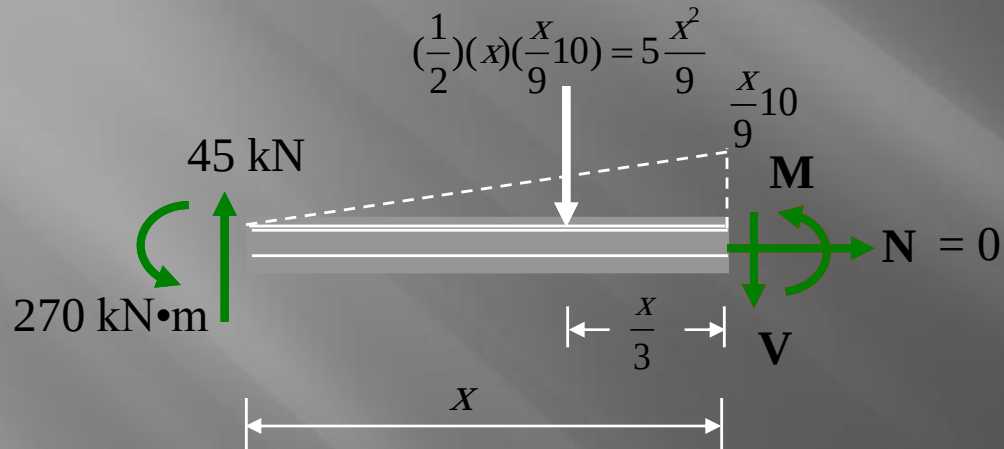
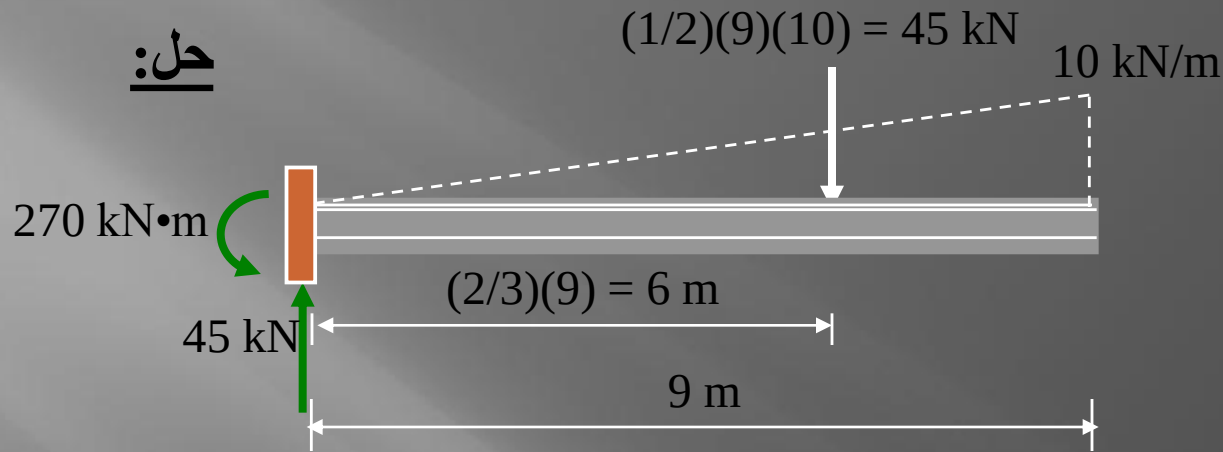


مثال

عملکرد برش و لنگر را در فاصله X از تکیه گاه تیر زیر را تعیین کنید.



حل:



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$-V - \frac{5x^2}{9} + 45 = 0$$

$$V = -\frac{5x^2}{9} + 45$$

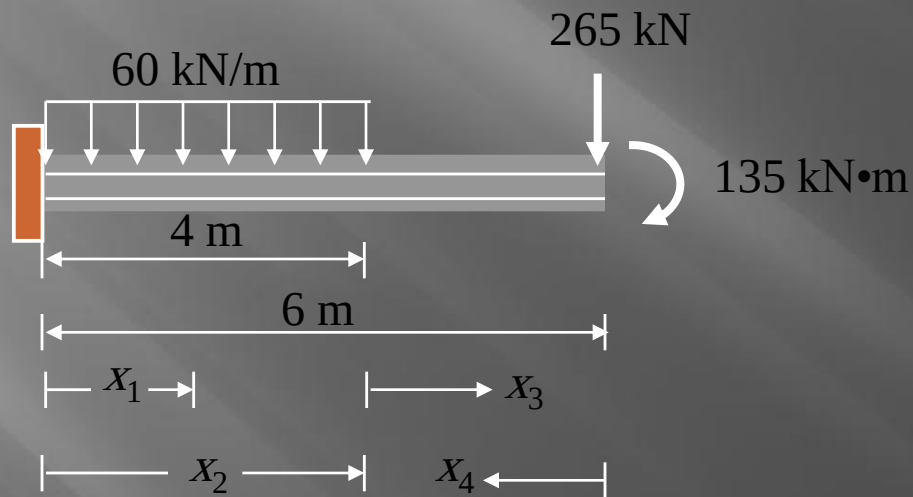
$$+\curvearrowright \Sigma M_x = 0:$$

$$M + \frac{5x^2}{9} \left(\frac{x}{3}\right) - 45x + 270 = 0$$

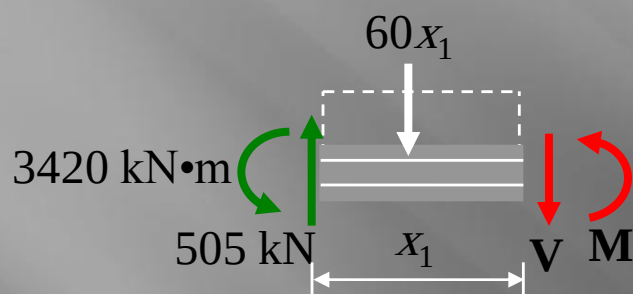
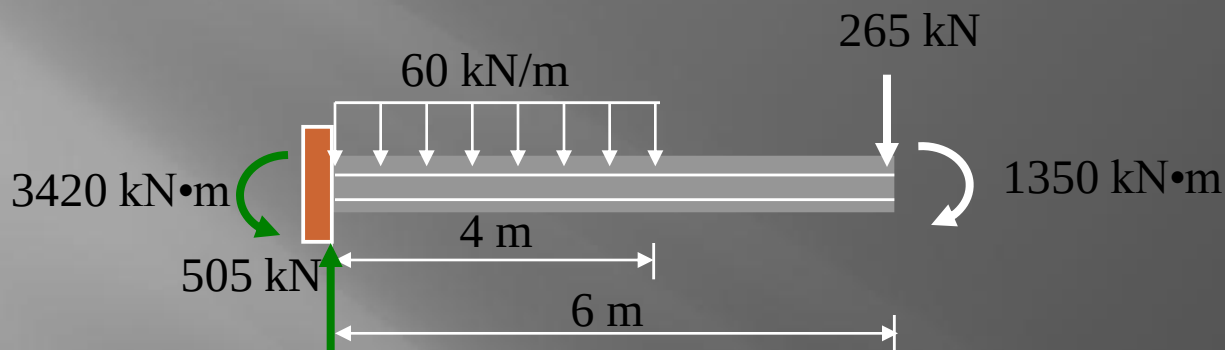
$$M = -\frac{5x^2}{9} \left(\frac{x}{3}\right) + 45x - 270$$

مثال:

عملکرد برش و لنگر را در فاصله X_1 , X_2 , X_3 و X_4 از تکیه گاه تیر زیر را تعیین کنید.



حل:

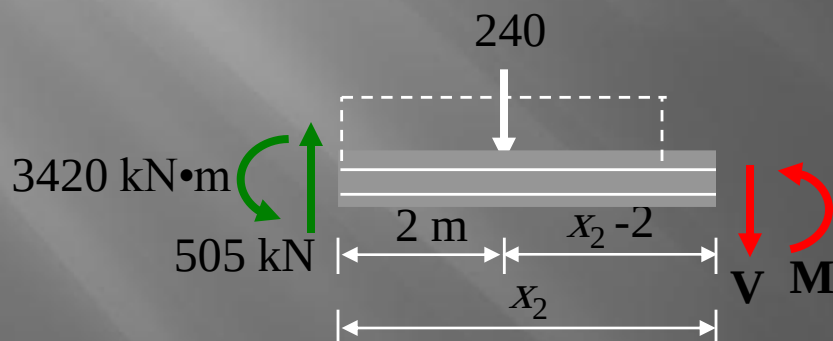


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: 505 - 60x_1 - V = 0$$

$$V = 505 - 60x_1$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_{x_1} = 0: M + 60x_1\left(\frac{x_1}{2}\right) - 505x_1 + 3420 = 0$$

$$M = -30x_1^2 + 505x_1 - 3420$$

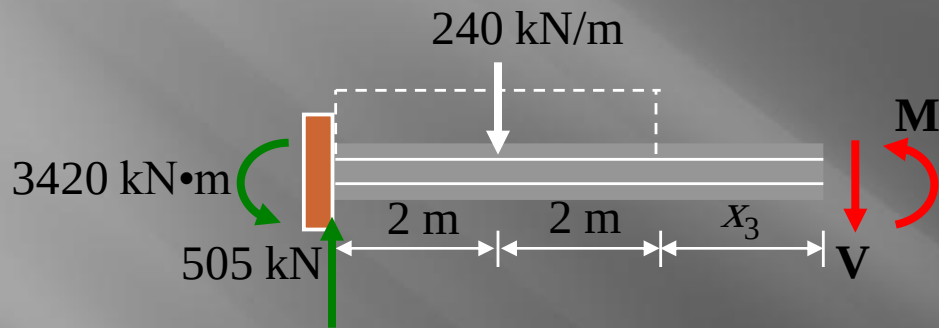
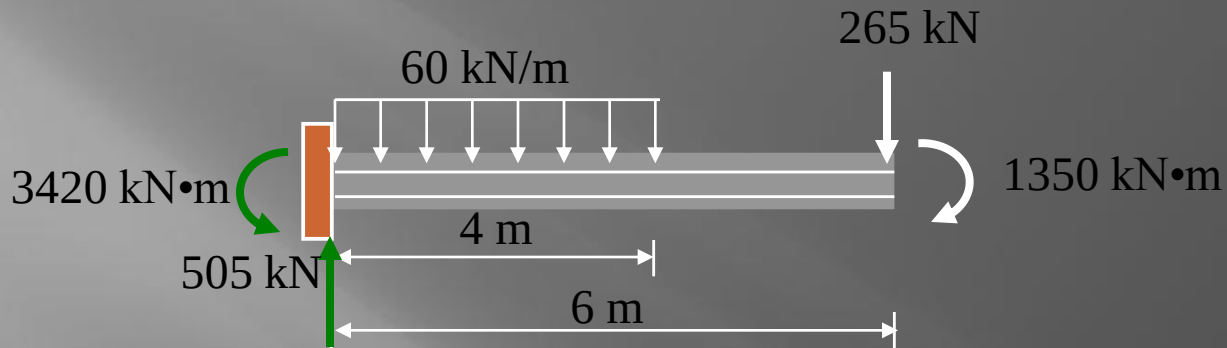


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: 505 - 240 - V = 0$$

$$V = 265 \text{ kN}$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_{x_2} = 0: M + 240(x_2 - 2) - 505x_2 + 3420 = 0$$

$$M = 265x_2 - 2940$$

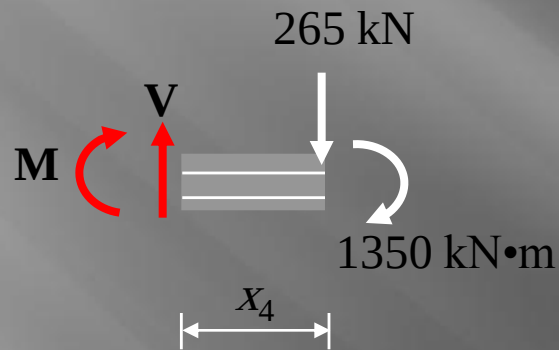
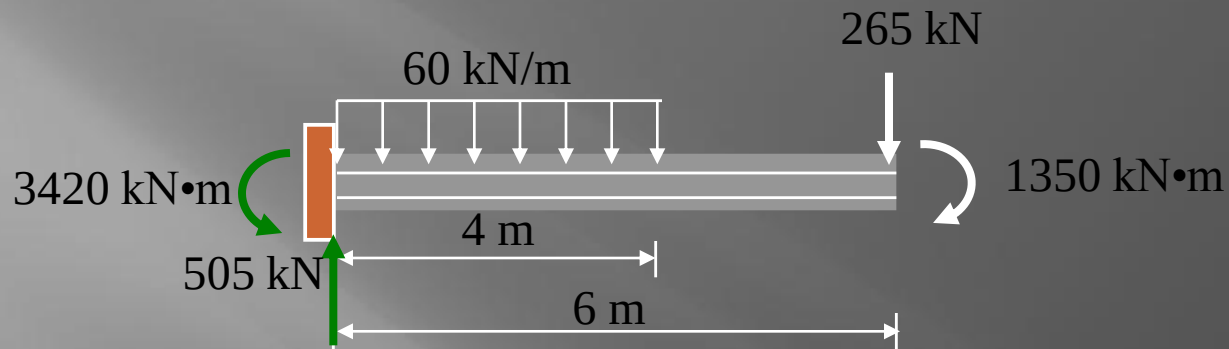


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: 505 - 240 - V = 0$$

$$V = 265 \text{ kN}$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_{x_3} = 0: M + 240(x_3 + 2) - 505(x_3 + 4) + 3420 = 0$$

$$M = 265x_3 - 1880$$



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: V - 265 = 0$$

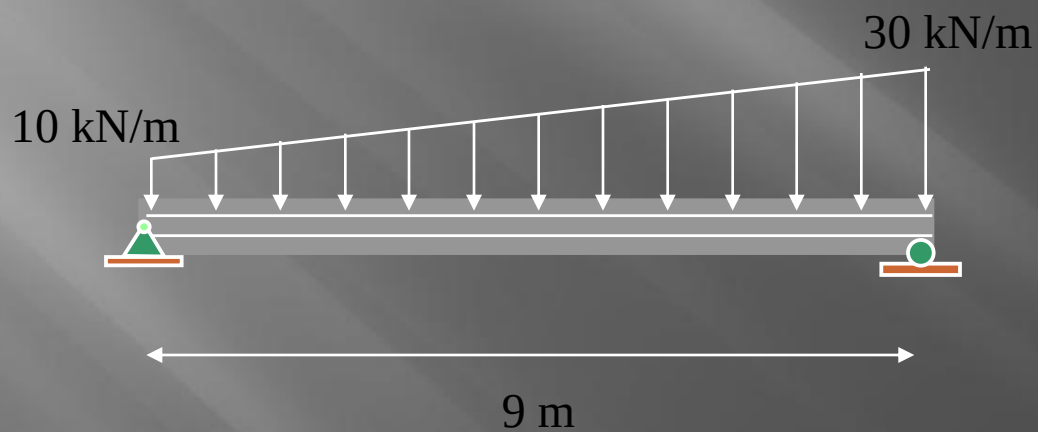
$$V = 265 \text{ kN}$$

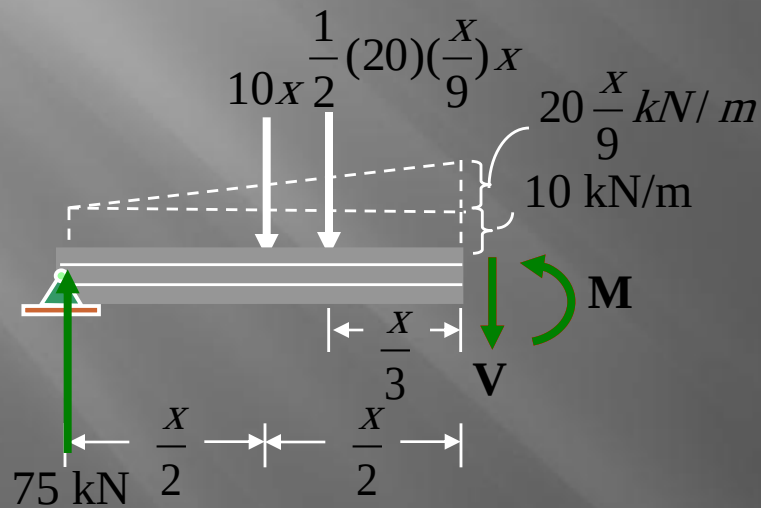
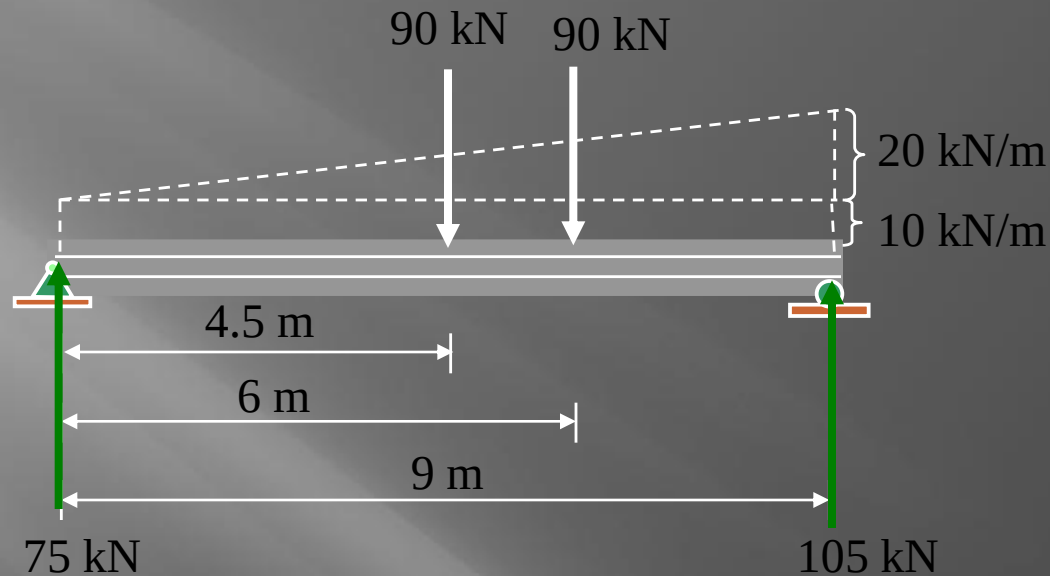
$$+\curvearrowright \Sigma M_{x3} = 0: -M - 265x_4 - 1350 = 0$$

$$M = -265x_4 - 1350$$

مثال

عملکرد برش و لنگر را در فاصله X از تکیه گاه تیر زیر را تعیین کنید.





$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$75 - 10x - \left[\frac{1}{2} (20) \left(\frac{x}{9} \right) x \right] - V = 0$$

$$V = 75 - 10x - 1.11x^2$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_x = 0:$$

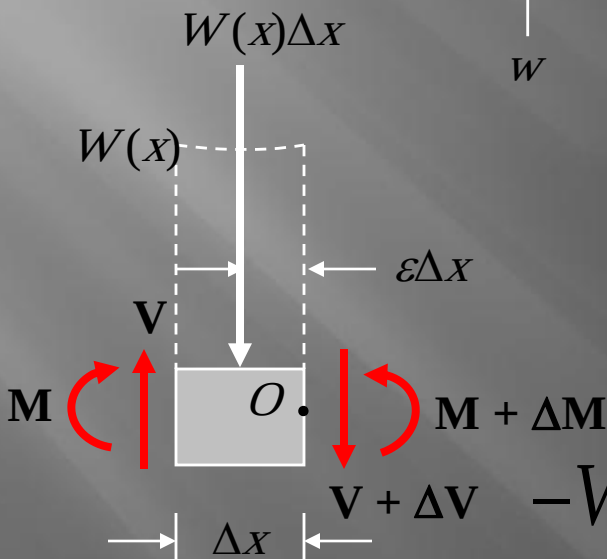
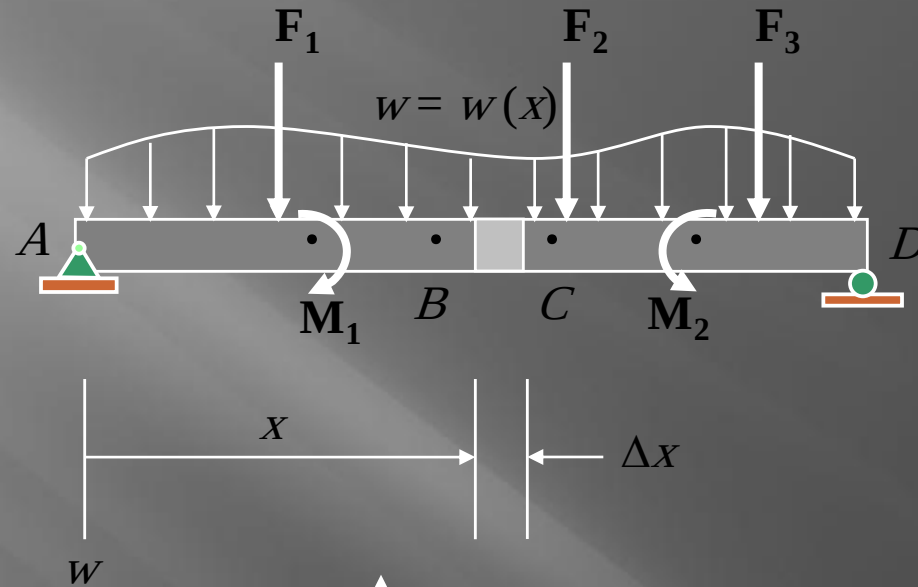
$$-75x + (10x) \left(\frac{x}{2} \right) + \left[\frac{1}{2} (20) \left(\frac{x}{9} \right) x \right] \left(\frac{x}{3} \right) + M = 0$$

$$M = 75x - 5x^2 - 0.37x^3$$

تحليل قابليها وتيرها

- دیاگرام برش و لنگر در تیرها
- دیاگرام برش و لنگر در قابها
- دیاگرام لنگر در روش (Superposition)
- منحنی خمش

دیاگرام برش و لنگر در تیرها



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$V - w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -w(x)\Delta x$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_O = 0:$$

$$-V\Delta x - M + w(x)\Delta x \varepsilon(\Delta x) + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x - w(x)\varepsilon(\Delta x)^2$$

$$\Delta V = -w(x)\Delta x$$

$$\Delta M = V\Delta x - w(x)\varepsilon(\Delta x)^2$$

باتقسیم کردن بر Δx و گرفتن حد وقتی $\Delta x \rightarrow 0$, این معادله نتیجه می شود.

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

شیب دیاگرام برش = (منفی) شدت بار گسترده

$$\frac{dM}{dx} = V$$

شیب دیاگرام لنگر = برش

دو معادله قبل را می توان با انتگرال گیری نیز بدست آورد:

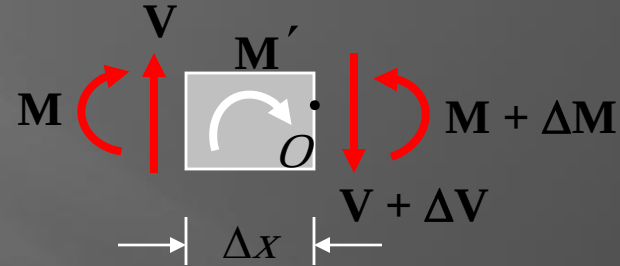
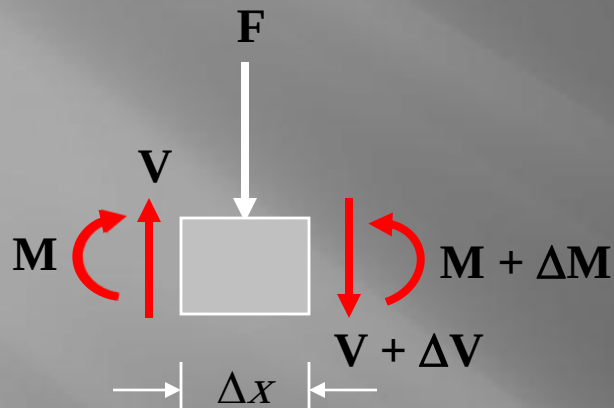
$$\Delta V = -\int w(x) dx$$

تغییرات برش = انتگرال سطح زیر دیاگرام بار گسترده (منفی)

و

$$\Delta M = \int V(x) dx$$

تغییرات لنگر = انتگرال سطح زیر منحنی برش



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

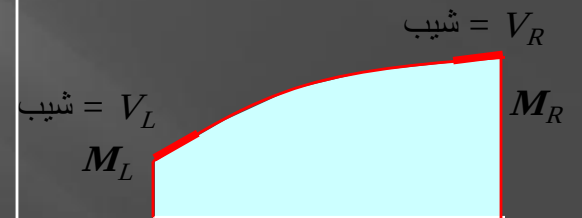
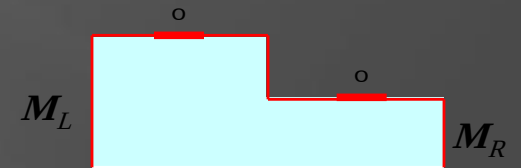
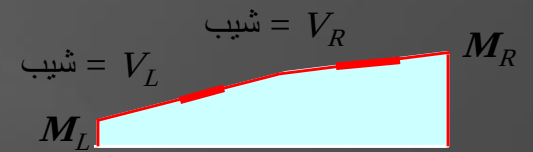
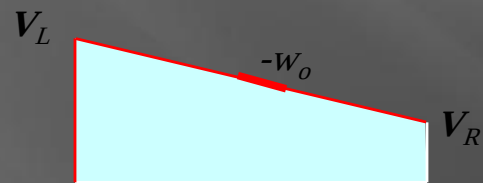
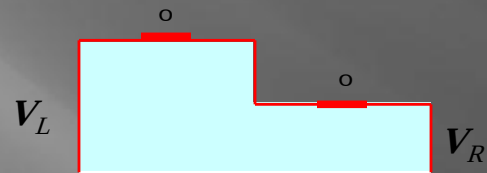
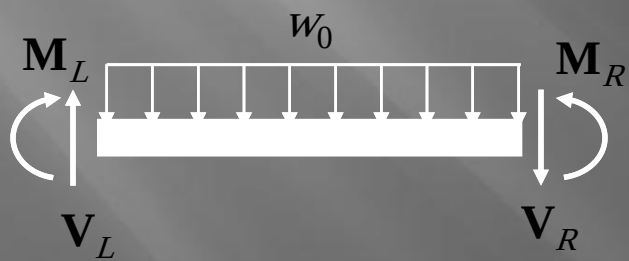
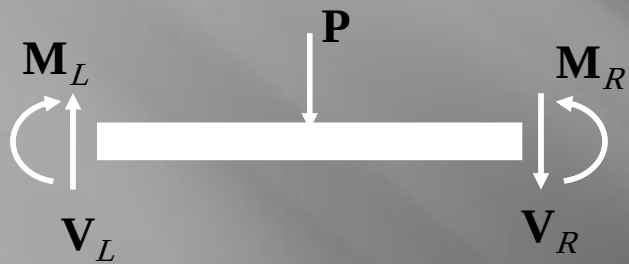
$$\Delta V = -F$$

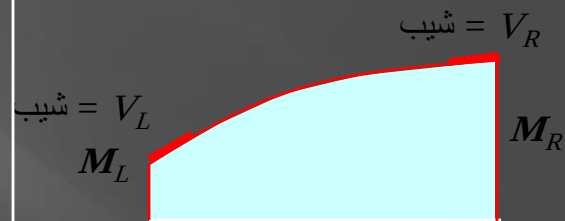
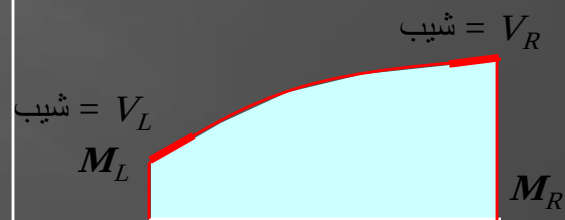
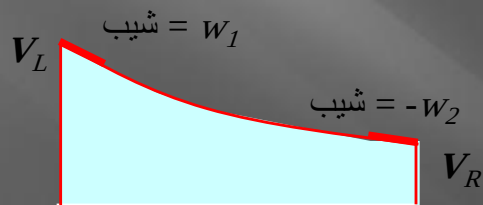
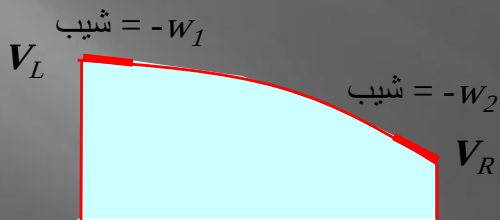
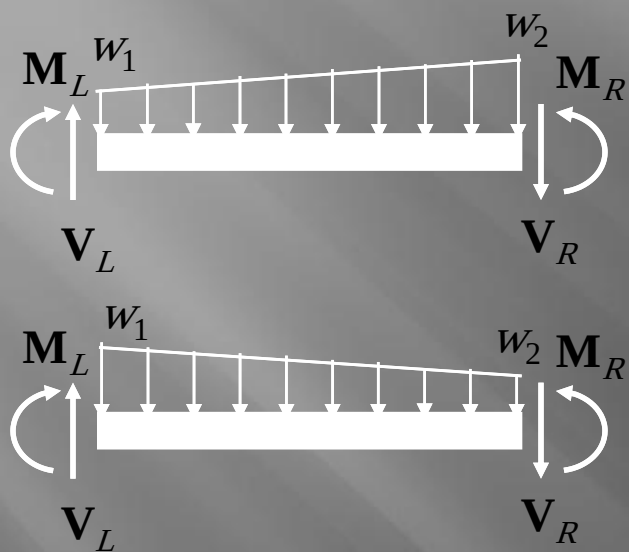
بنابراین وقتی F رو به پایین بر تیر وارد میشود ΔV منفی است و دیاگرام نشان دهنده پرشی رو به پایین است همانطور که اگر F رو به بالا وارد شود، (ΔV) مثبت و دیاگرام رو به بالا حرکت می کند.

$$+\Sigma M_O = 0:$$

$$\Delta M = M'$$

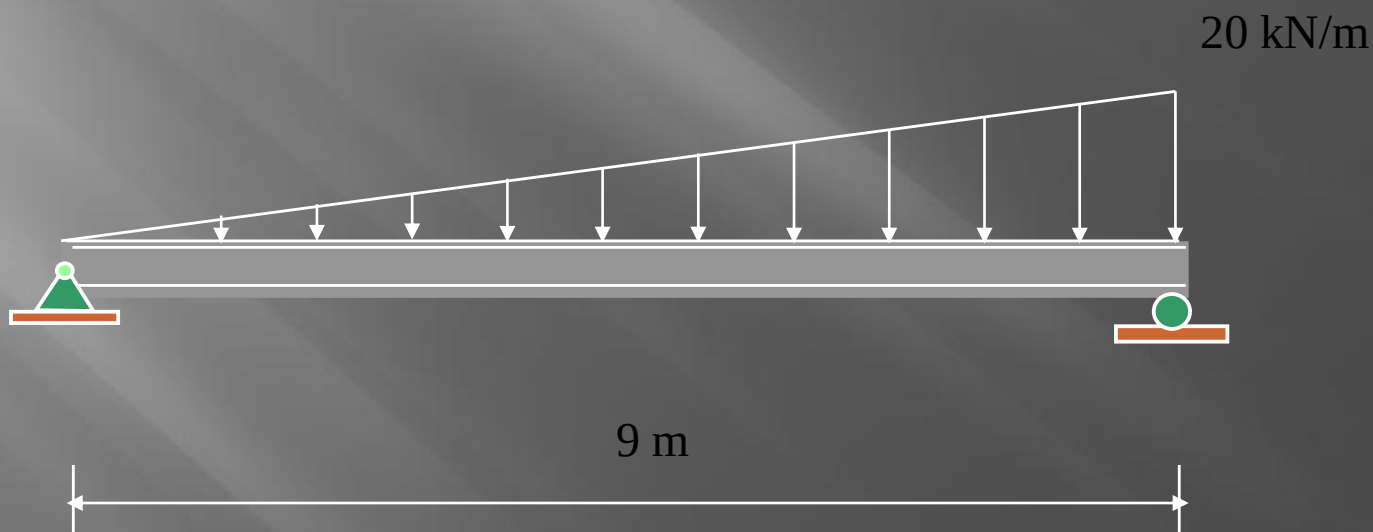
در مورد لنگر، اگر یک جفت گشتاور M' ساعتگرد عمل کنند ΔM مثبت است، دیاگرام لنگر نیز رو به بالا حرکت می کند. همینطور اگر گشتاورها خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کنند عکس این قضیه اتفاق می افتد.



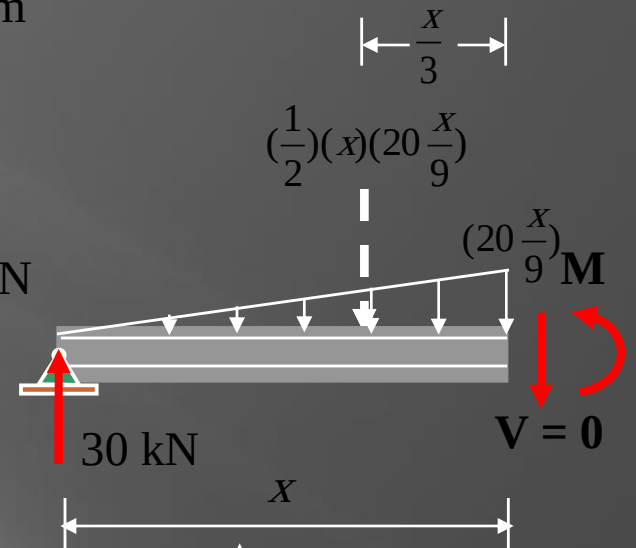
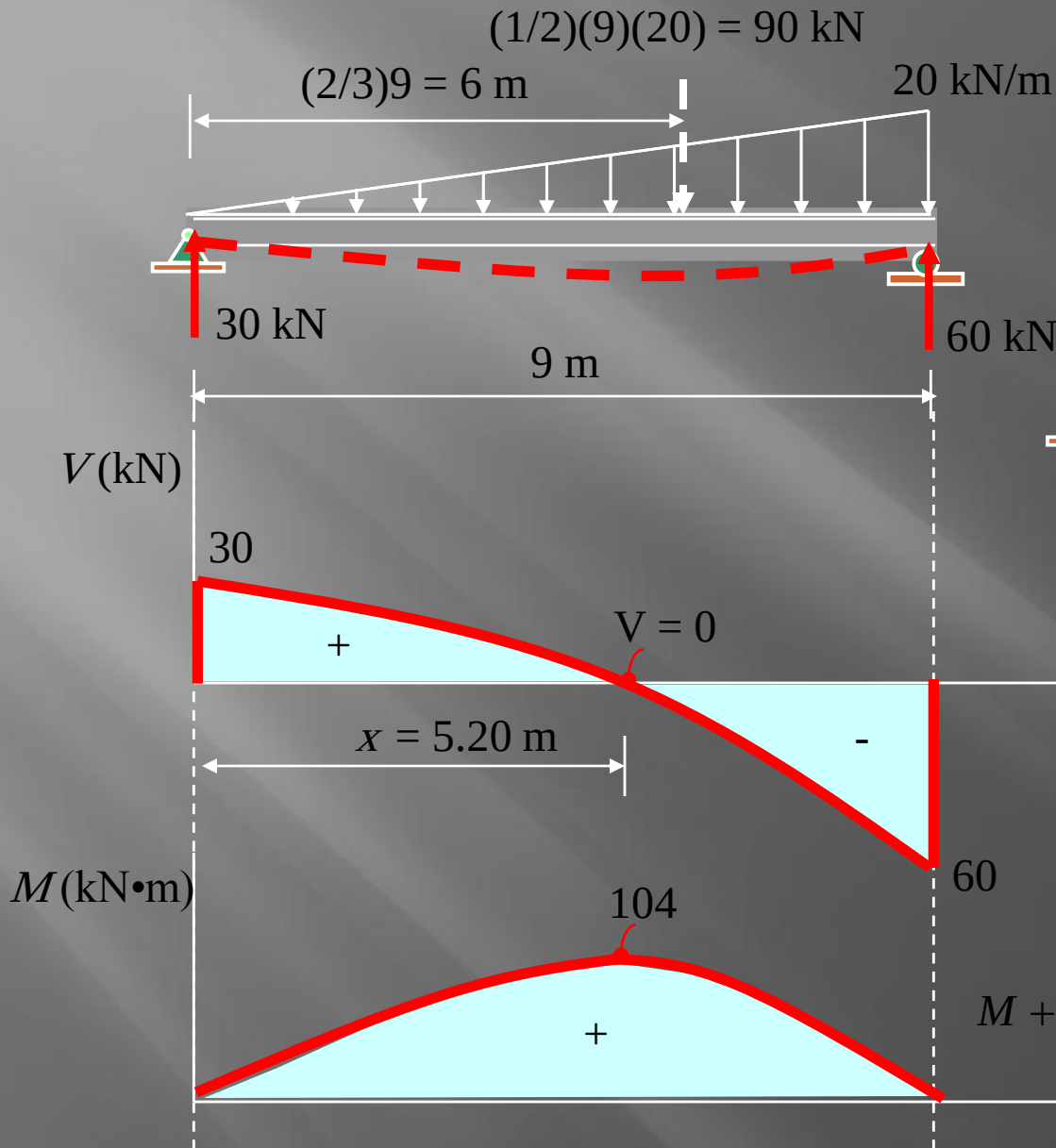


مثال

نمودارهای برش و لنگر را برای تیر نشان داده شده رسم کنید .



حل



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$30 - (\frac{1}{2})(x)(20\frac{x}{9}) = 0$$

$$x = 5.20 \text{ m}$$

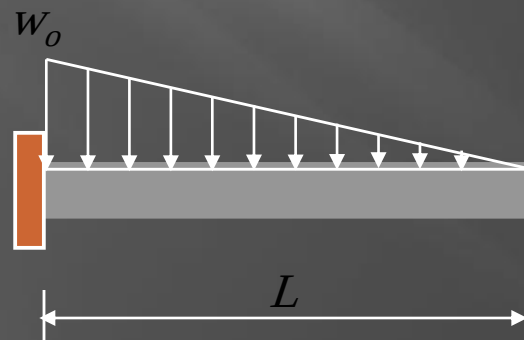
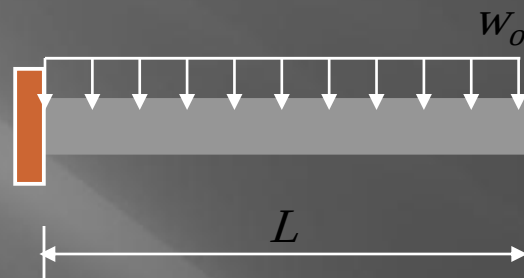
$$+\curvearrowright \Sigma M_x = 0:$$

$$M + [(\frac{1}{2})(5.2)(20\frac{5.2}{9})](\frac{5.2}{3}) - 30(5.2) = 0$$

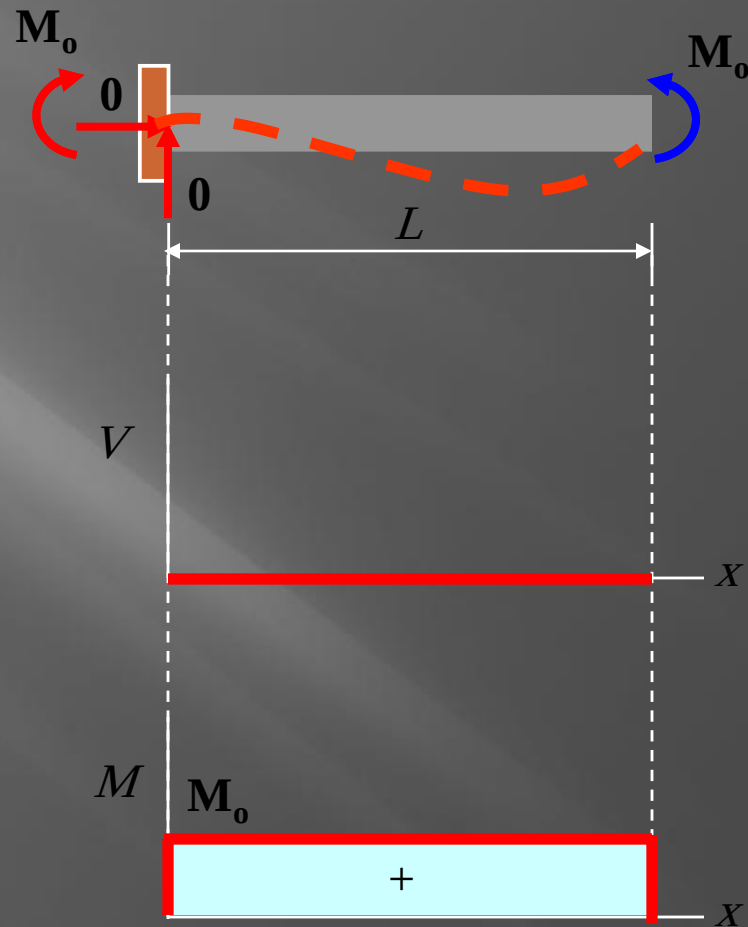
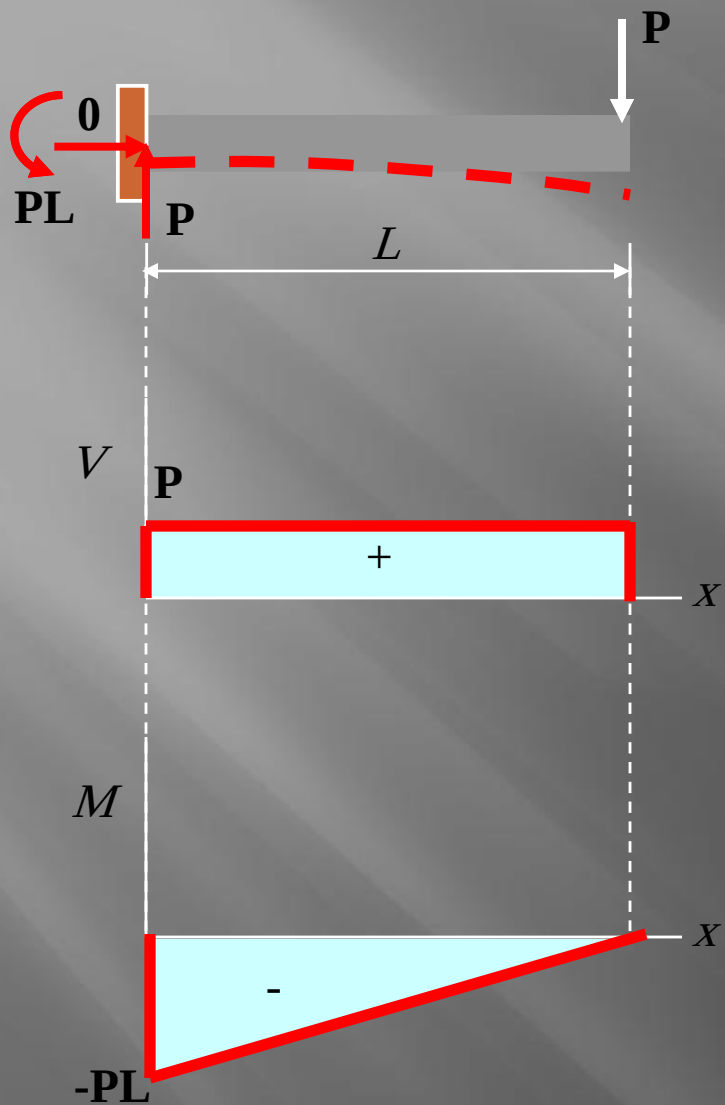
$$M = 104 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

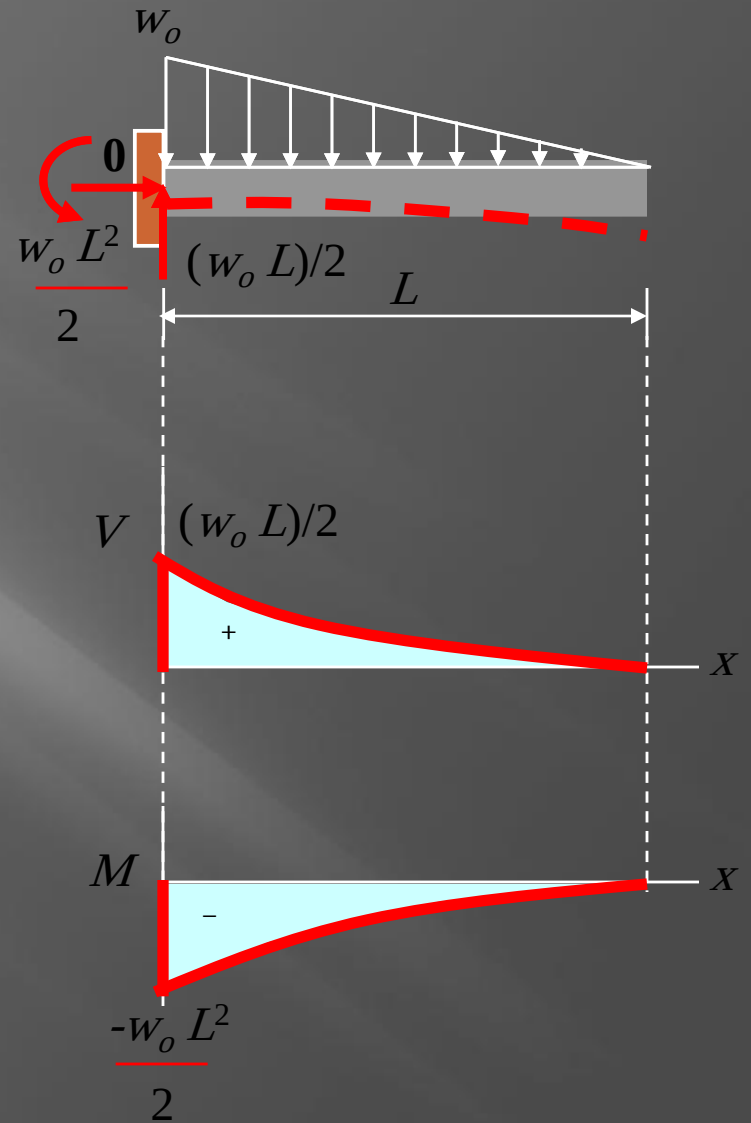
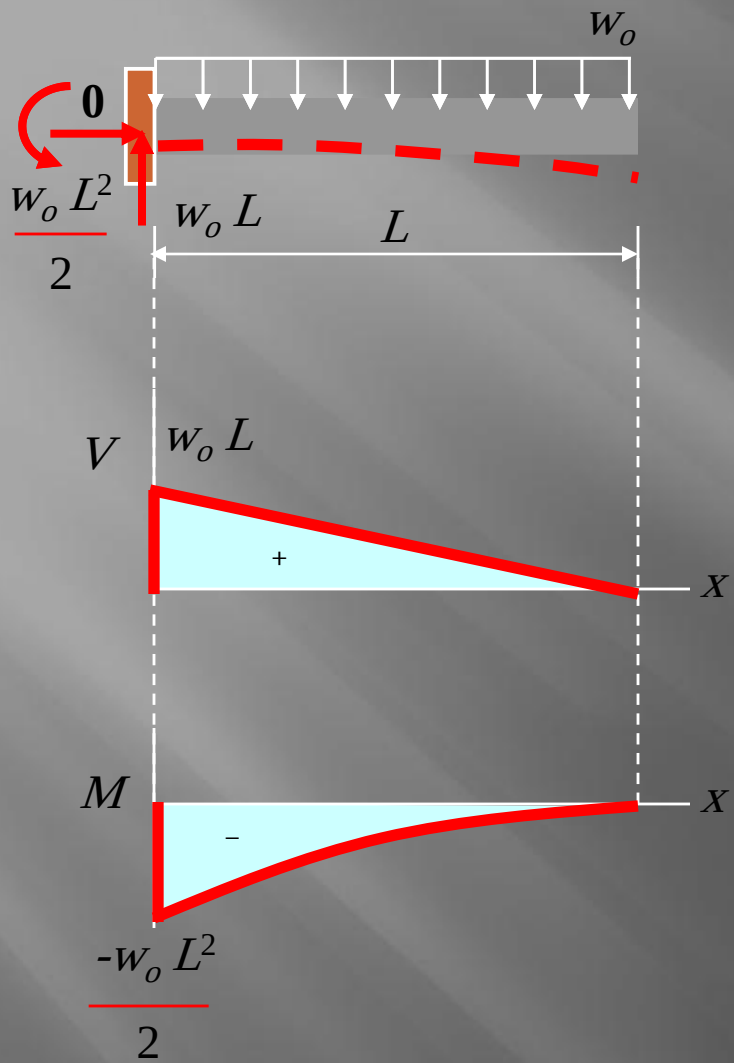
مثال

نمودارهای برش و لنگر را برای تیرهای نشان داده شده رسم کنید.



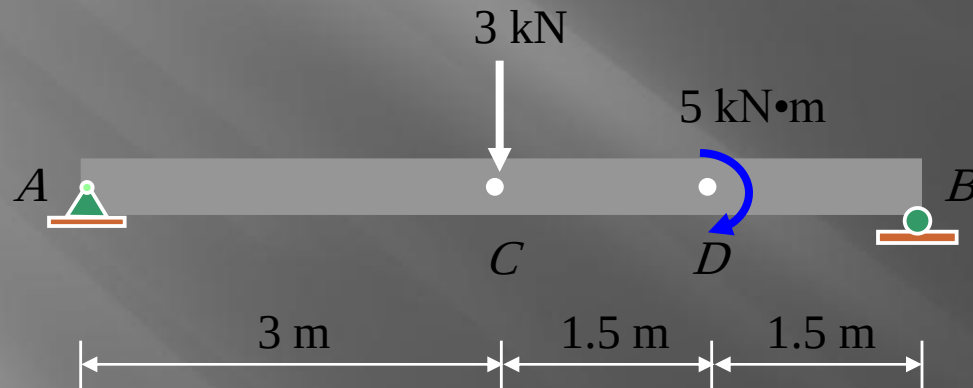
حل



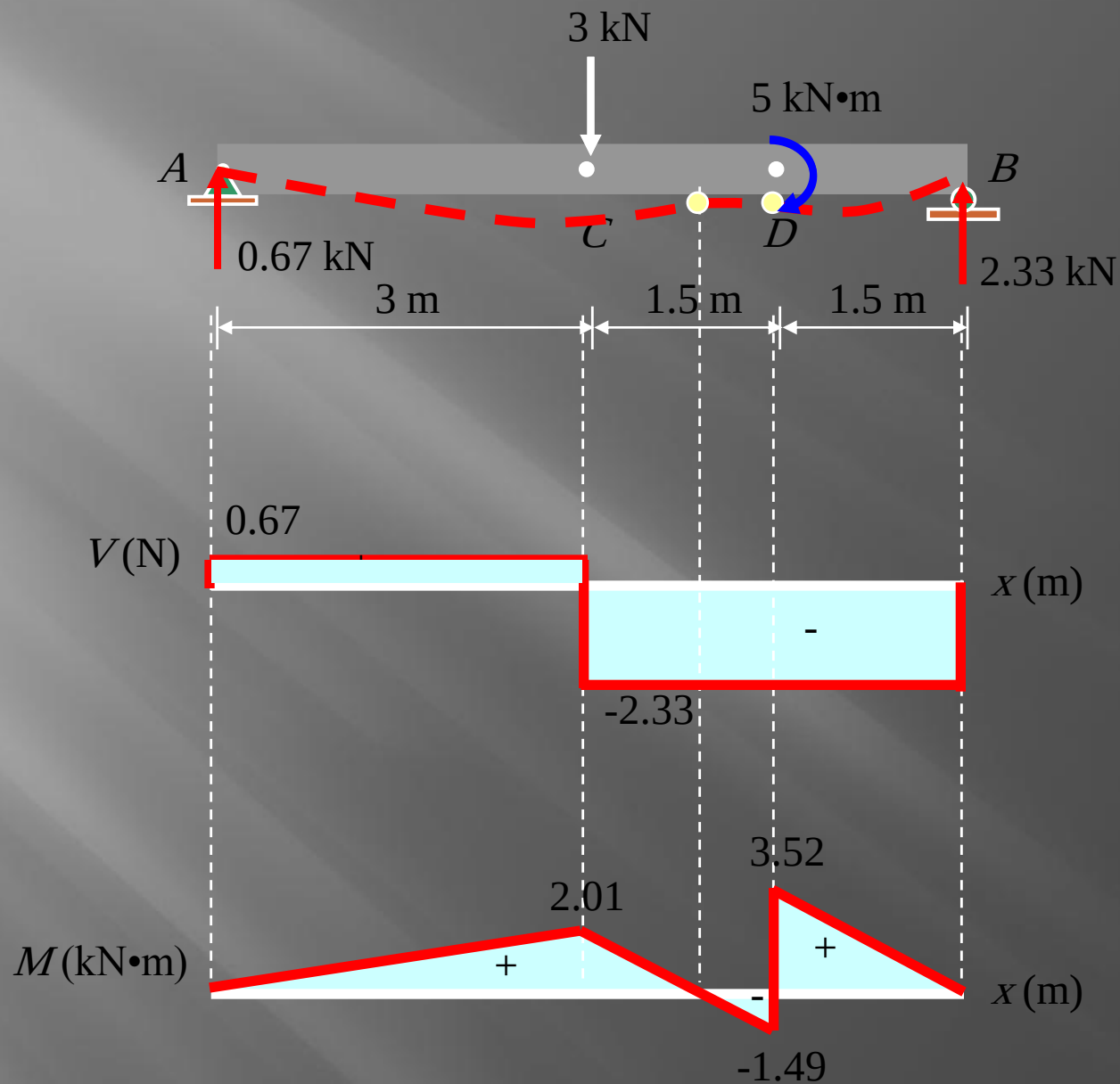


مثال

نمودارهای برش و لنگر را برای تیر نشان داده شده رسم کنید .

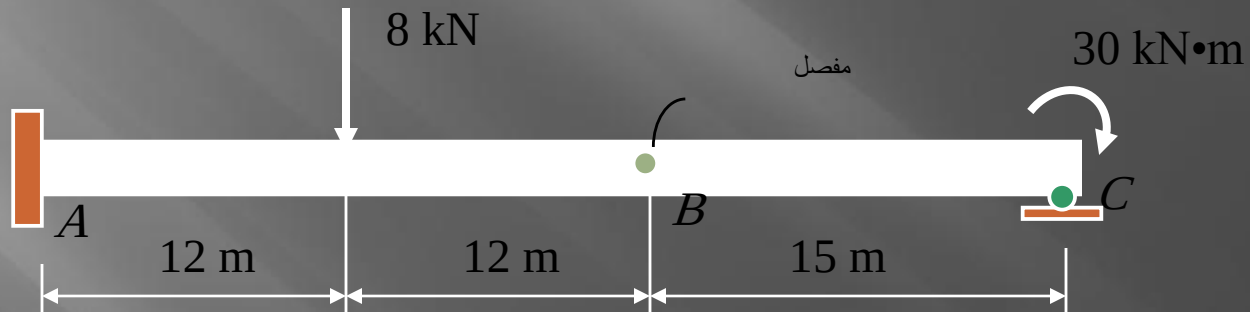


حل

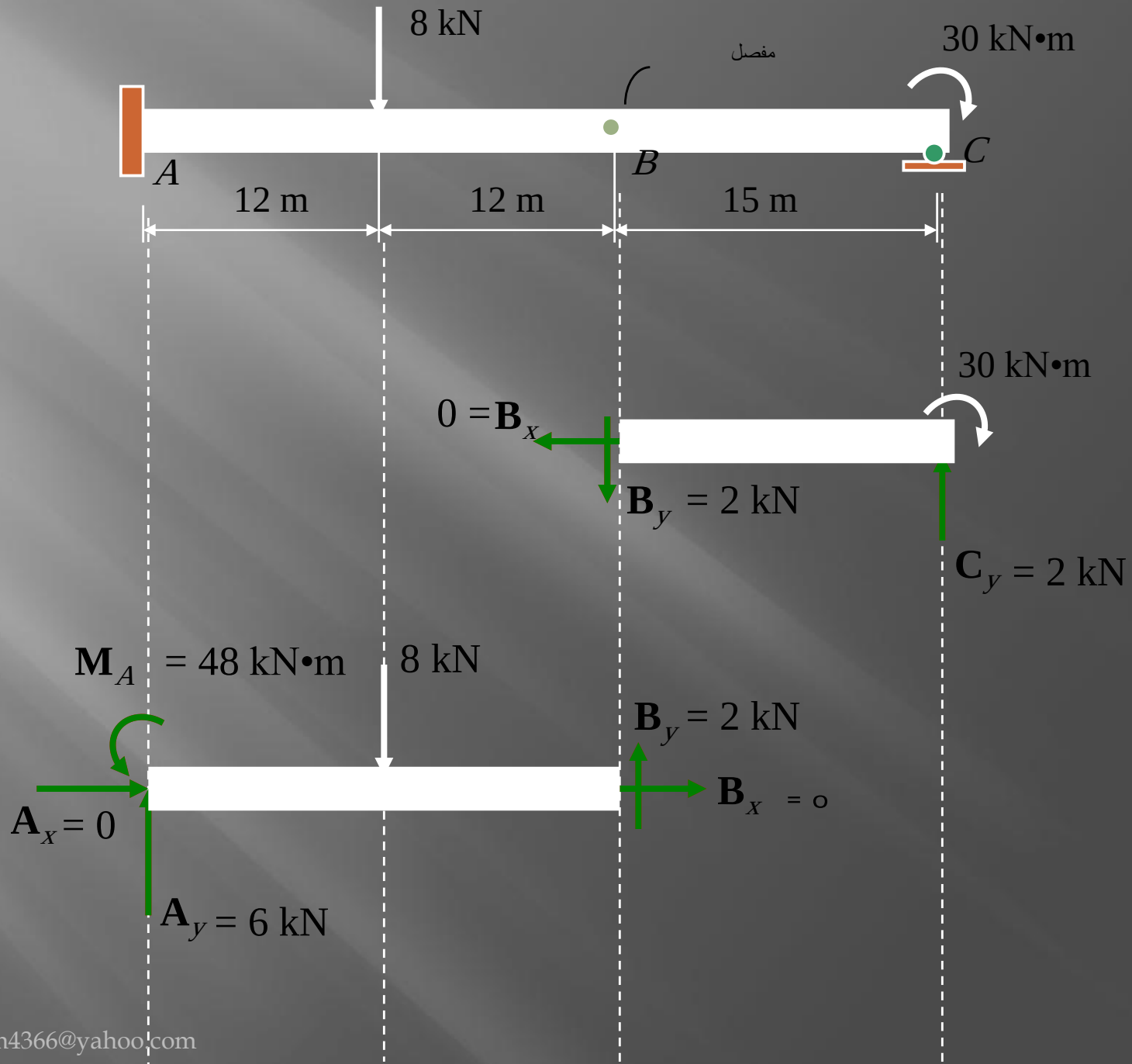


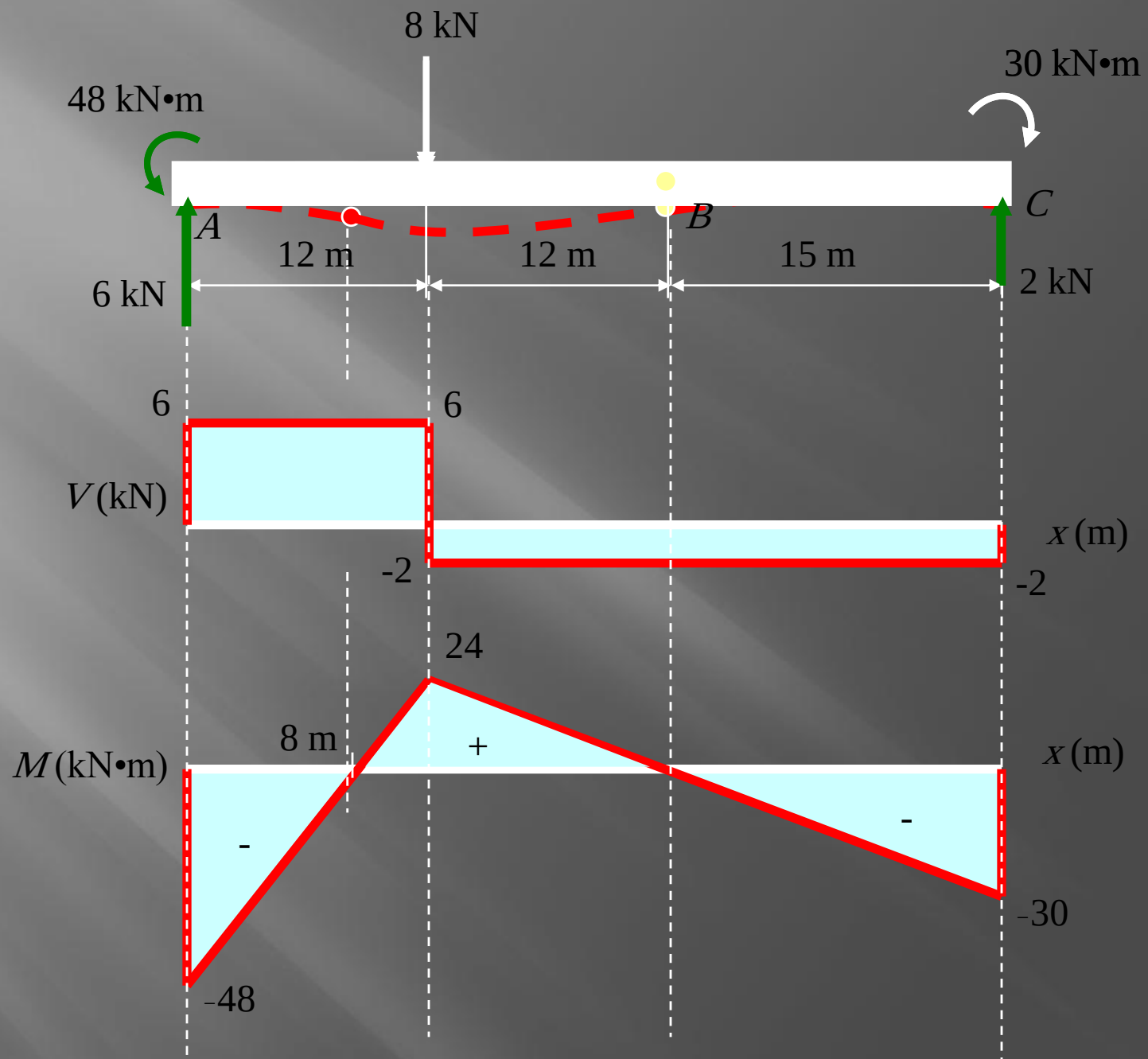
مثال

نمودارهای برش و لنگر را برای تیر مرکب نشان داده شده رسم کنید .
فرض کنید تکیه گاه در A گیردار و در C غلتکی و در B اتصال لولایی است .



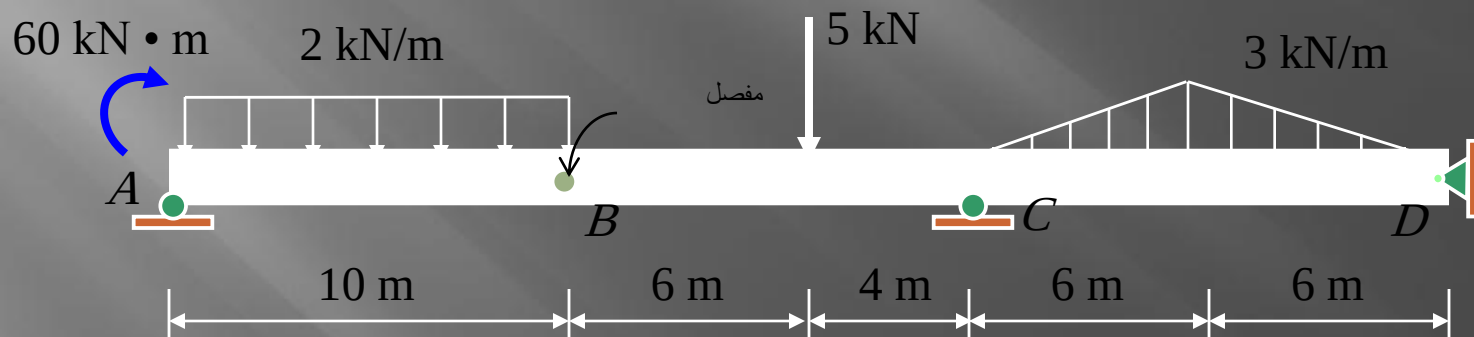
حل:



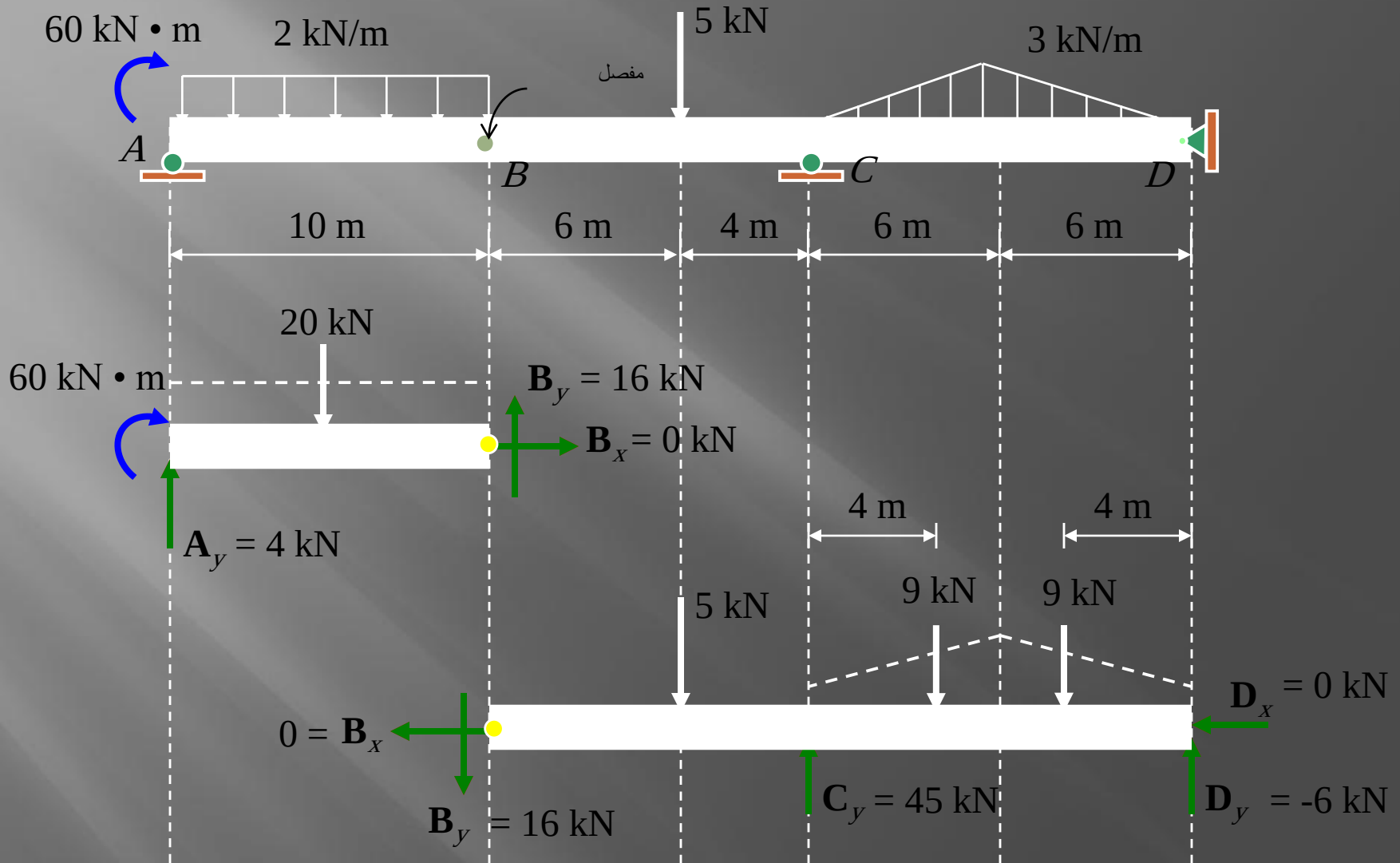


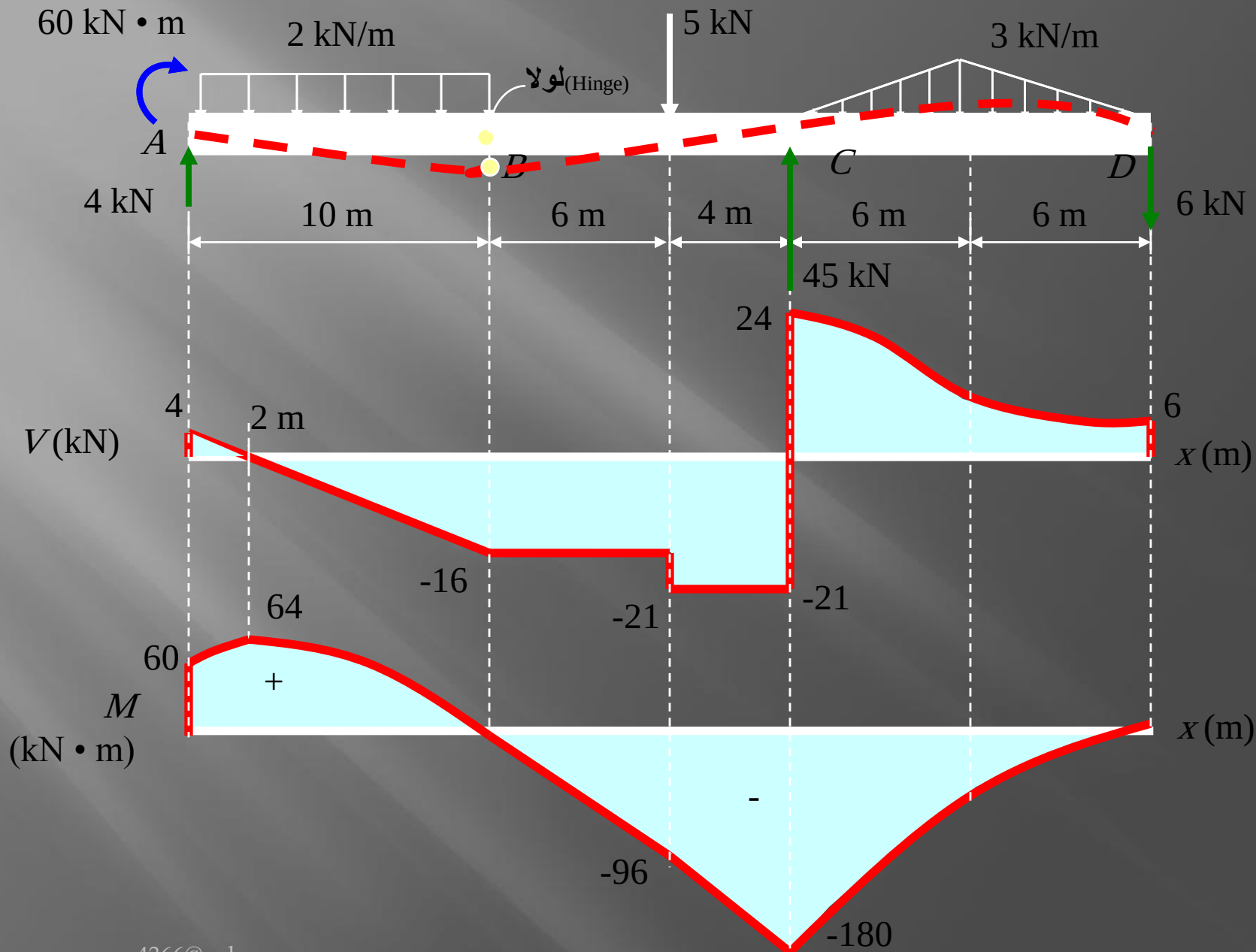
مثال

نمودارهای برش و لنگر را برای تیر مرکب نشان داده شده رسم کنید .
فرض کنید تکیه گاه در A و C غلتکی است و B و D اتصال لولایی اند.

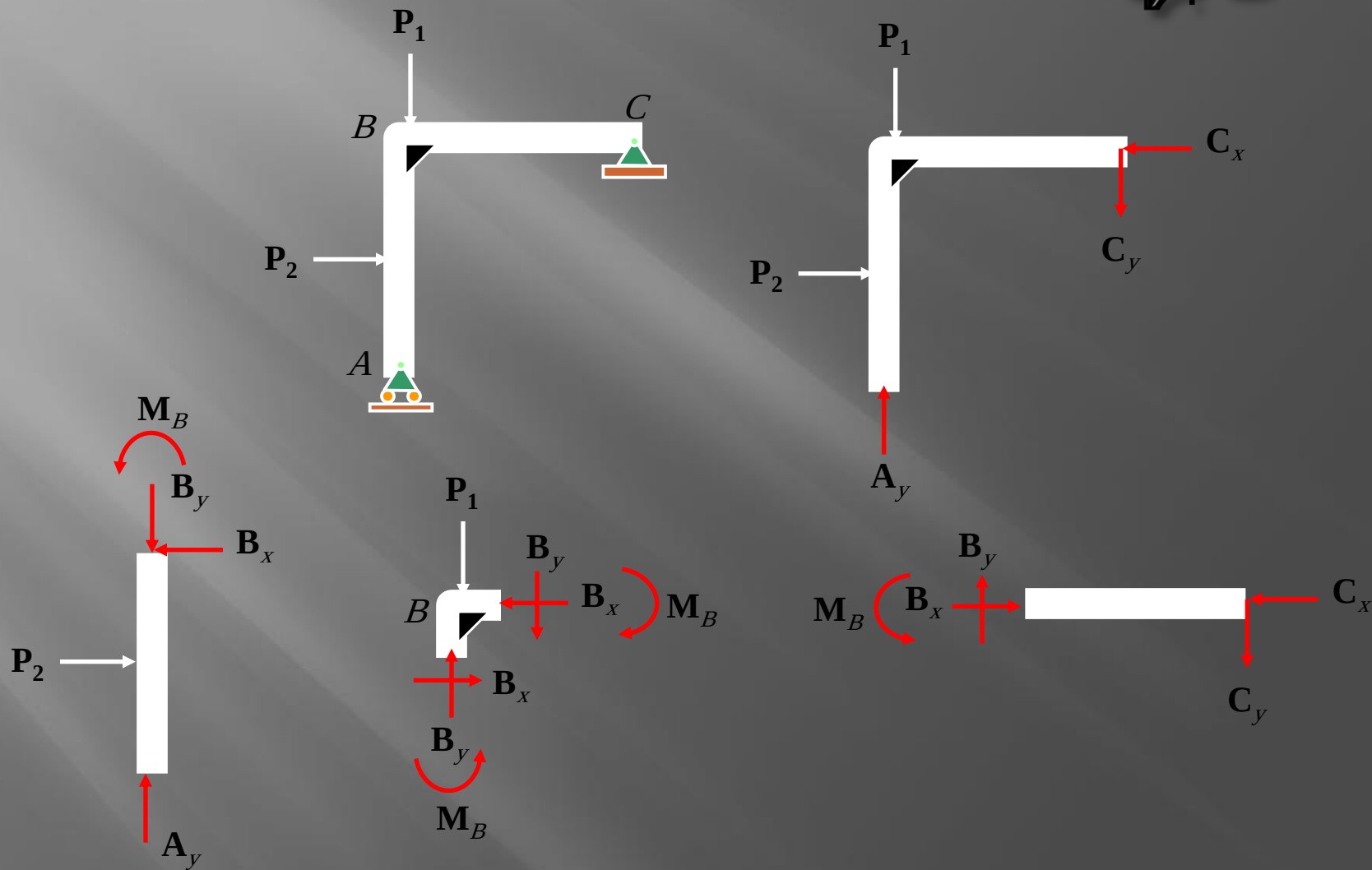


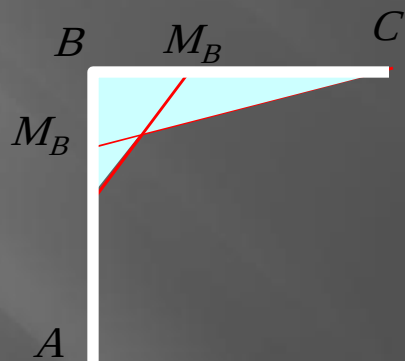
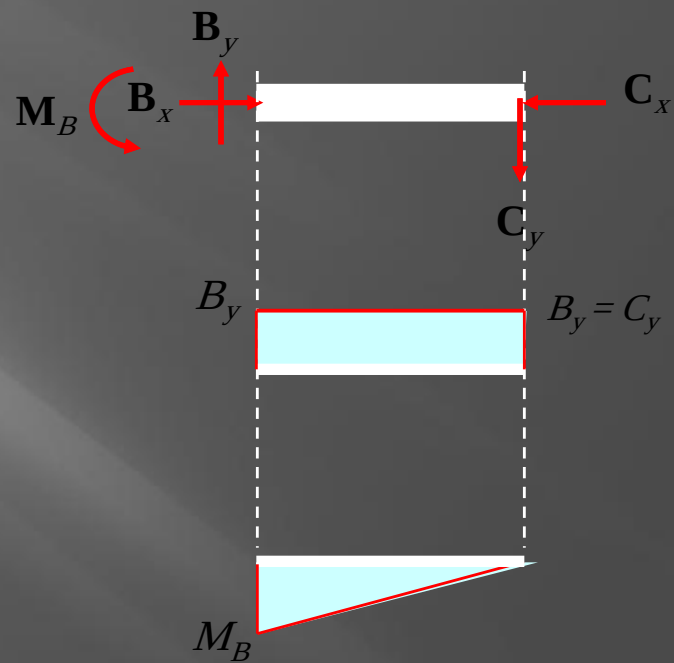
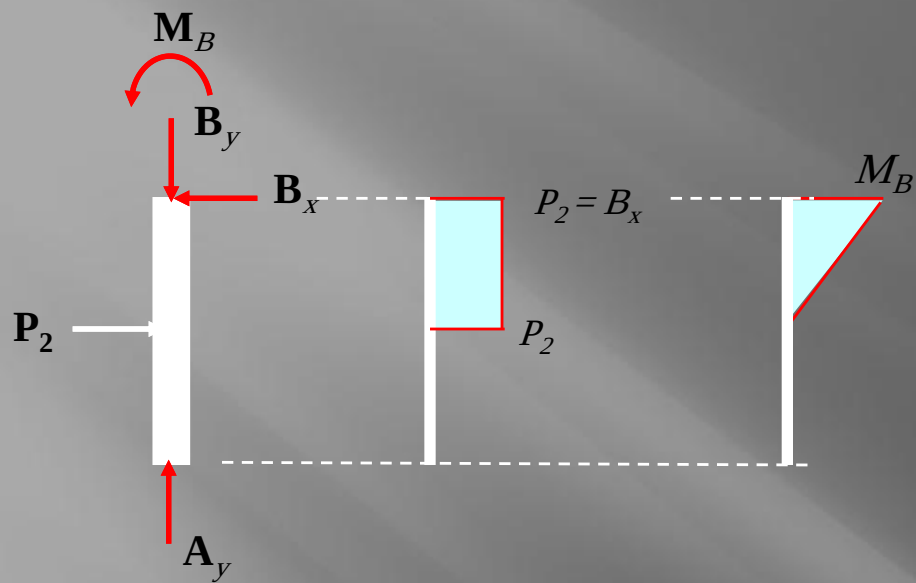
حل:





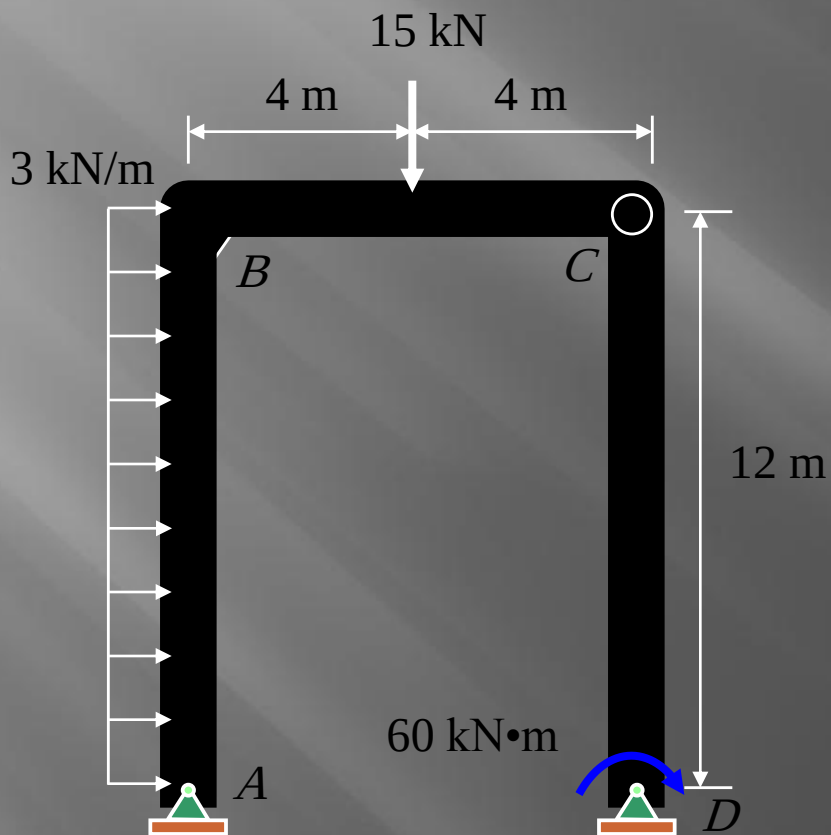
دیاگرام برش و لنگر در قابها



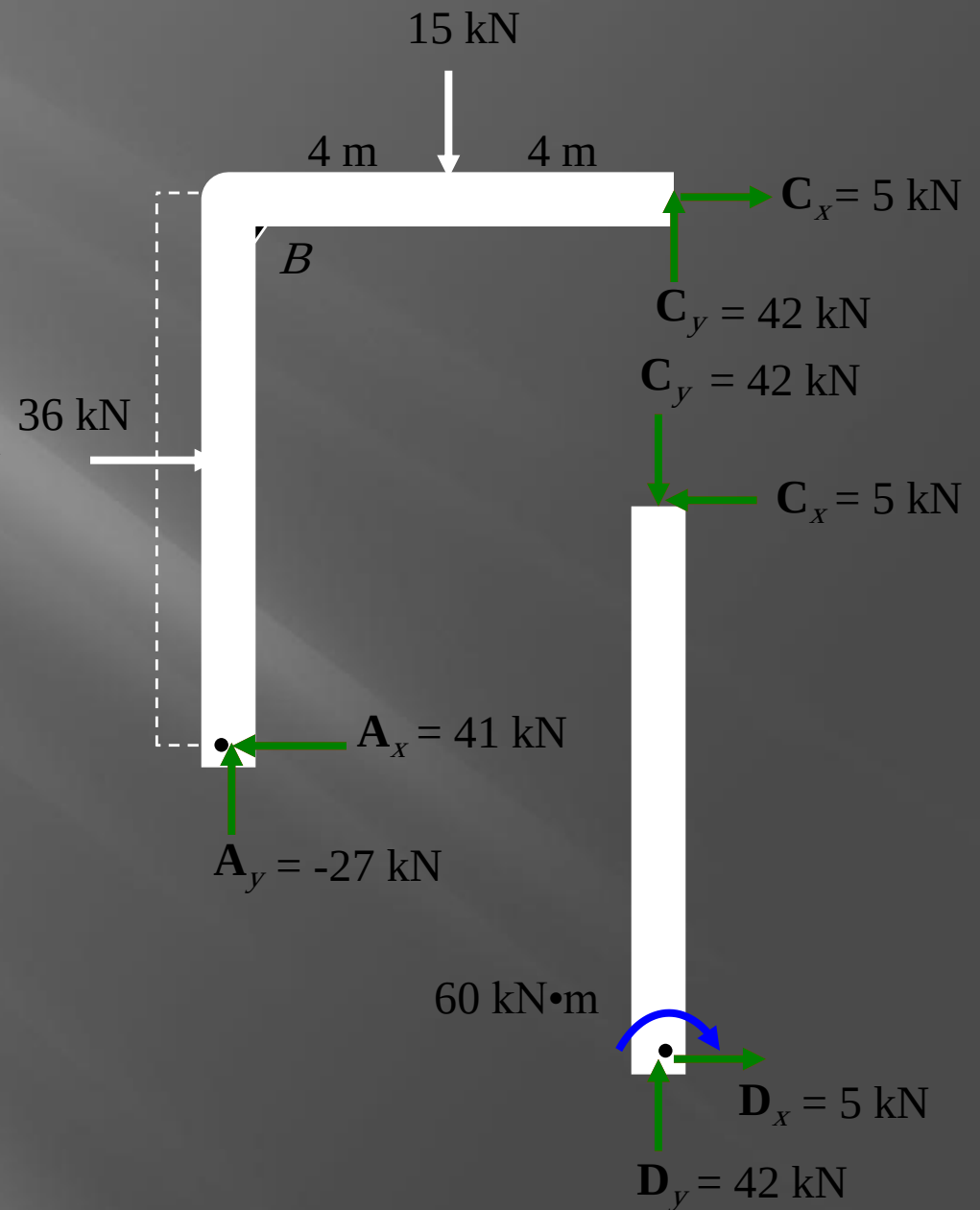
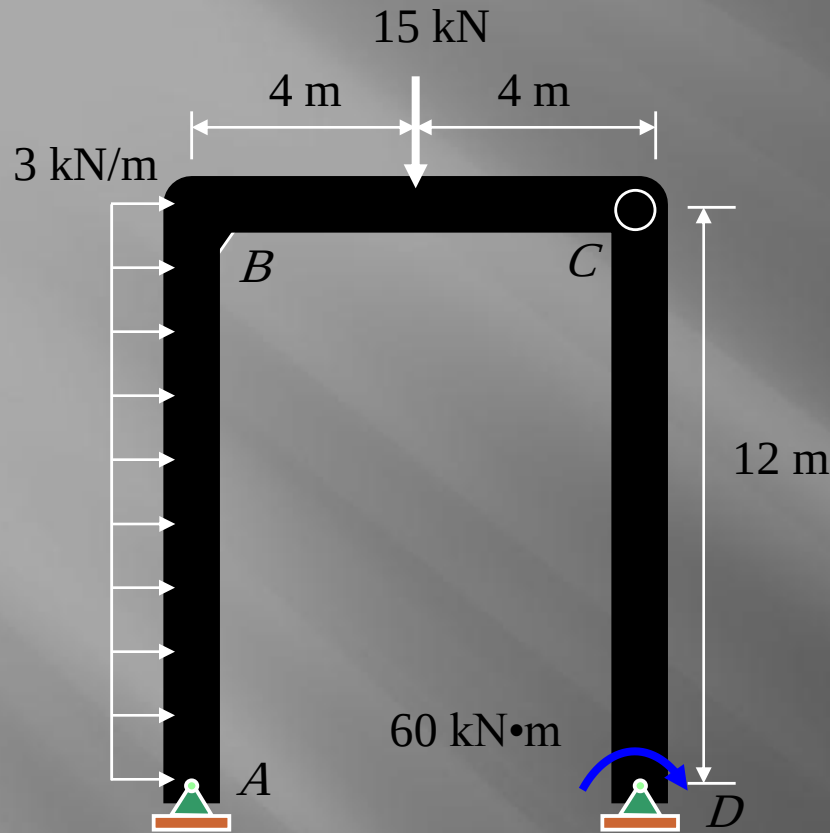


مثال

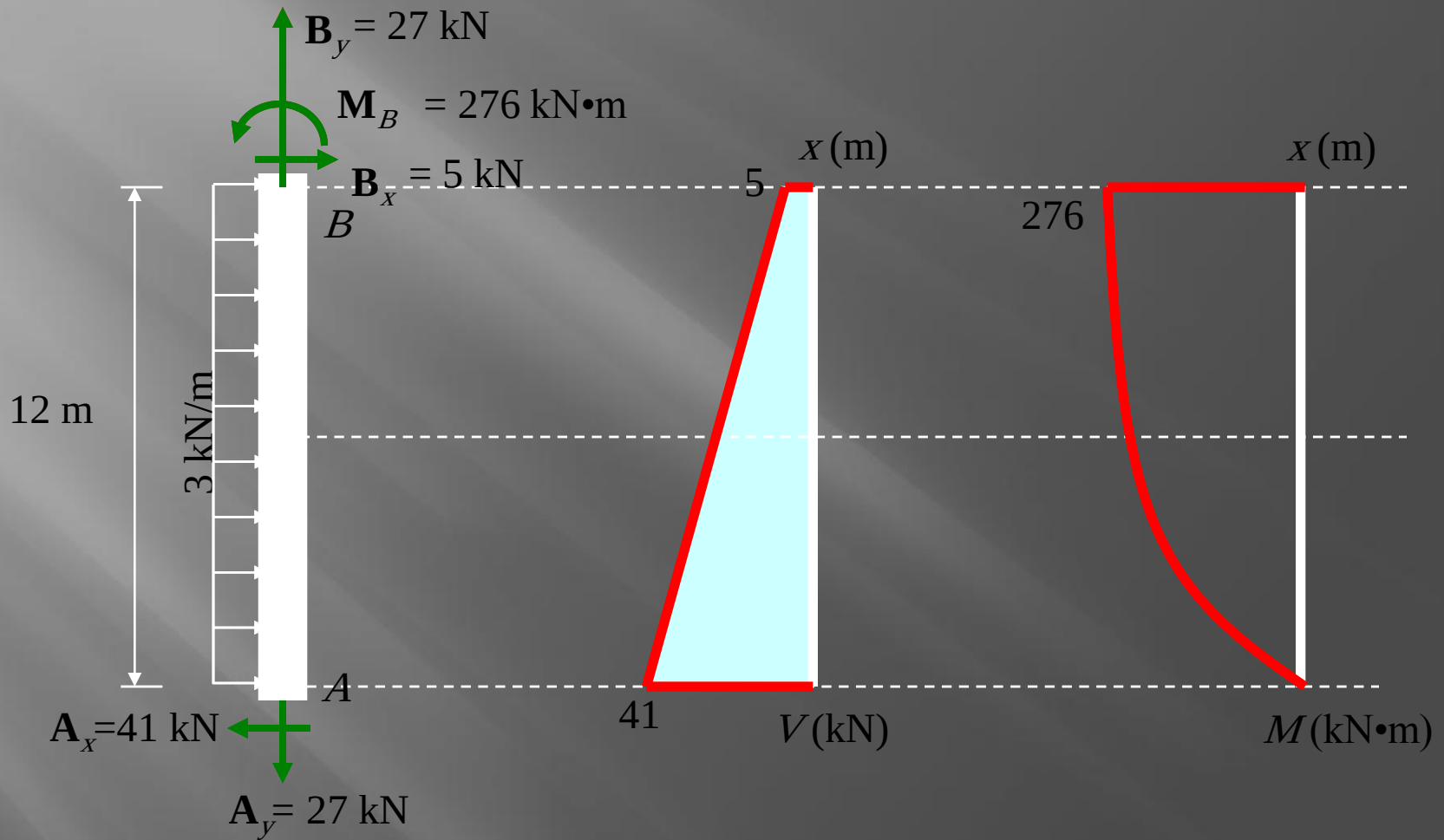
نمودار لنگر را برای قاب نشان داده شده رسم کنید .
فرض کنید A و C و D لولا هستند و B گیردار است .

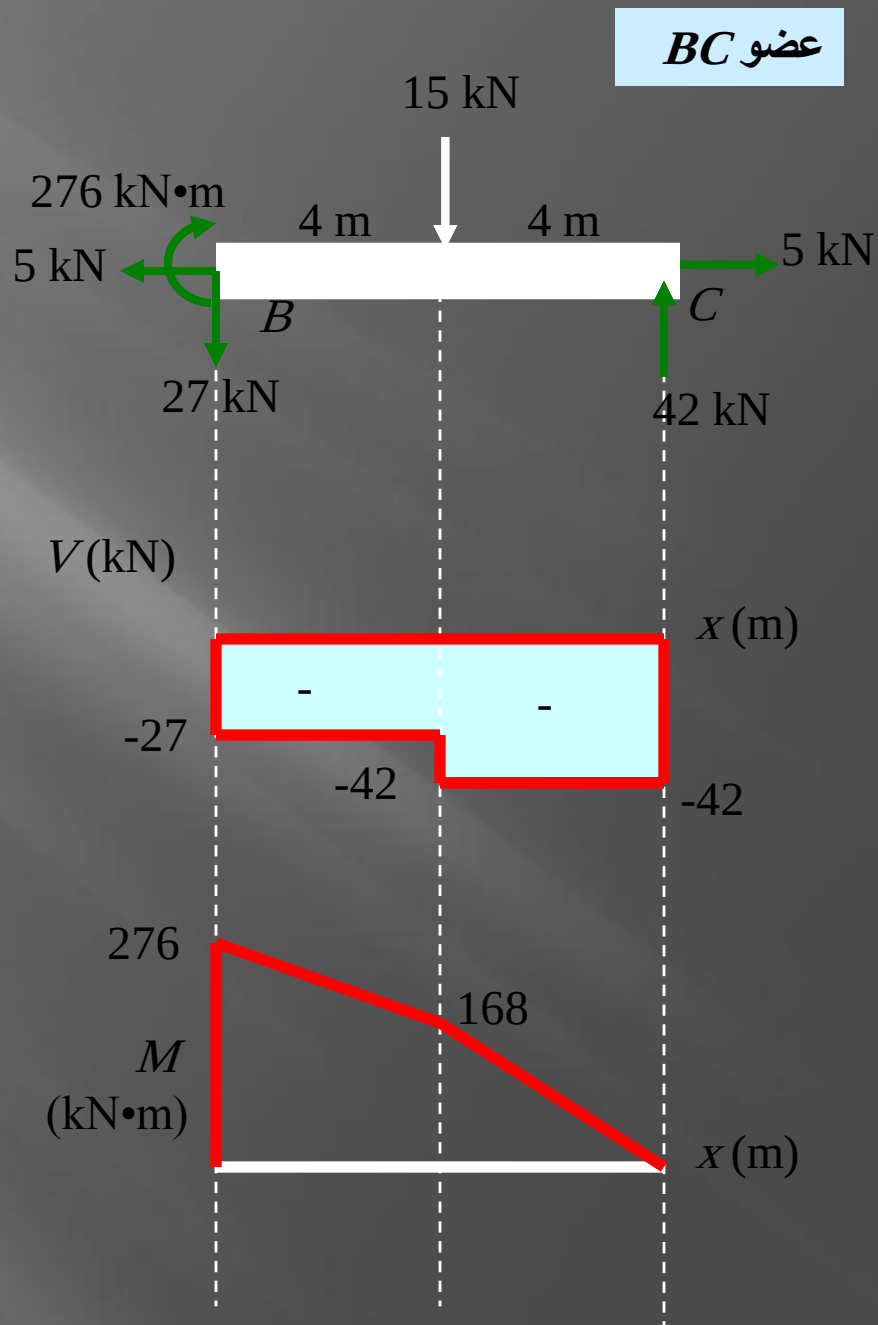
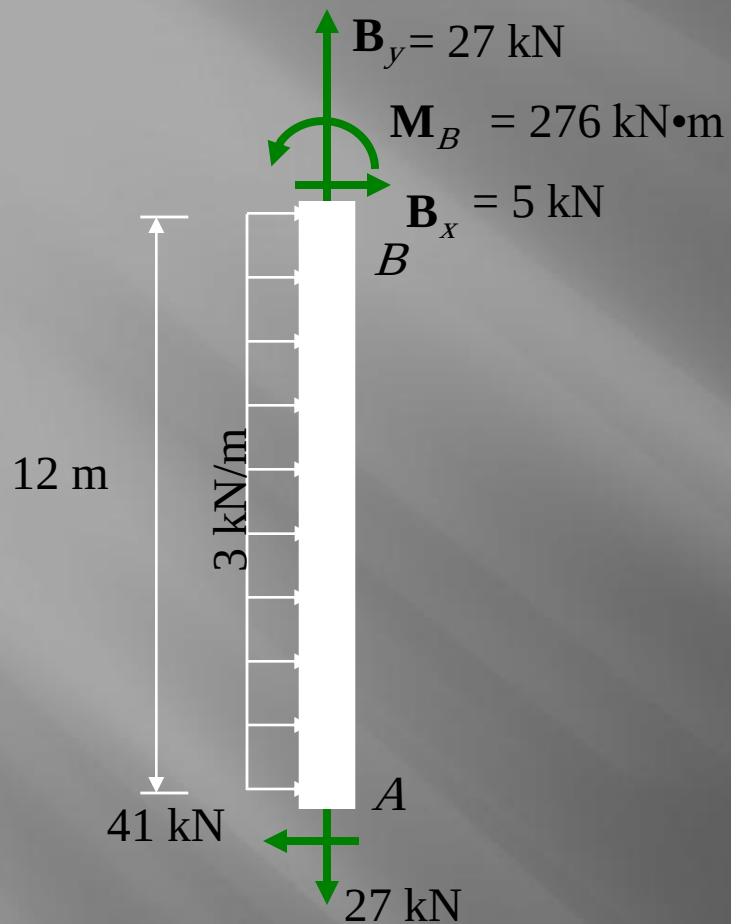


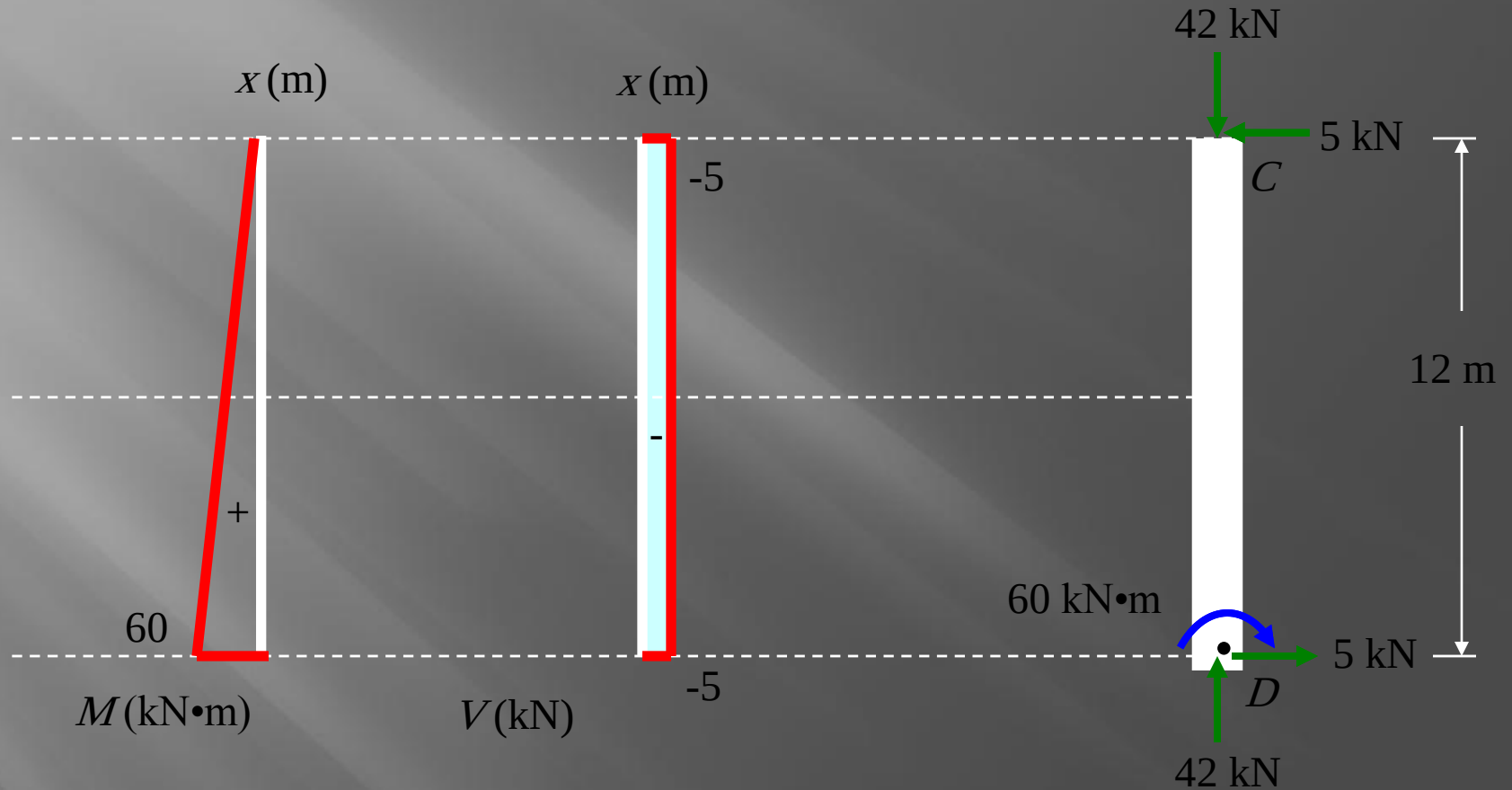
پیدا کردن واکنش های تکیه گاهی



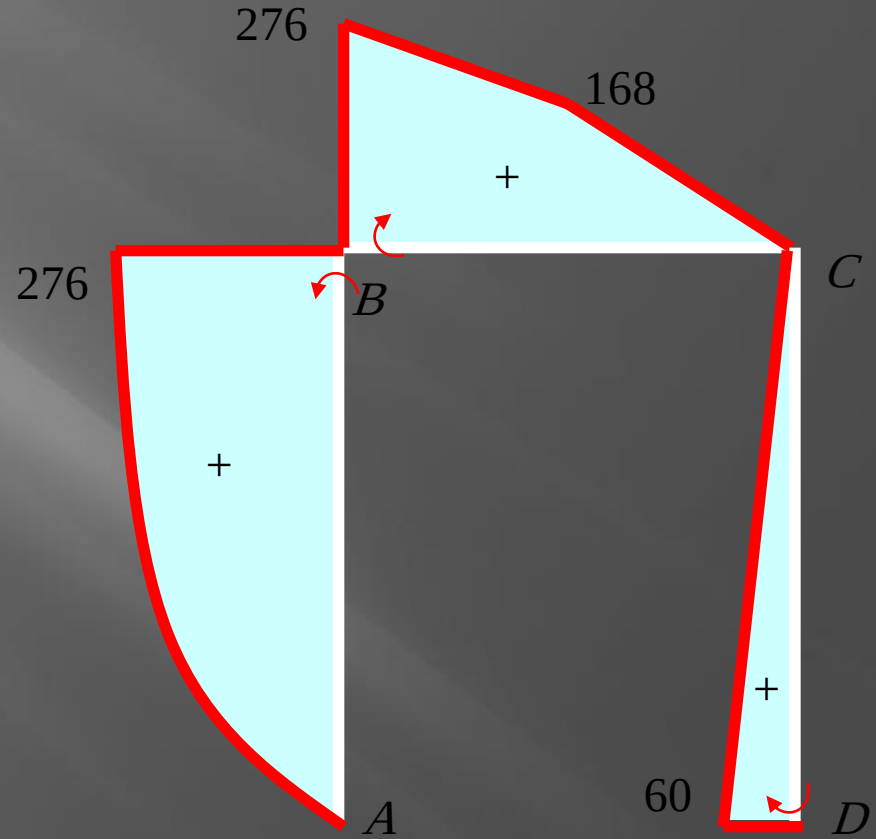
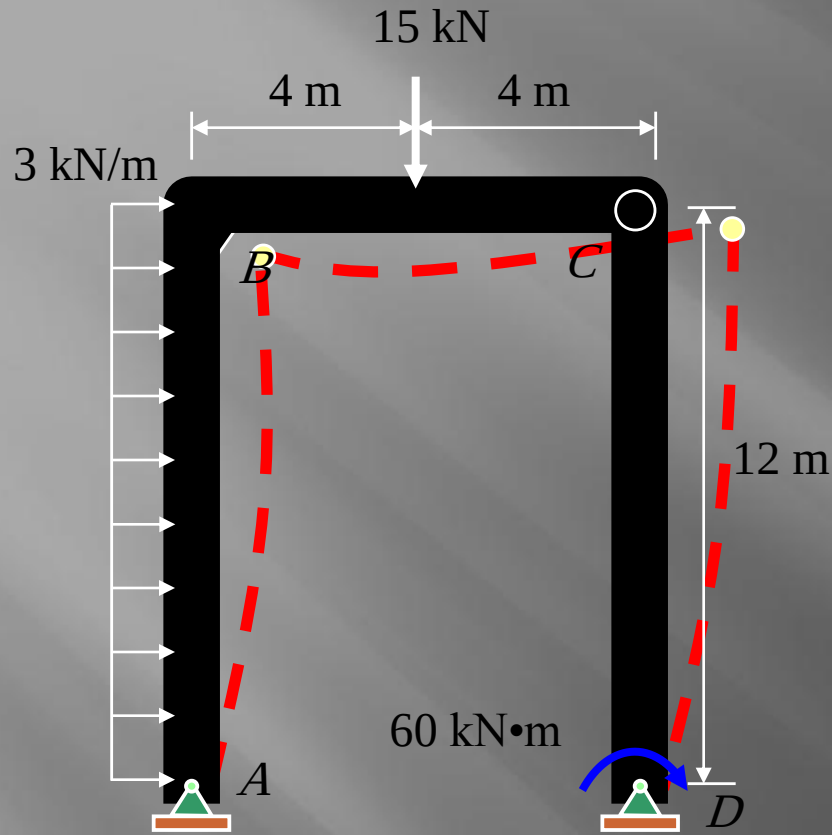
عضو AB





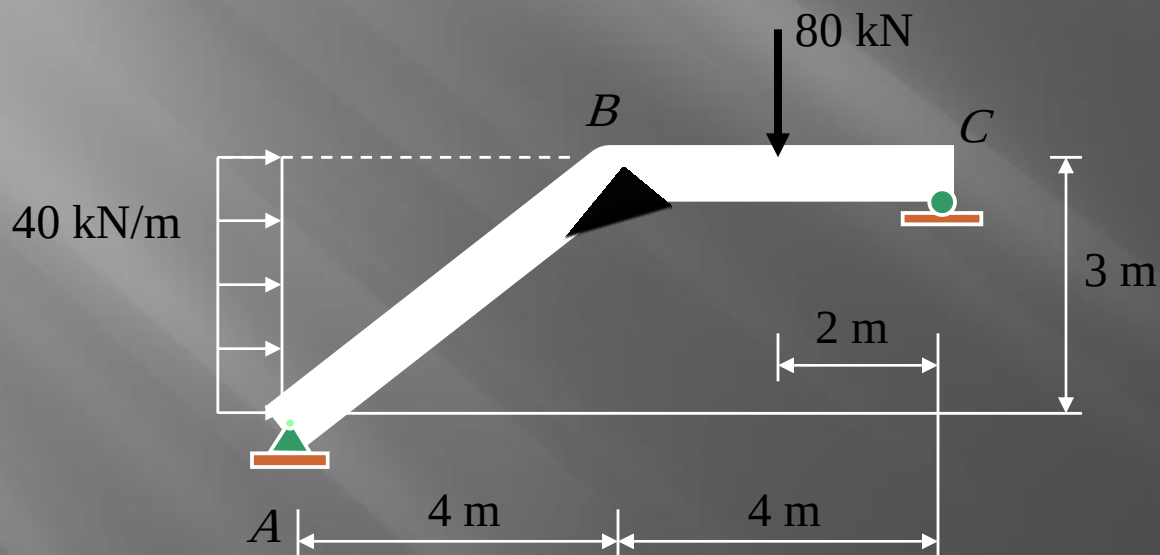


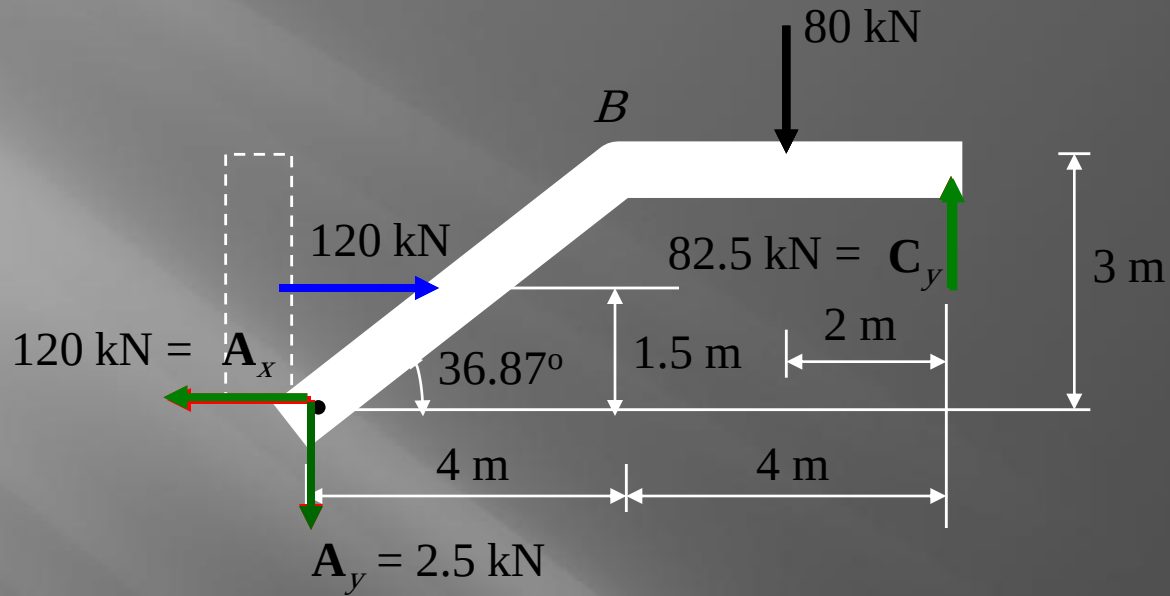
دیاگرام لنگر خمشی در قاب



مثال

نمودار لنگر را برای قاب نشان داده شده رسم کنید .
فرض کنید A لولاست C غلتکی است و B گیردار است .





$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0;$$

$$- (120)(1.5) - (80)(6) + 8C_y = 0$$

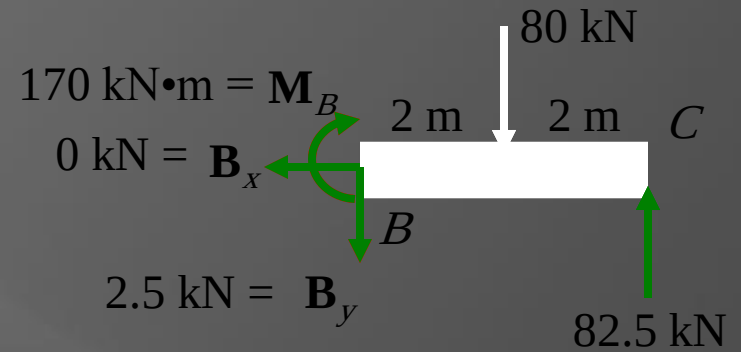
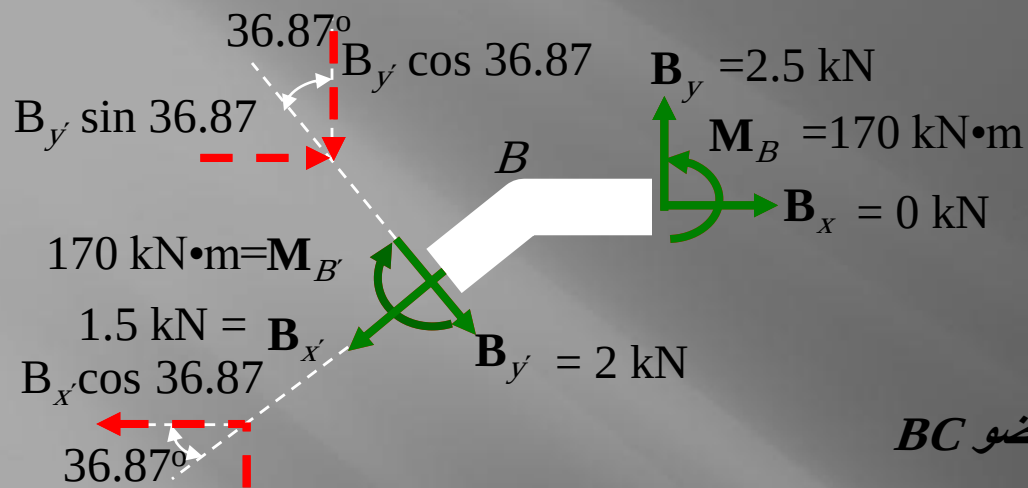
$$\uparrow C_y = 82.5 \text{ kN},$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$\leftarrow A_x = 120 \text{ kN}, \quad -A_x + 120 = 0;$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$- A_y - 80 + 82.5 = 0; \quad \downarrow A_y = 2.5 \text{ kN},$$



عضو BC

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0:$$

$$-M_B - 80(2) + 82.5(4) = 0, \quad M_B = 170 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0:$$

$$\downarrow B_y = 2.5 \text{ kN}, \quad -B_y - 80 + 82.5 = 0,$$

اتصال B

$$+\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$----- (1) \quad -B_{x'} \cos 36.87 + B_{y'} \sin 36.87 + 0 = 0$$

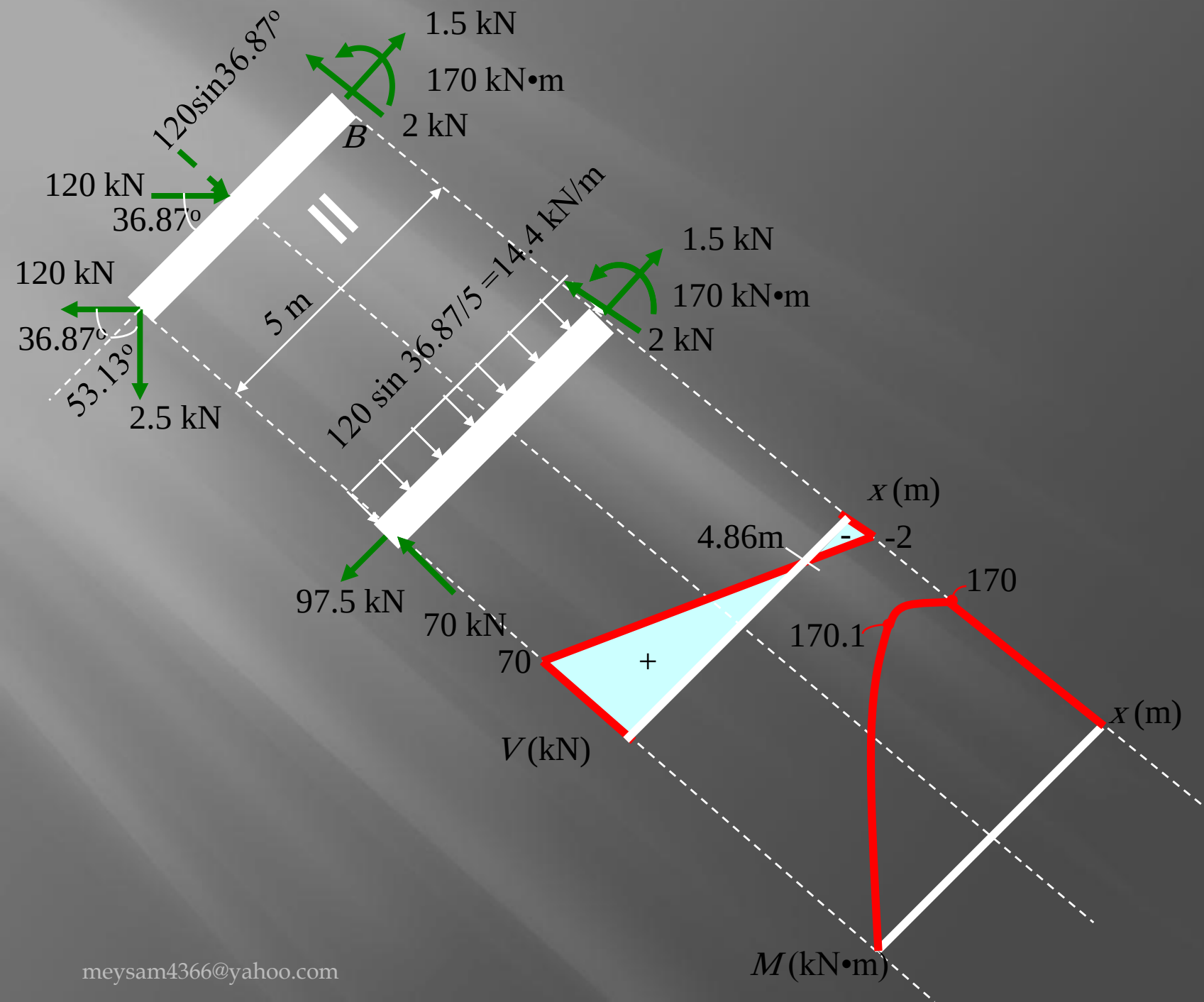
$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

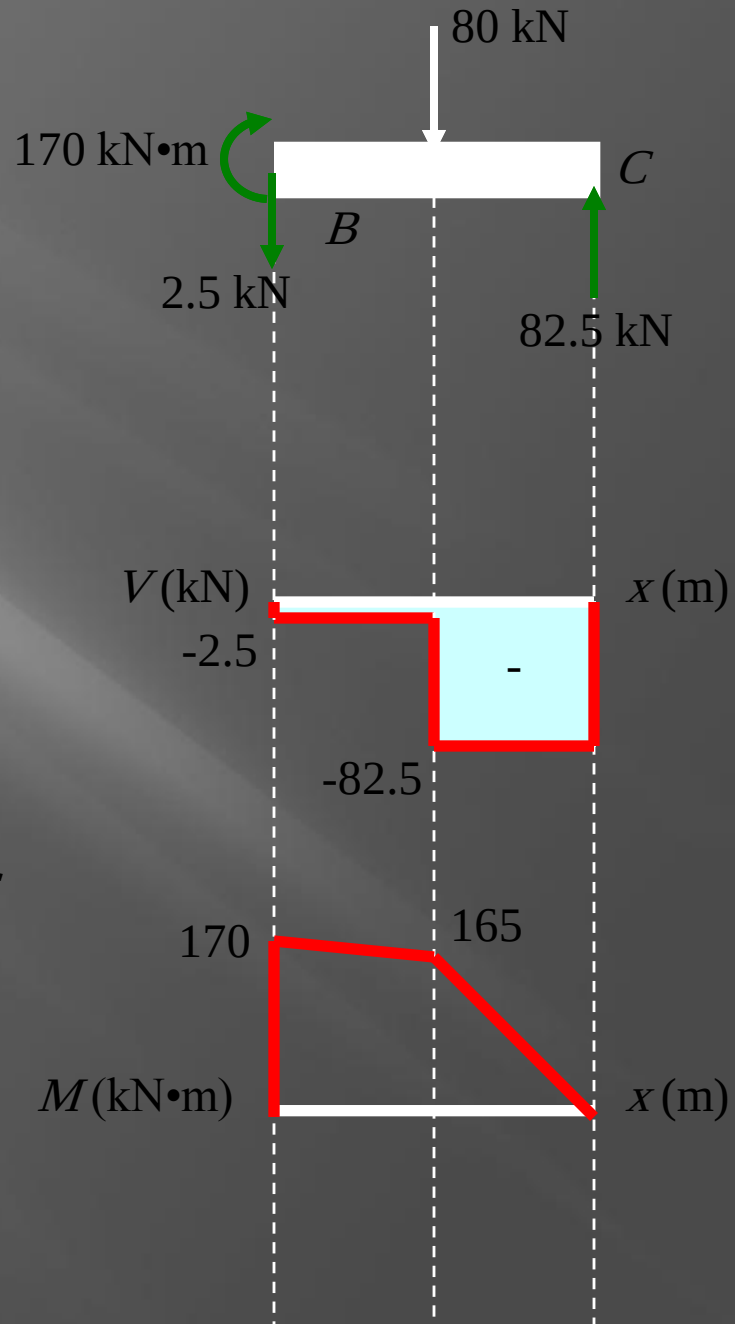
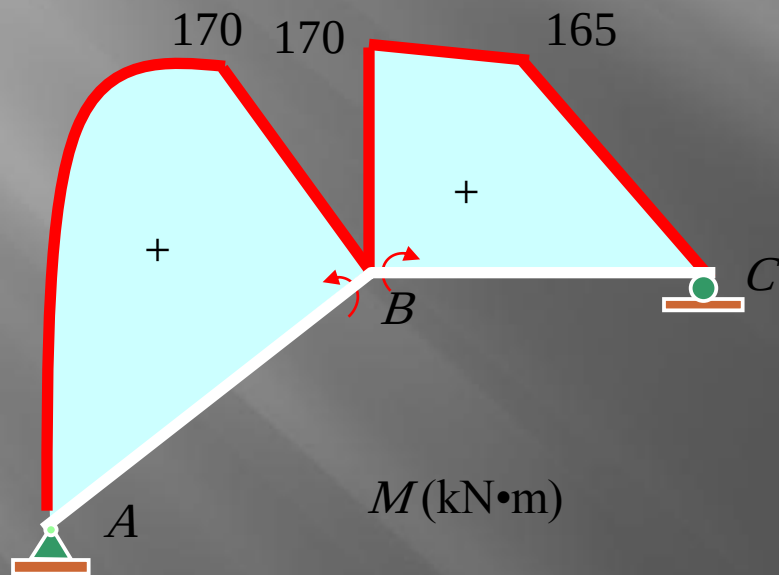
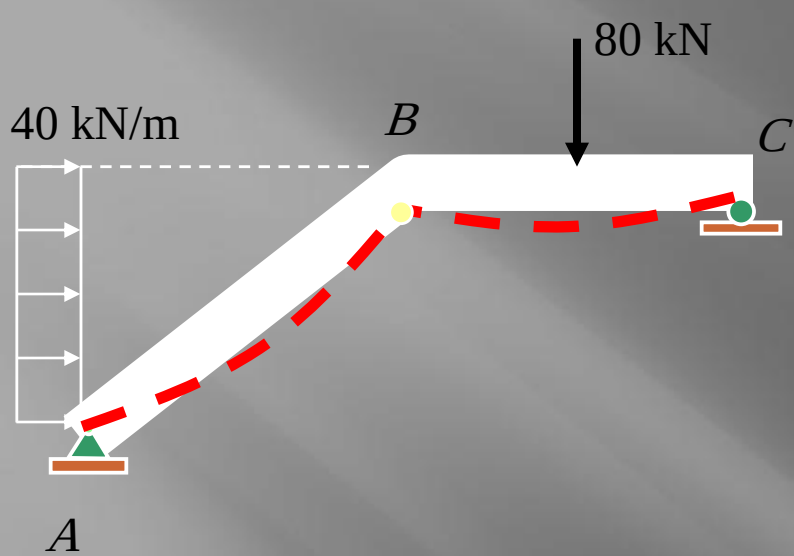
$$----- (2) \quad -B_{x'} \sin 36.87 - B_{y'} \cos 36.87 + 2.5 = 0$$

$$B_{y'} = 2 \text{ kN}$$

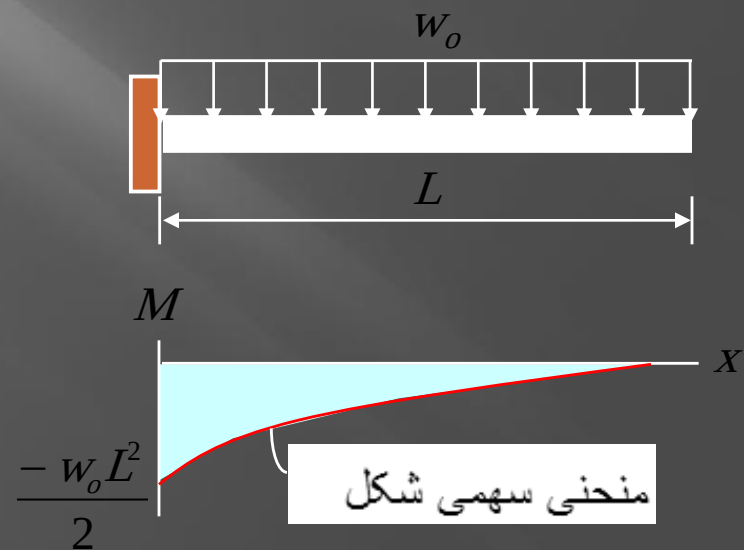
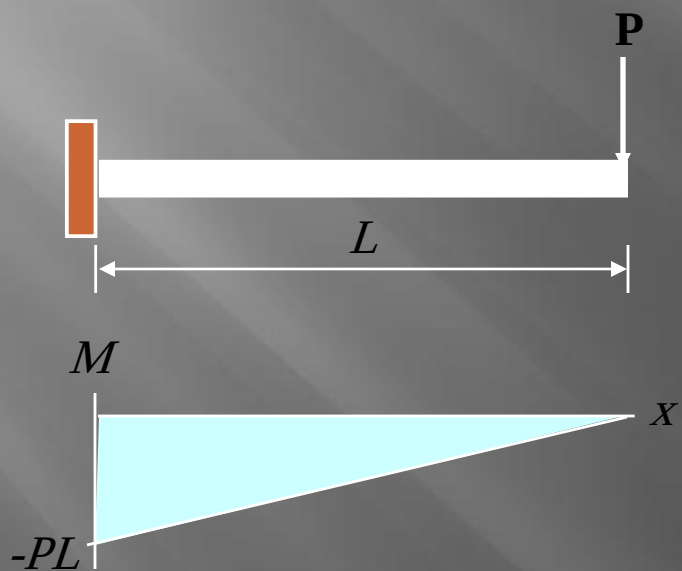
$$B_{x'} = 1.5 \text{ kN}$$

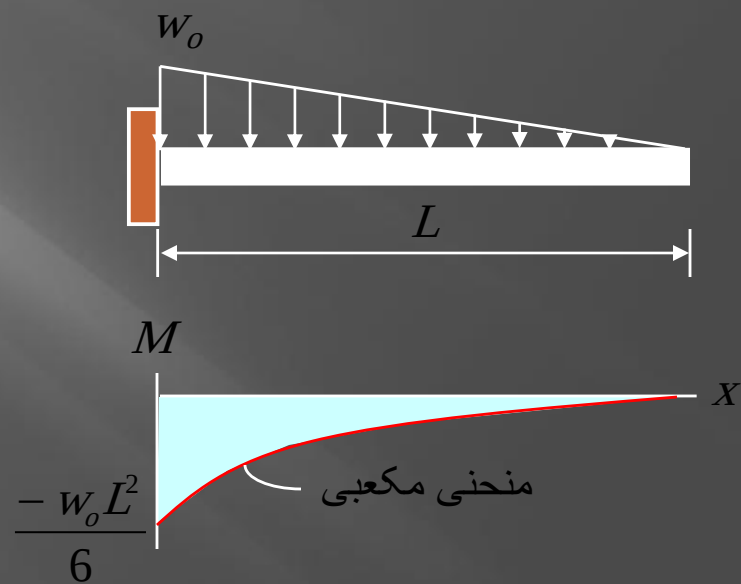
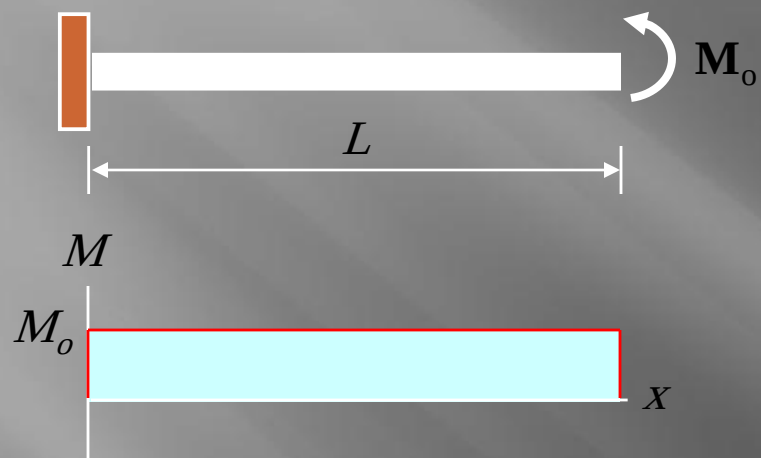
: ازحل معادلات (1) و (2)

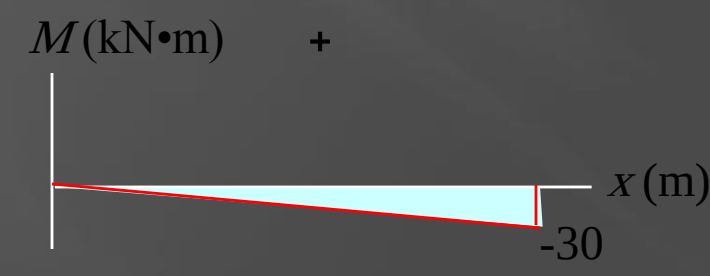
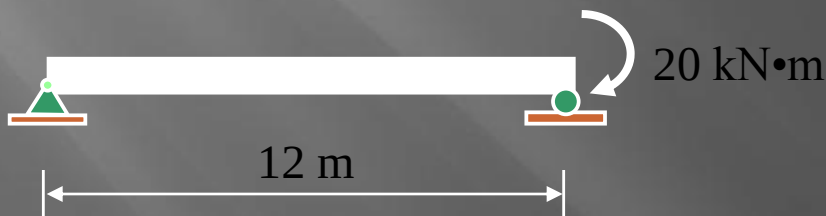
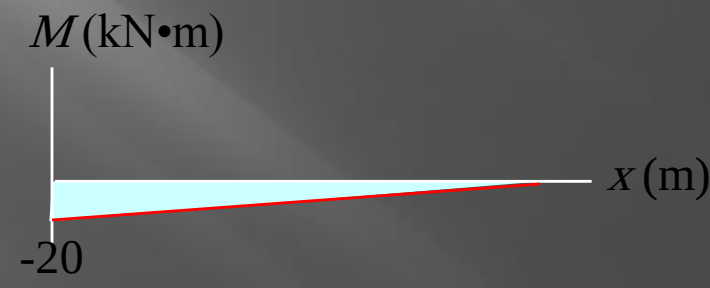
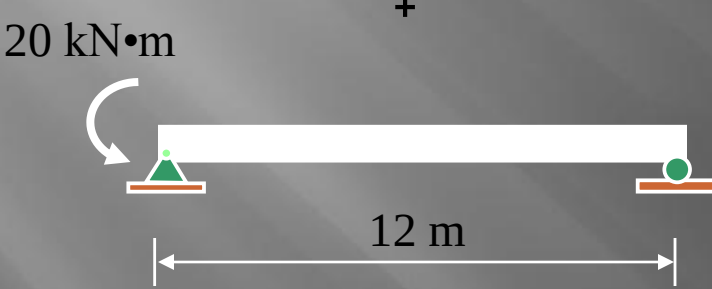
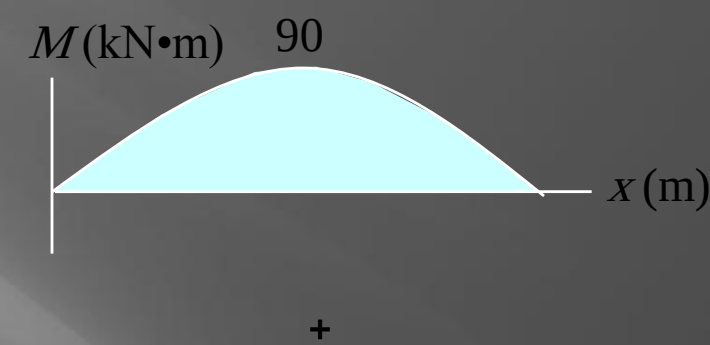
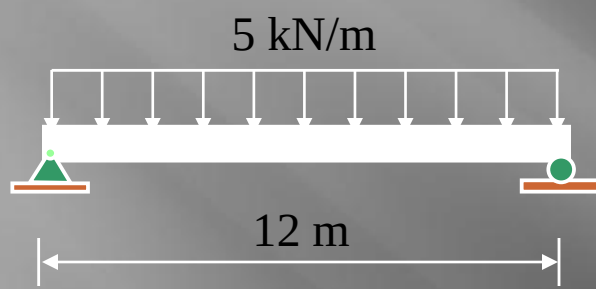
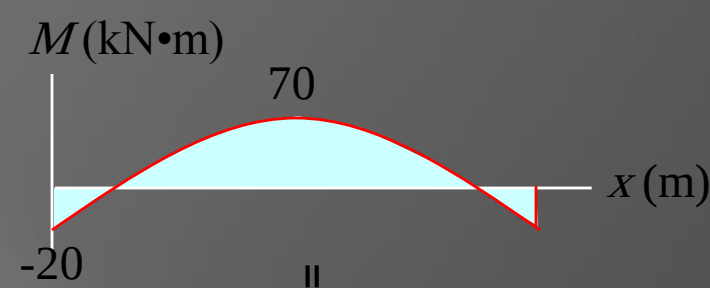
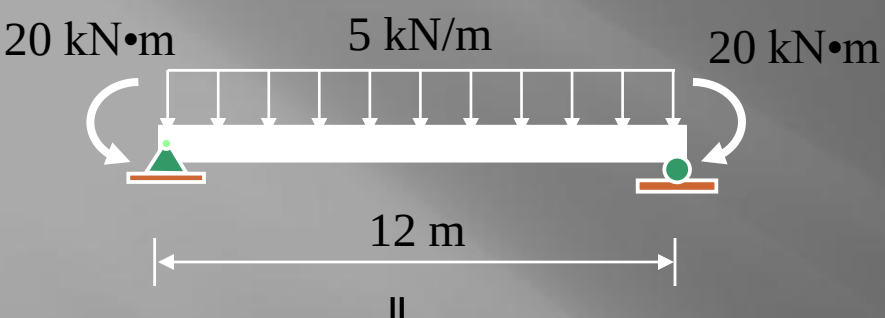




□ اکثر بارگذاری ها در تحلیل سازه ترکیبی از بارها هستند :

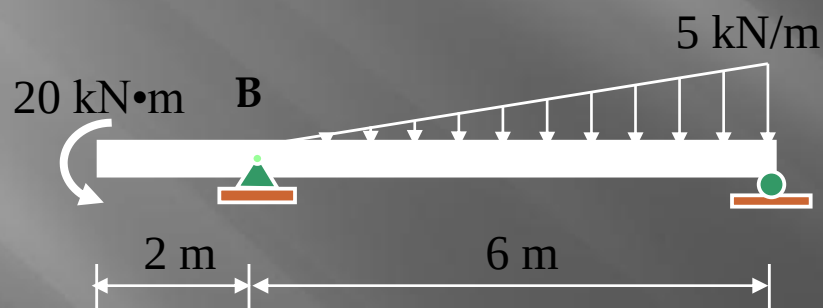




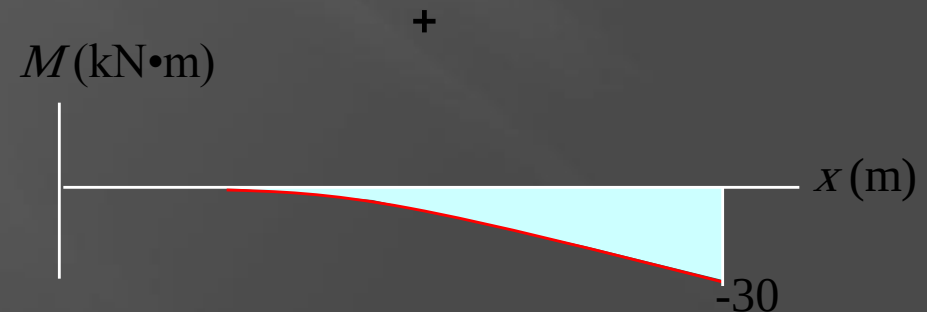
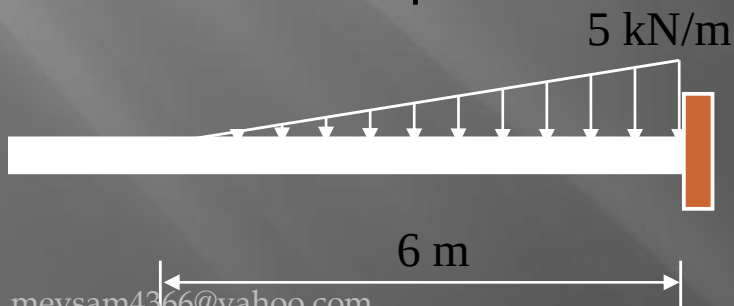
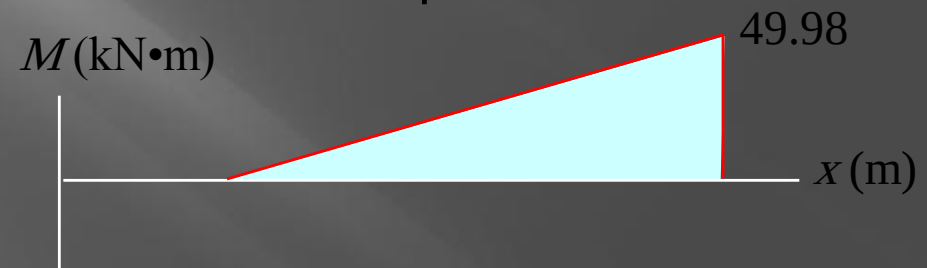
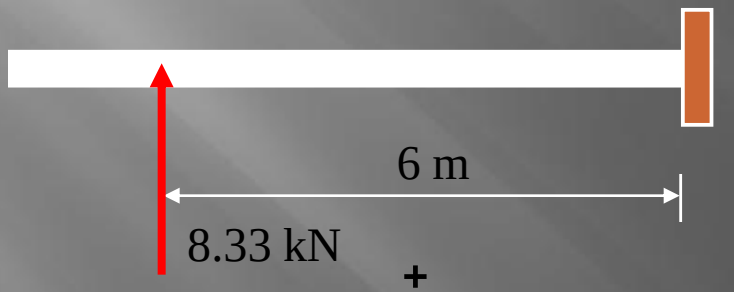
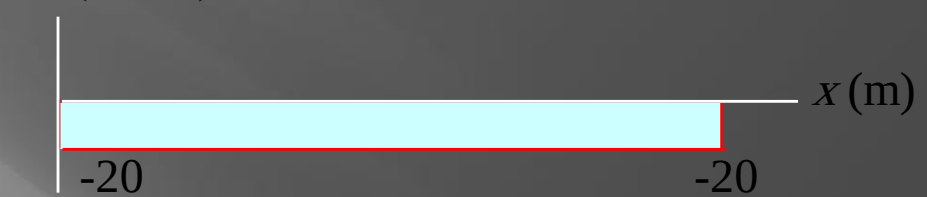
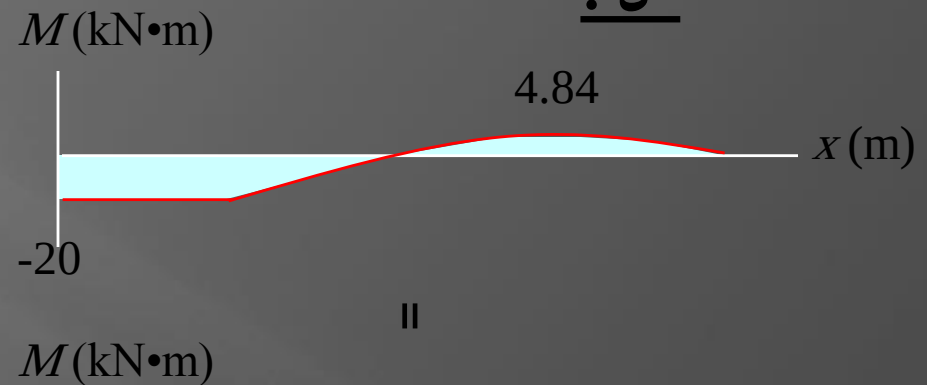
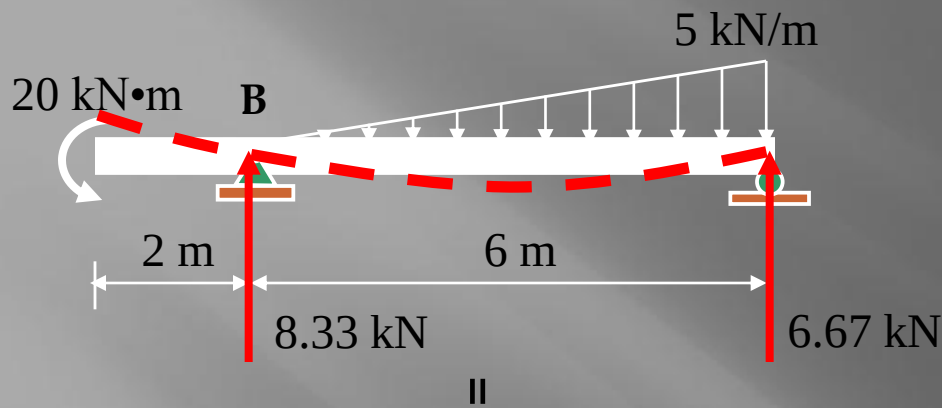


مثال

نمودار لنگر را برای قاب نشان داده شده رسم کنید .
با استفاده از روش (Superpositio). فرض کنید تیر از تکیه گاه B به بعد کنسولی است .



حل :



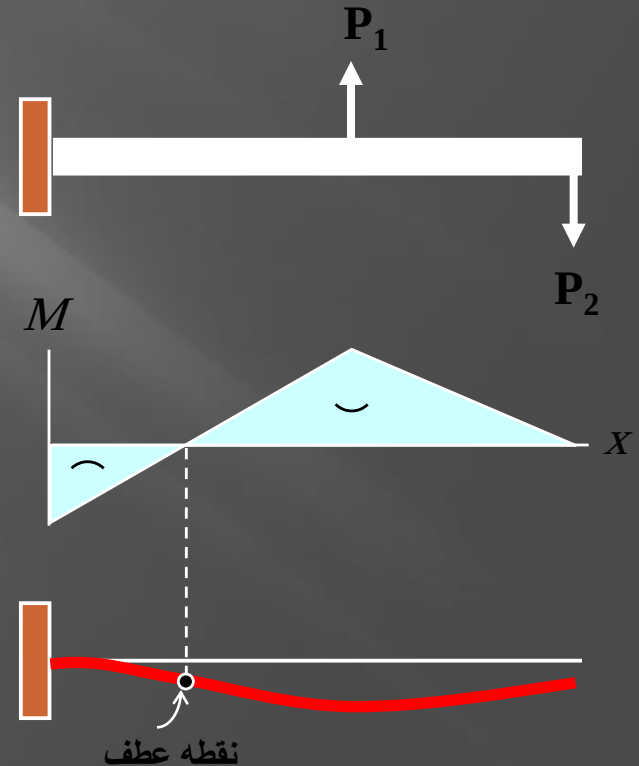
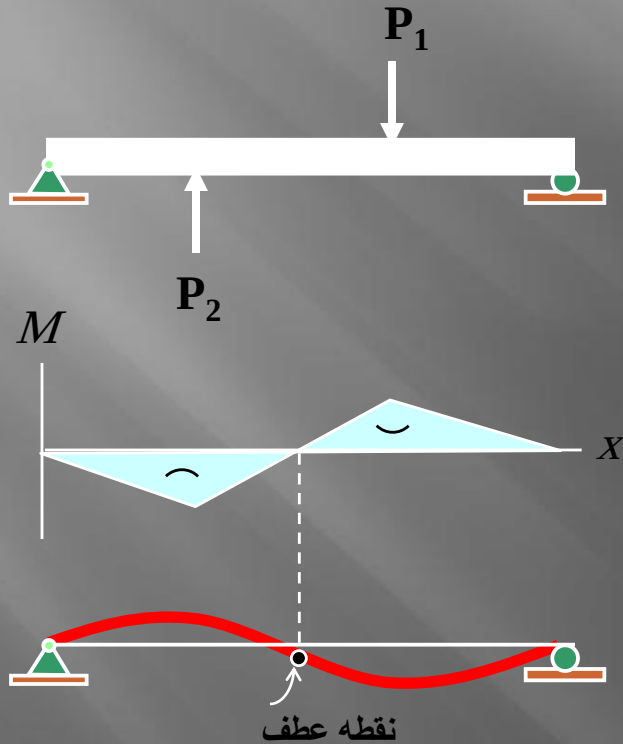
منحنی خمشی



گشتاور مثبت
تقعر روبه بالا



گشتاور منفی
تقعر روبه پایین



دیاگرام خط تاثیر

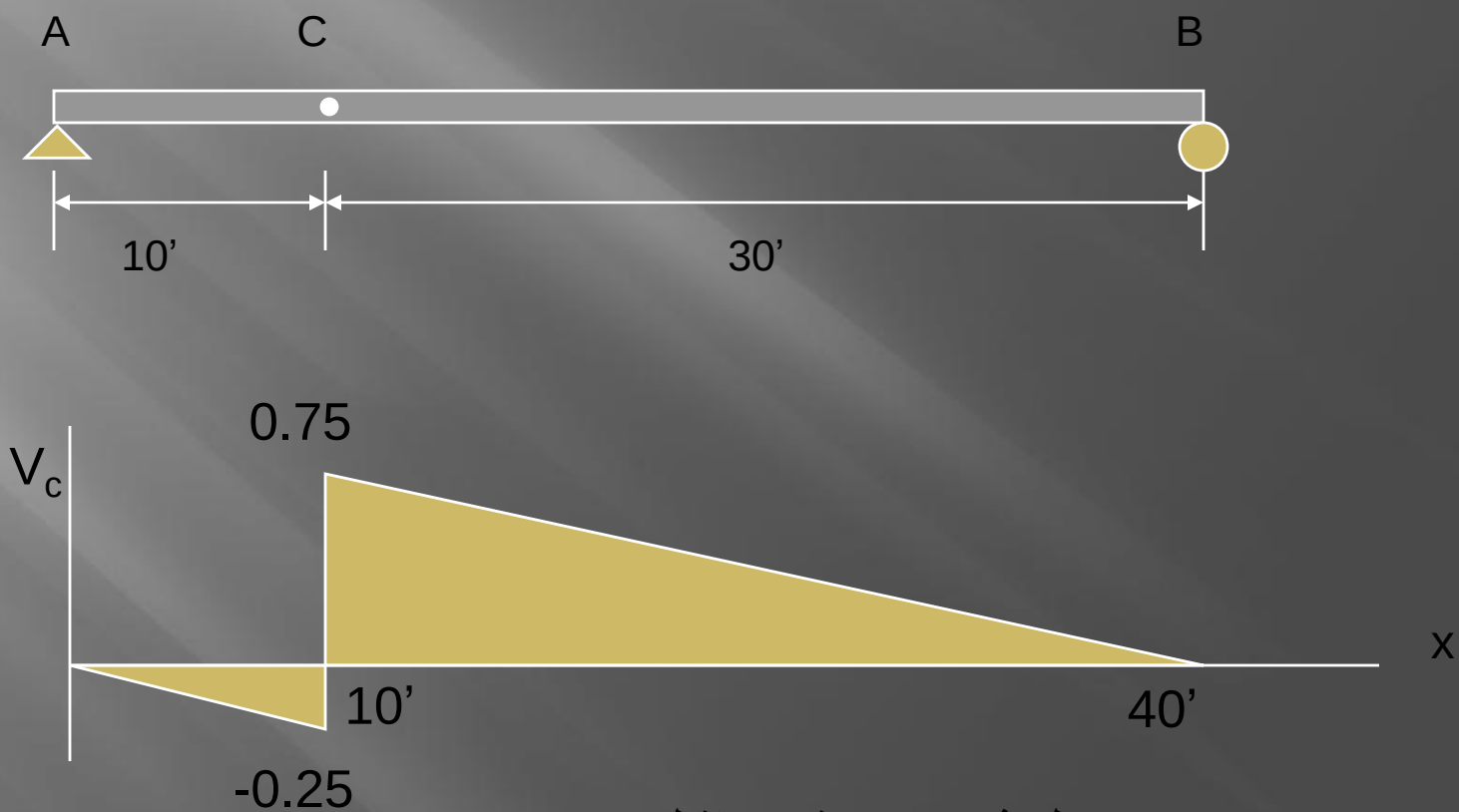
بشترین تاثیر د ر یک نقطه نتیجه عبور تعدادی بار متمرکز پیوسته است.

□ حالت کلی : رسم نمودار خط تاثیر برای عملهای انجام شده (برش و لنگرو..) و در نتیجه :

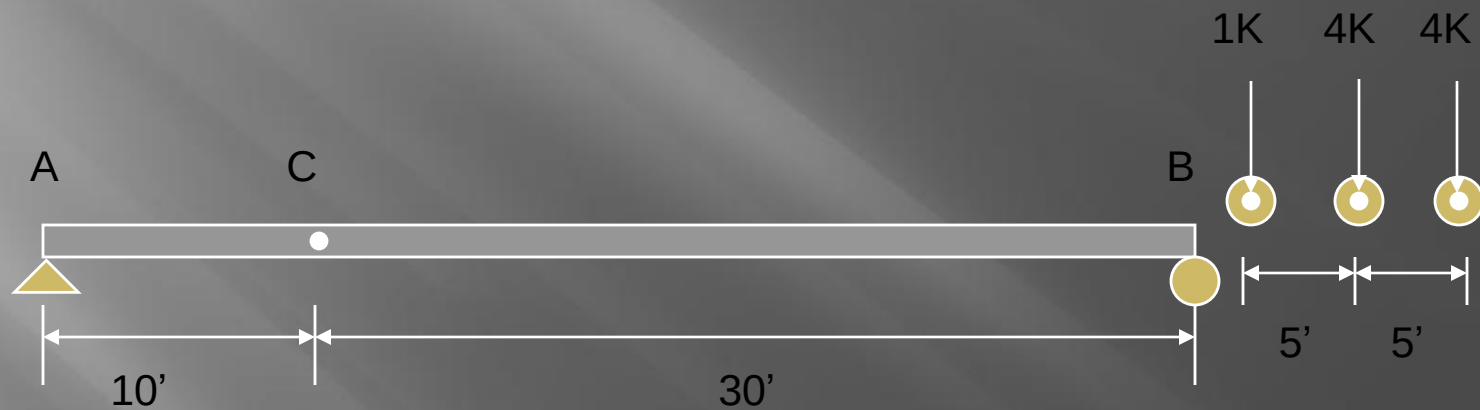
بیشترین تاثیر (بار نقطه ای) = بزرگی نیروی X بالاترین نقطه از دیاگرام خط تاثیر

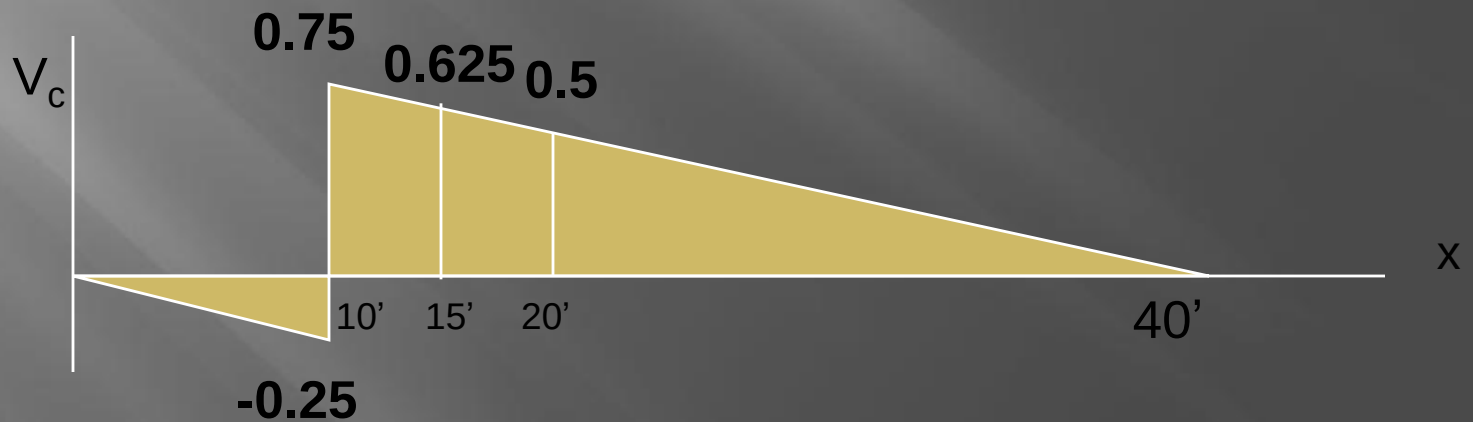
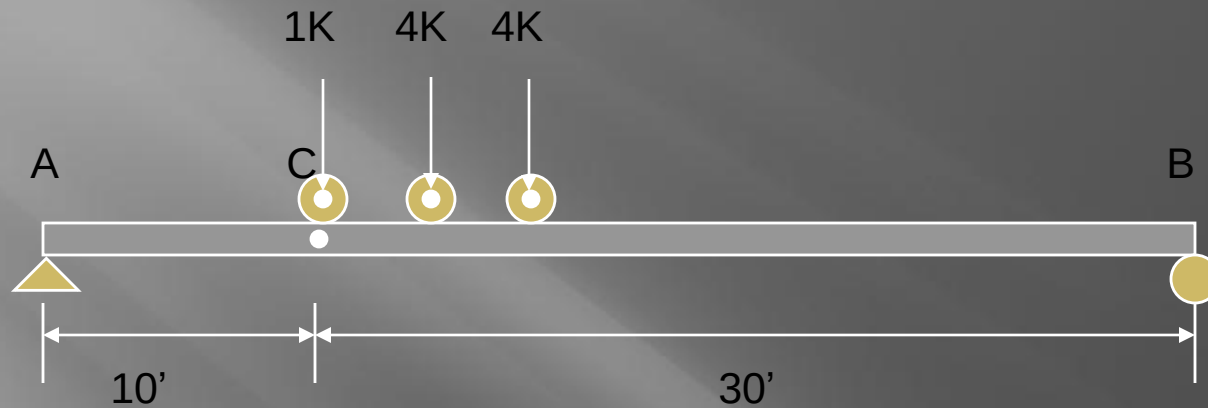
□ در بعضی موارد عبور چندین بار متمرکز از روی نقطه ای سازه است
مثلا عبور قطار از روی پل

برش



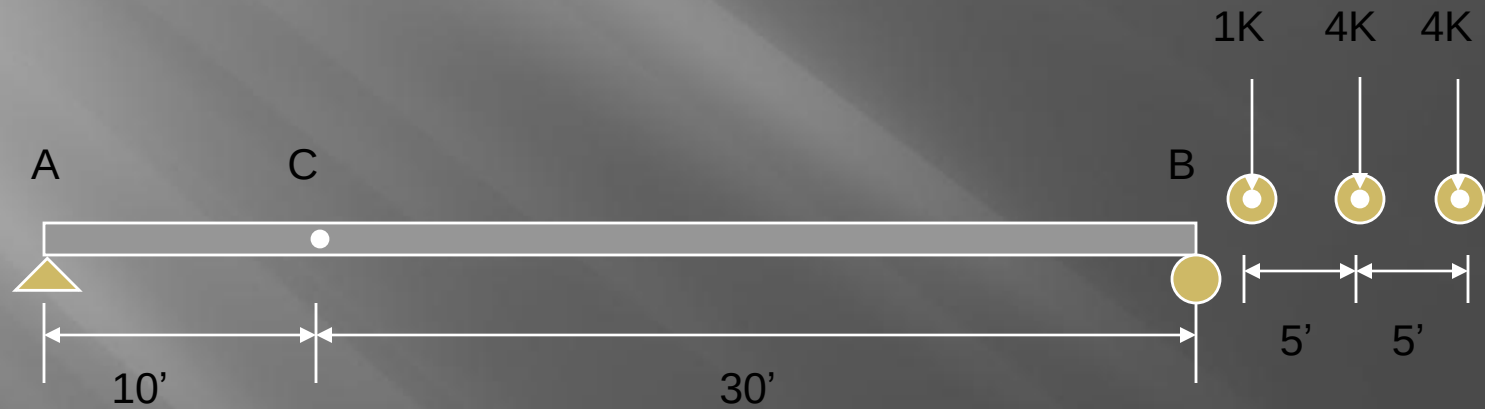
مورد اول

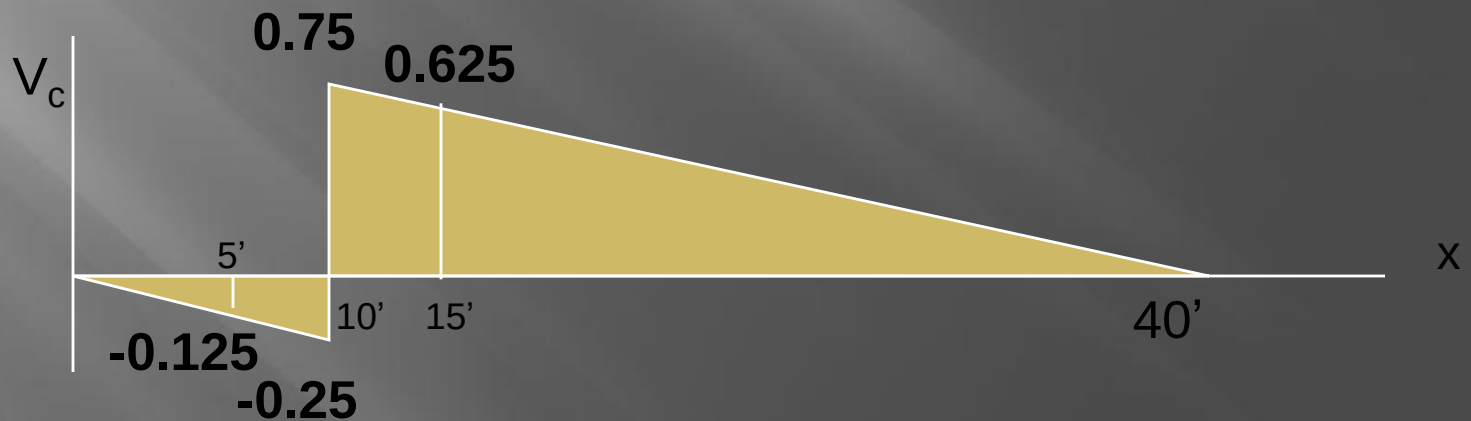
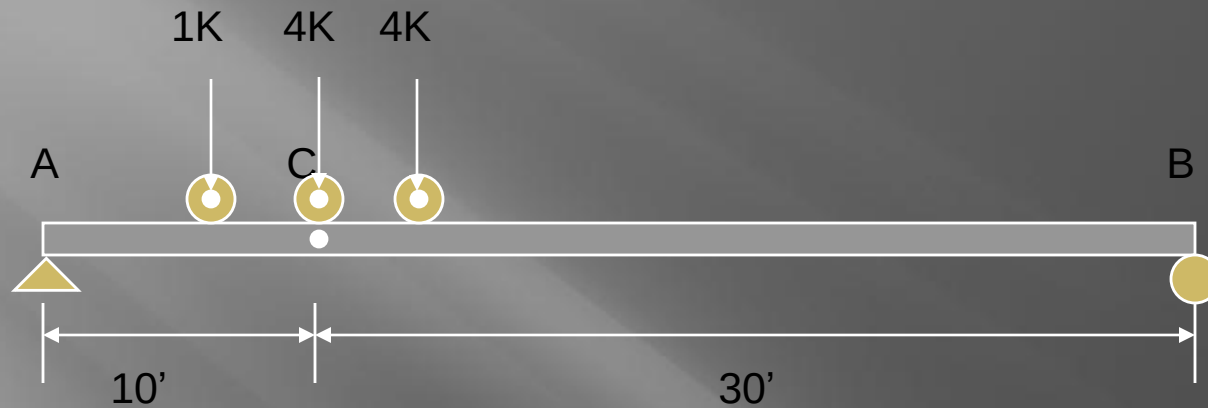




$$(V_c)_1 = 1(0.75) + 4(0.625) + 4(0.5) = 5.25 \text{ k}$$

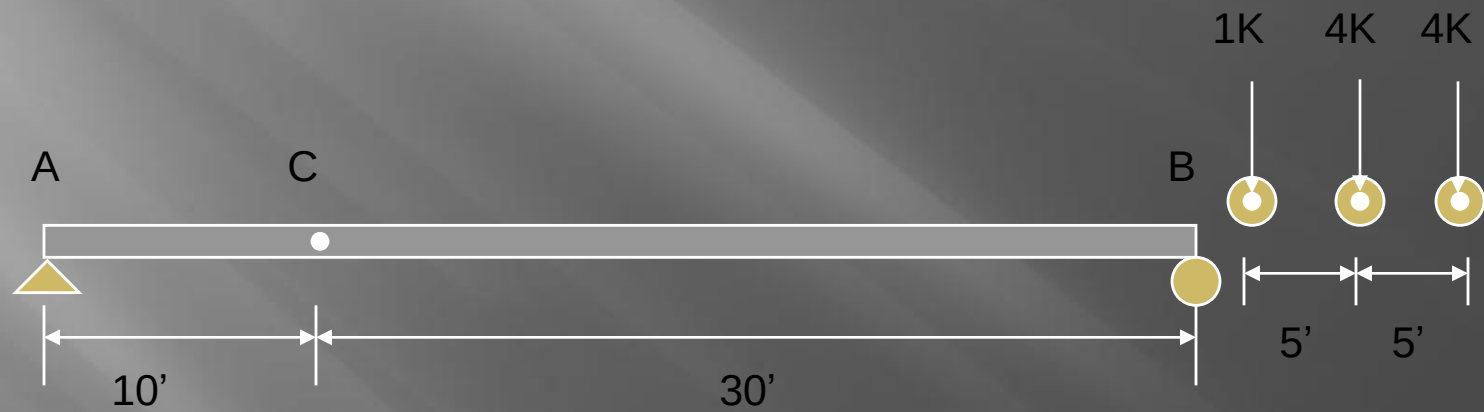
مورد دوم

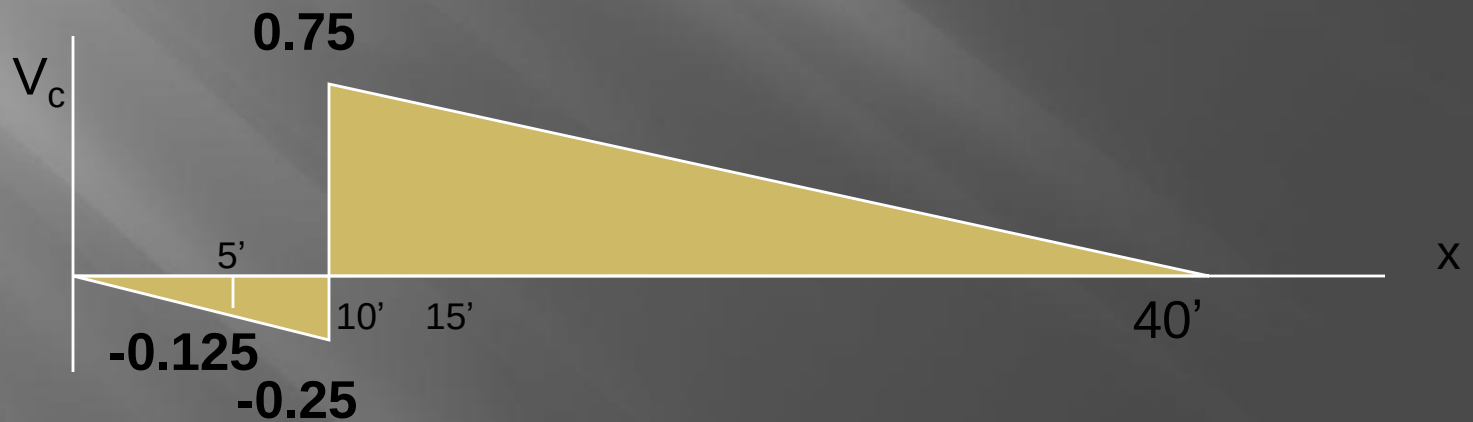
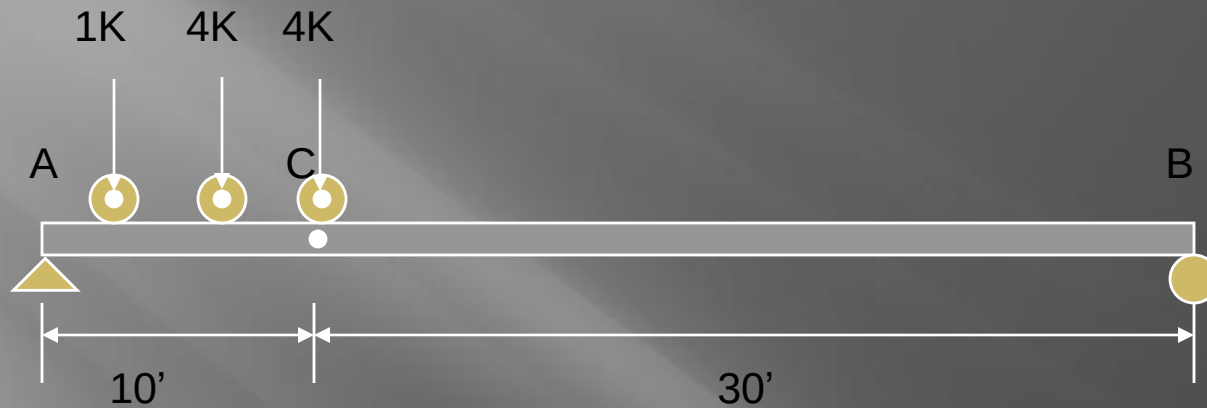




$$(V_c)_2 = 1(-0.125) + 4(0.75) + 4(0.625) = 5.375 \text{ k}$$

مورد سوم





$$(V_c)_3 = 1(0) + 4(-0.125) + 4(0.75) = 2.5 \text{ k}$$

مقایسه

مورد اول:

$$(V_c)_1 = 1(0.75) + 4(0.625) + 4(0.5) = 5.25 \text{ k}$$

مورد دوم:

$$(V_c)_1 = 1(-0.125) + 4(0.75) + 4(0.625) = 5.375 \text{ k}$$

مورد سوم:

$$(V_c)_1 = 1(0) + 4(-0.125) + 4(0.75) = 2.5 \text{ k}$$

تغییر در برش ΔV برای بار P که حرکت میکند از x_1 به x_2 روی
تیر تعیین میشود با:

■ ضرب کردن P در تغییر عرض خط تاثیر $(y_2 - y_1)$.

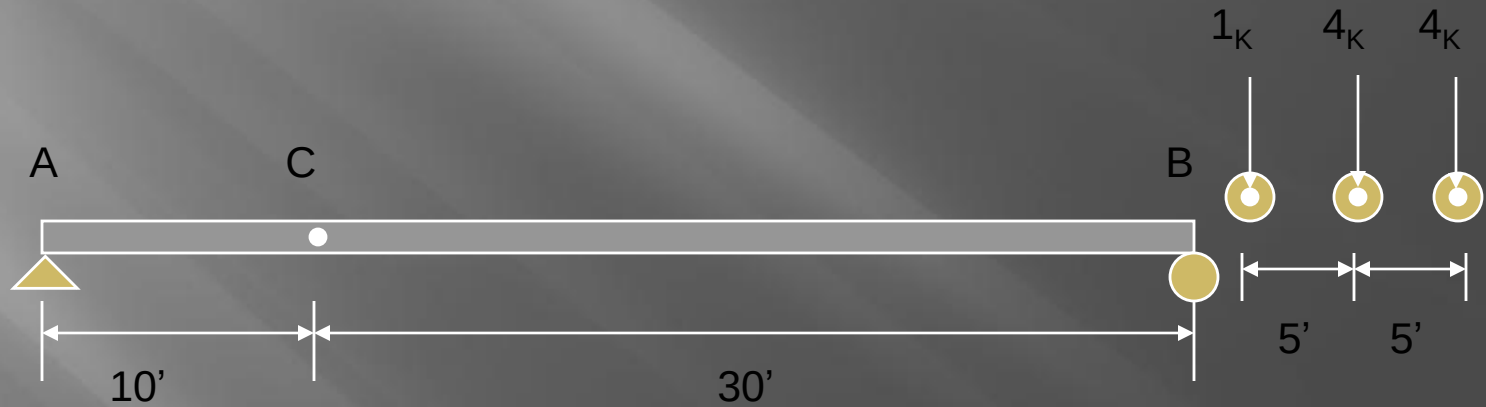
$$\Delta V = P(y_2 - y_1)$$

اگر شیب خط تاثیر را s بنامیم خواهیم داشت:

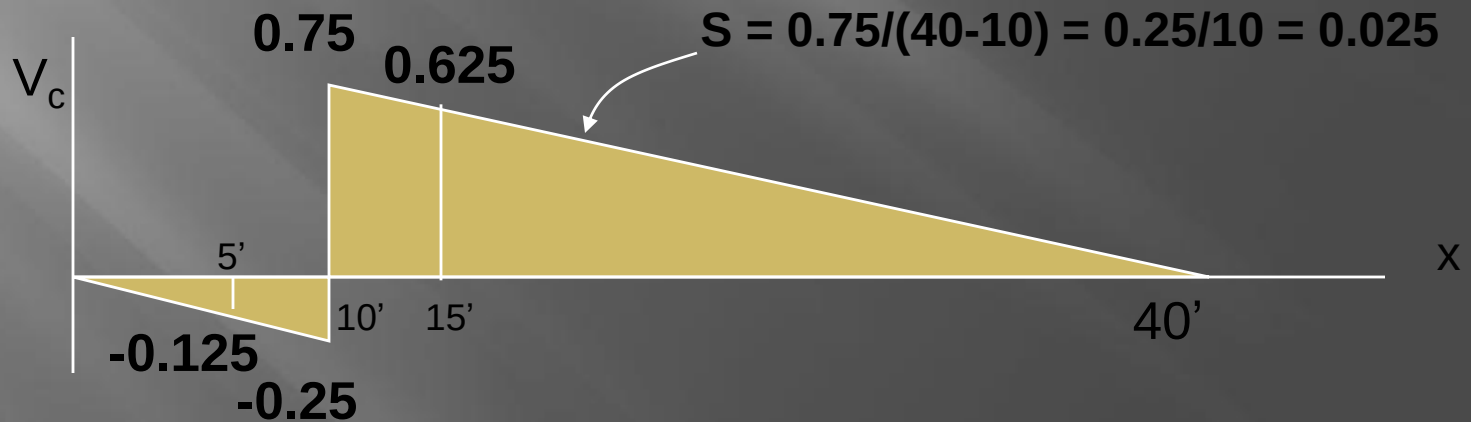
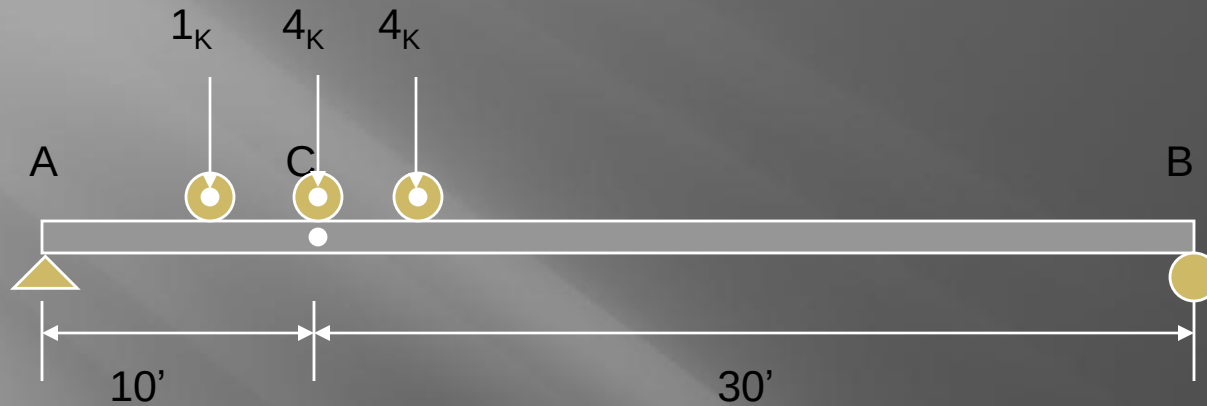
$$(y_2 - y_1) = s.(x_2 - x_1)$$

$$\Delta V = P.s.(x_2 - x_1)$$

برش

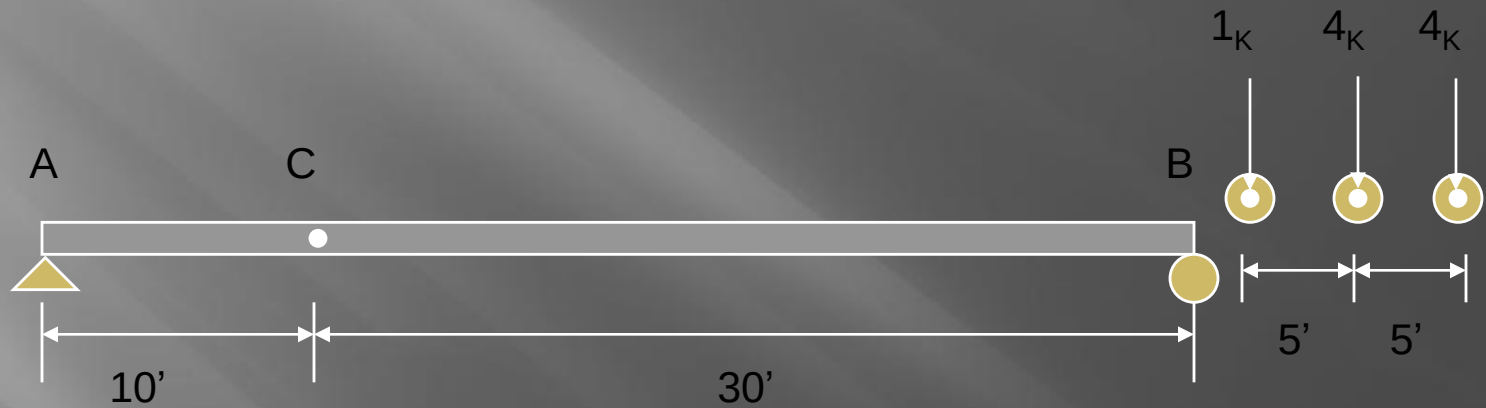


برش

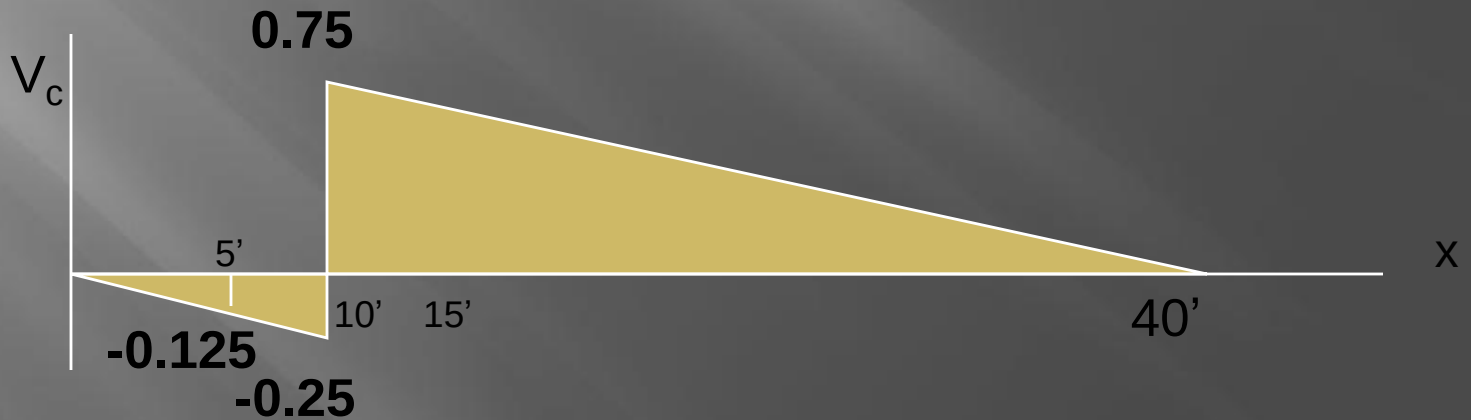
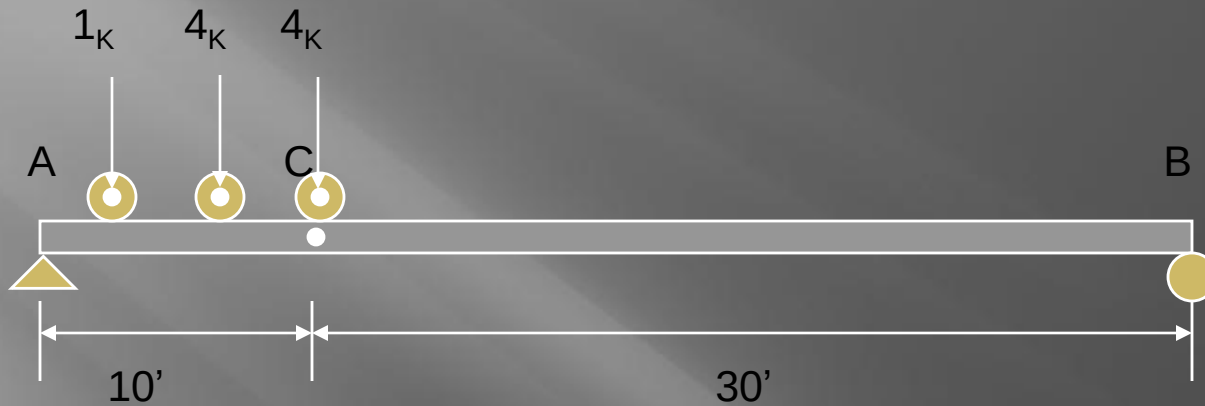


$$\Delta V_{1-2} = 1(-1) + [1+4+4] (0.025)(5) = +0.125_K$$

برش

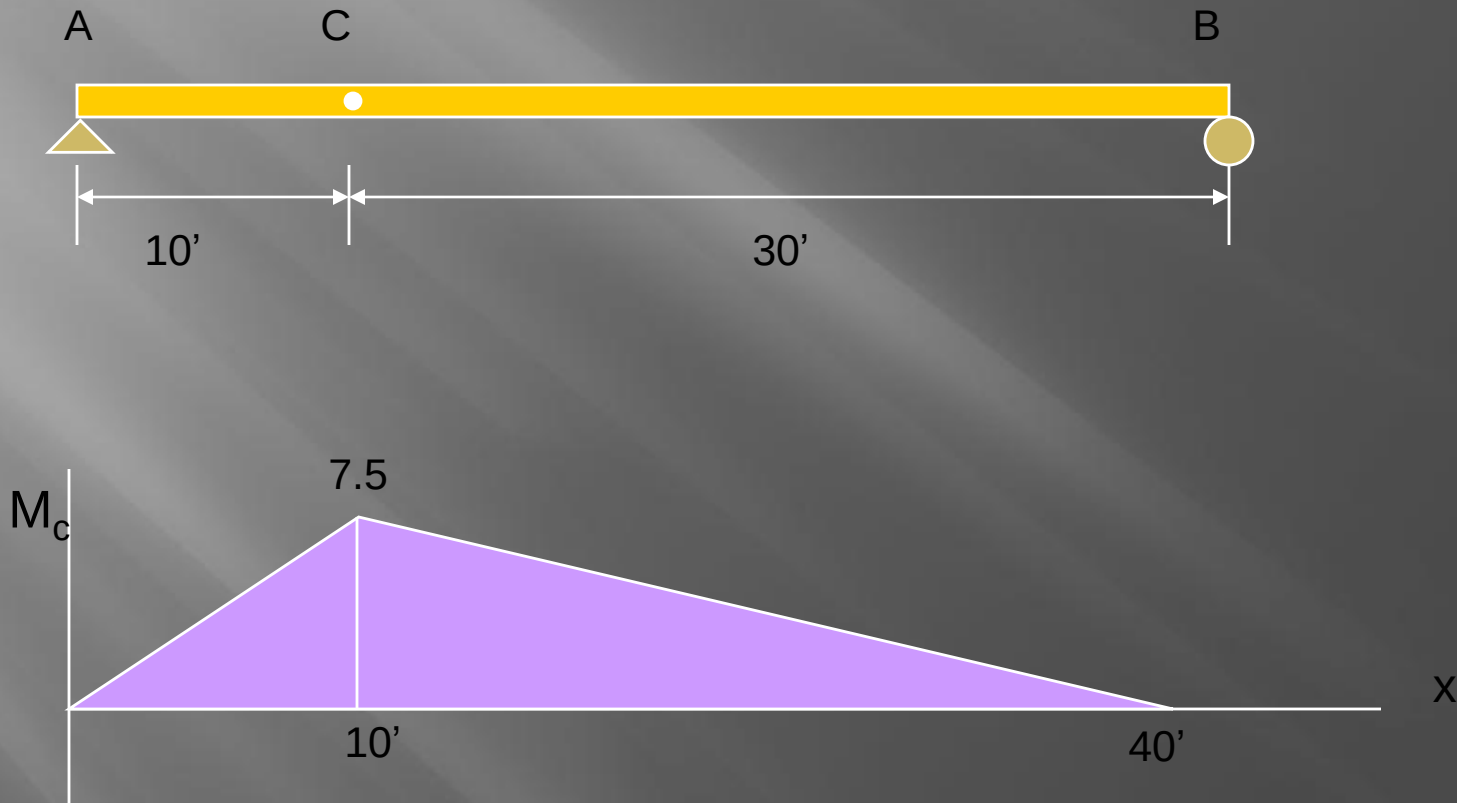


برش



$$\Delta V_{2-3} = 4(-1) + [1+4+4] (0.025)(5) = -2.875 \text{ k}$$

لنگر



خط تاثیر لنگر در نقطه C

موقعیت بحرانی بارها

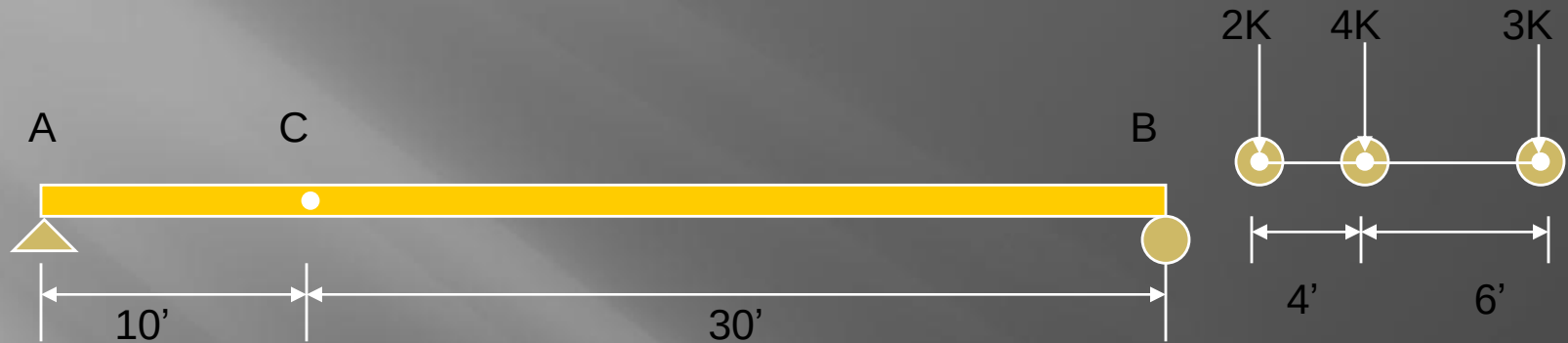
$$\Delta M = P_s(x_2 - x_1)$$

$$\Delta M_{1-2} = -2(7.5/10)(4) + (4+3)(7.5/(40-10))(4) = 1.0 \text{ k. ft}$$

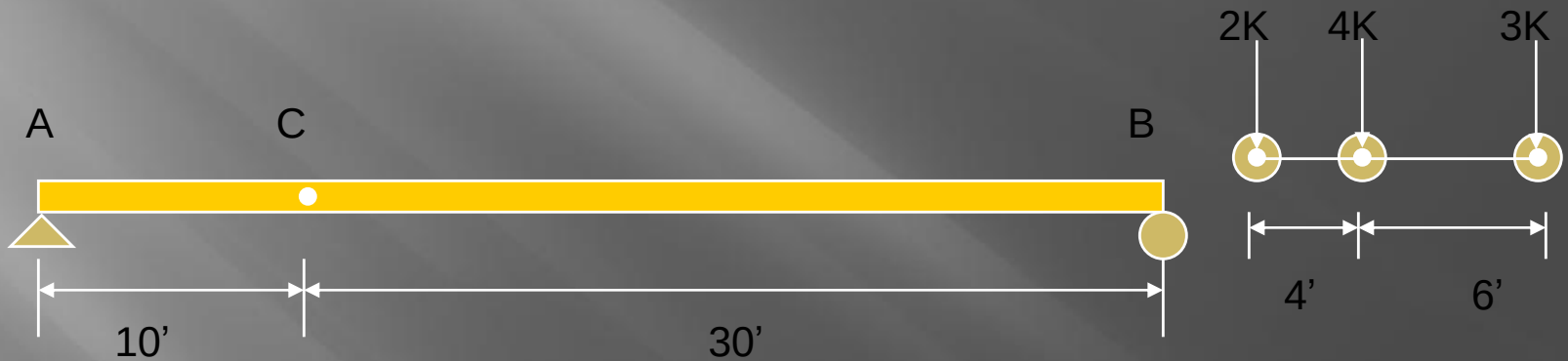
$$\Delta M_{2-3} = -(2+4)(7.5/10)(6) + (3)(7.5/(40-10))(6) = -22.5 \text{ k. ft}$$

تغییر در M

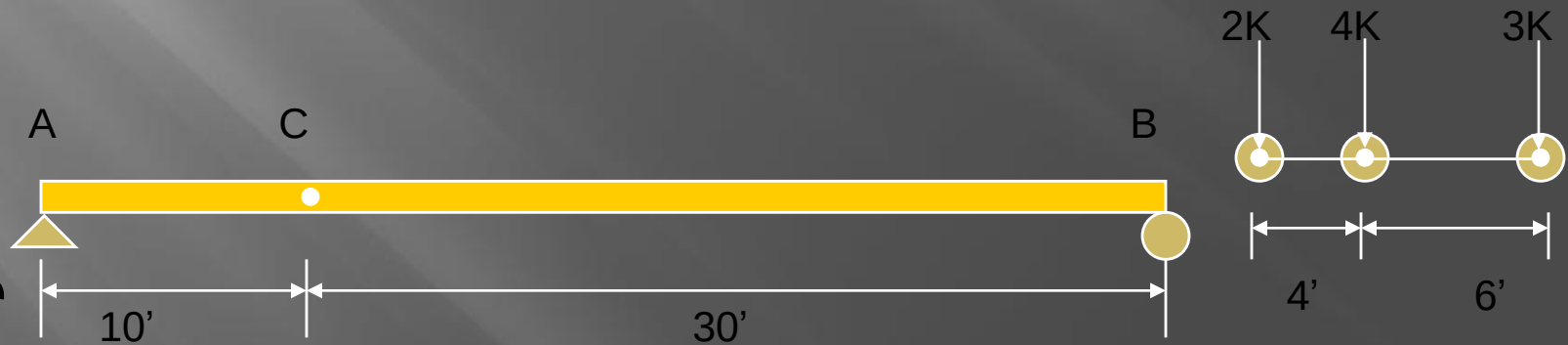
مورد اول



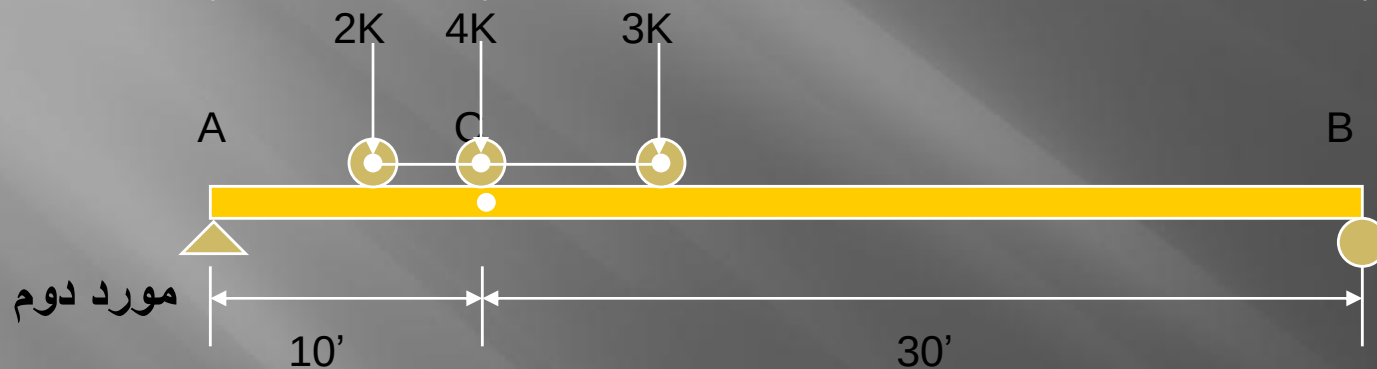
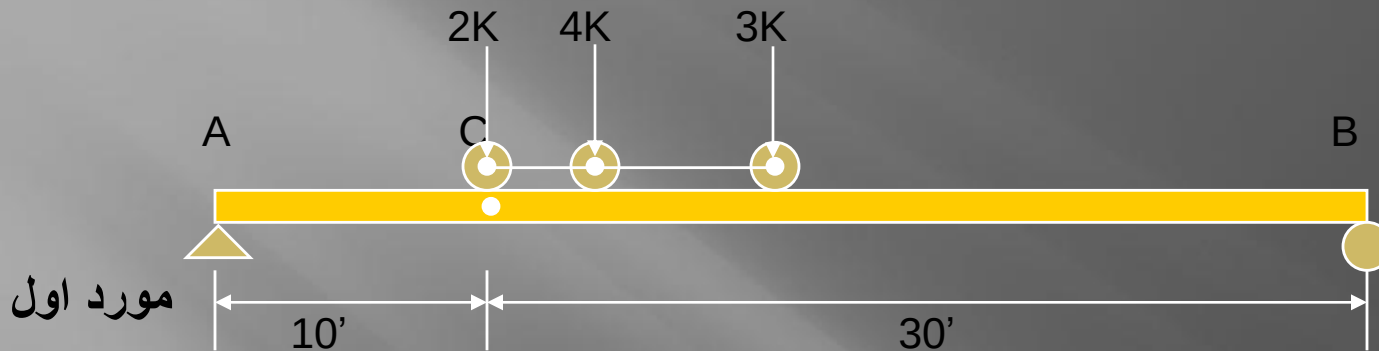
مورد دوم



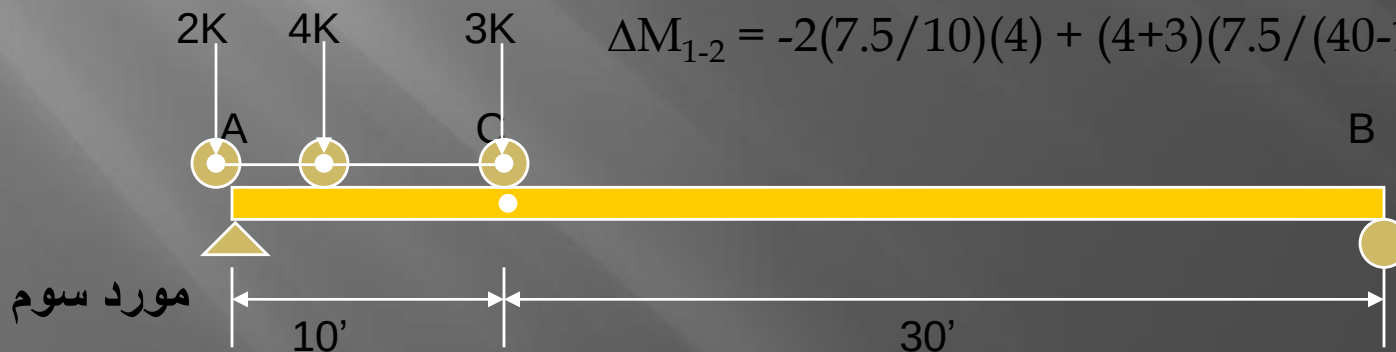
مورد سوم



تغییر در M



$$\Delta M_{1-2} = -2(7.5/10)(4) + (4+3)(7.5/(40-10))(4) = 1.0 \text{ k. ft}$$

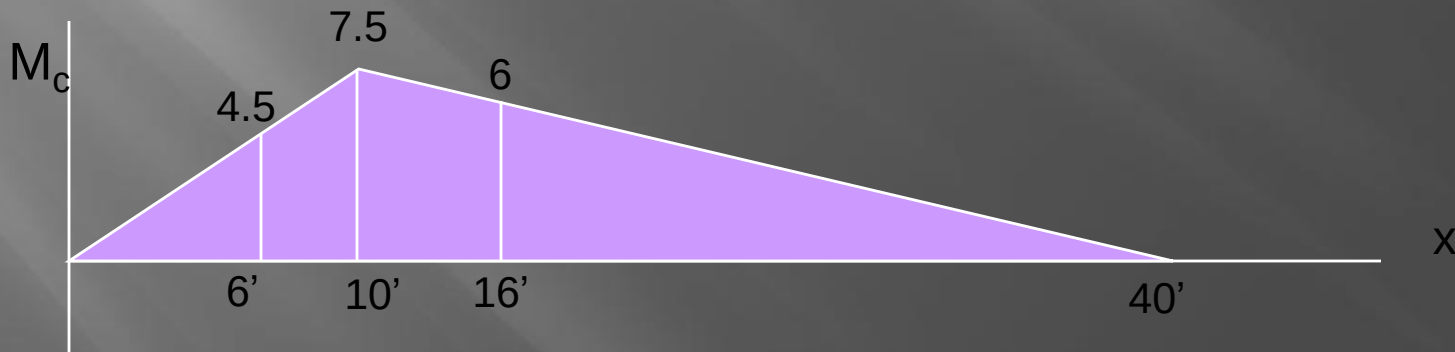


$$\Delta M_{2-3} = -(2+4)(7.5/10)(6) + (3)(7.5/(40-10))(6) = -22.5 \text{ k. ft}$$

Maximum لنگر

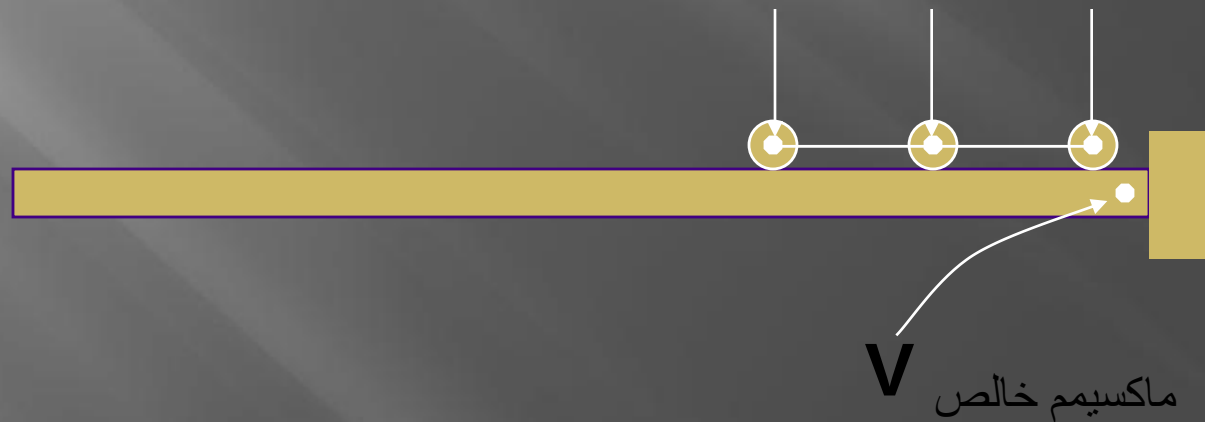
باتوجه به نتایج درمیابیم که حداکثر لنگر در مورد دوم رخ خواهد داد. □

$$(M_c)_{\max} = 2(4.5) + 4(7.5) + 3(6.0) = 57 \text{ k. ft}$$



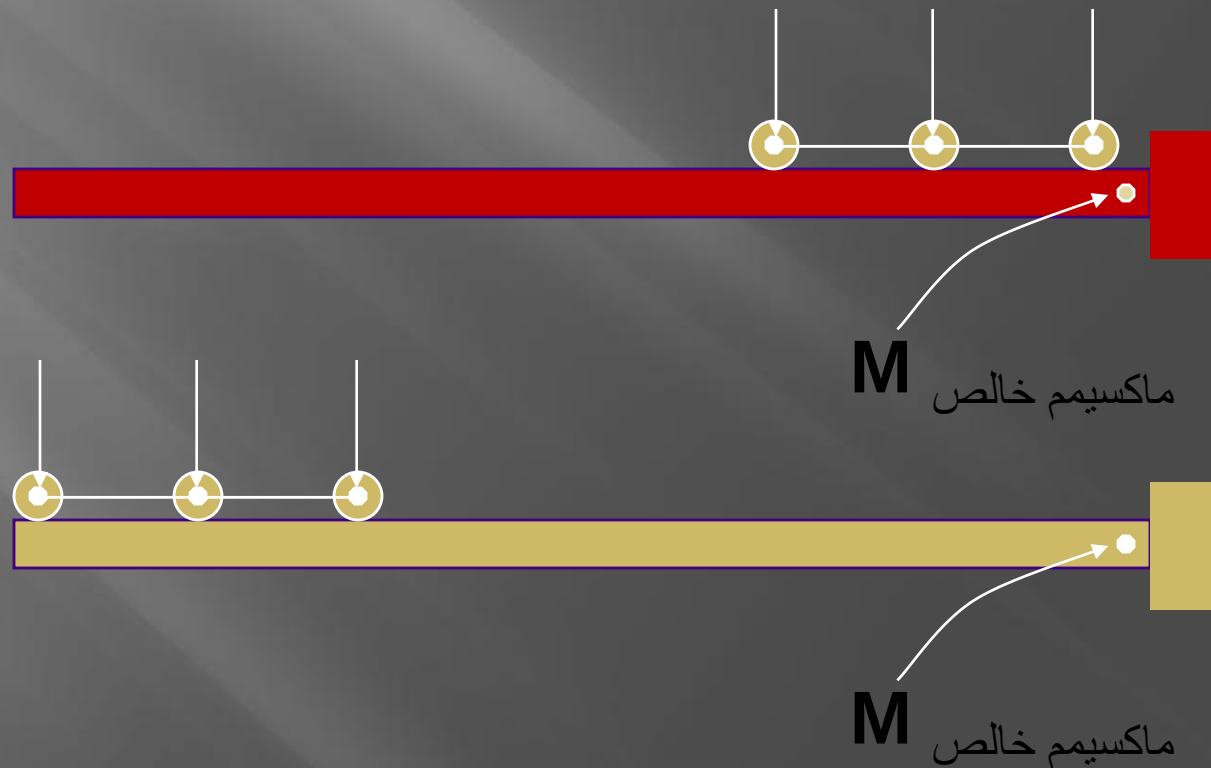
برش در تیر کنسول

□ برای یک تیر کنسول برش حداکثر مطلق در نقطه ای نزدیک تکیه گاه رخ خواهد داد .



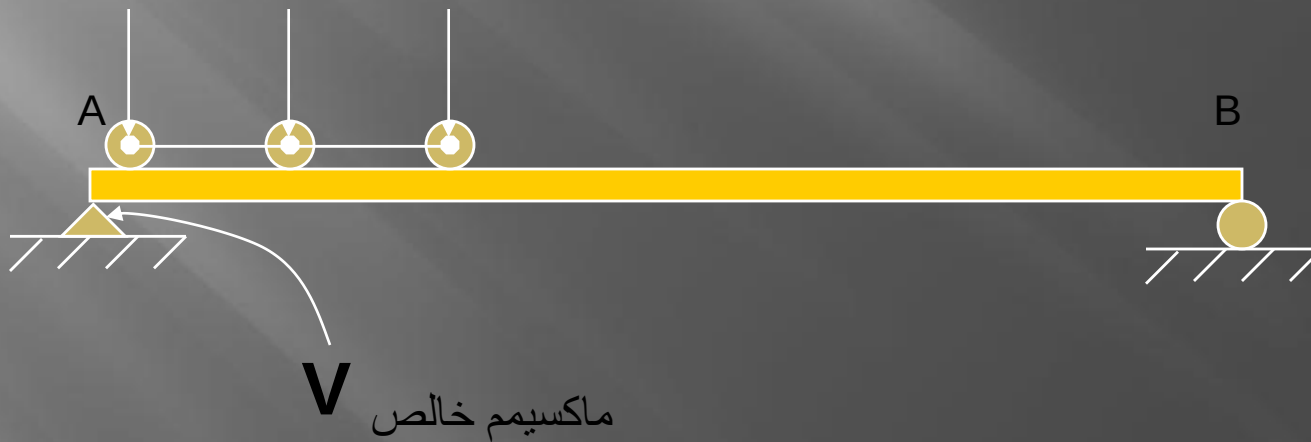
لنگر در تیر کنسول

□ برای یک تیر کنسول لنگر حداکثر مطلق در نقطه ای نزدیک تکیه گاه رخ خواهد داد که در همان نقطه حداکثر برش رخ داده است. اما بارها در انتهای تیر واقع خواهند شد.



برش در تیرباتکیه گاه ساده

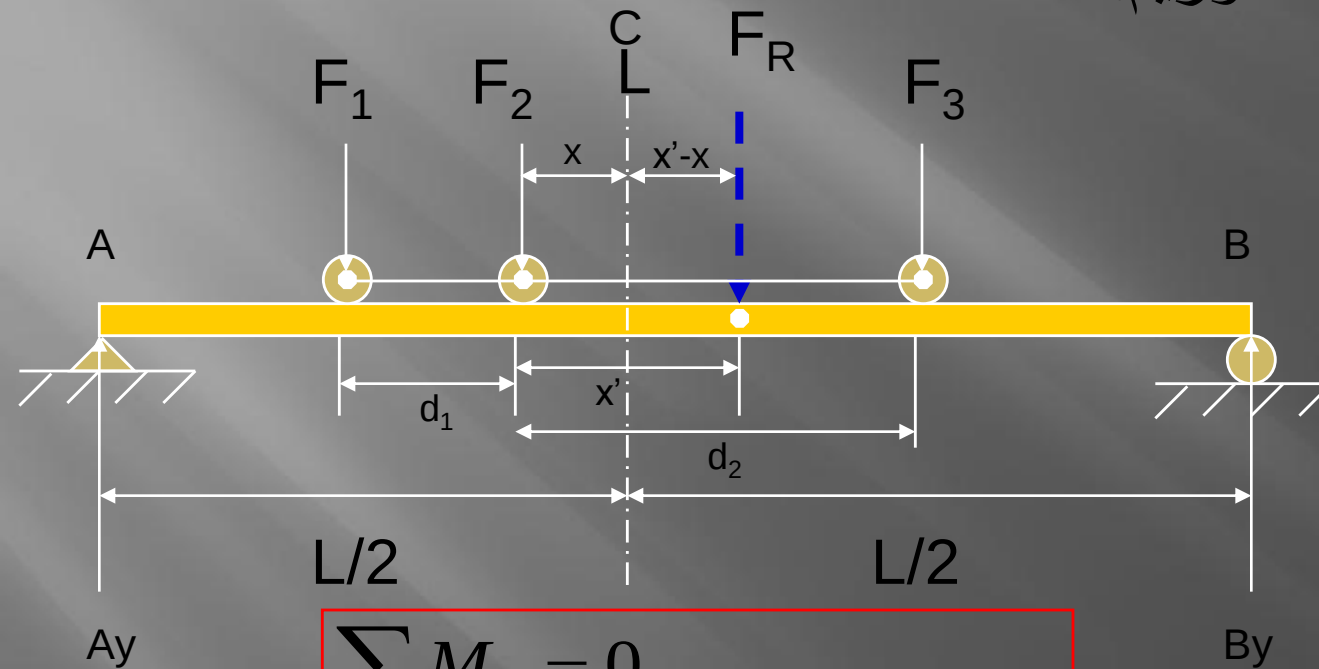
□ در تیرباتکیه گاه ساده برش حد اثر در نزدیکی یک از تکیه گاهها رخ خواهد داد.



لنگر در تیر با تکیه گاه ساده

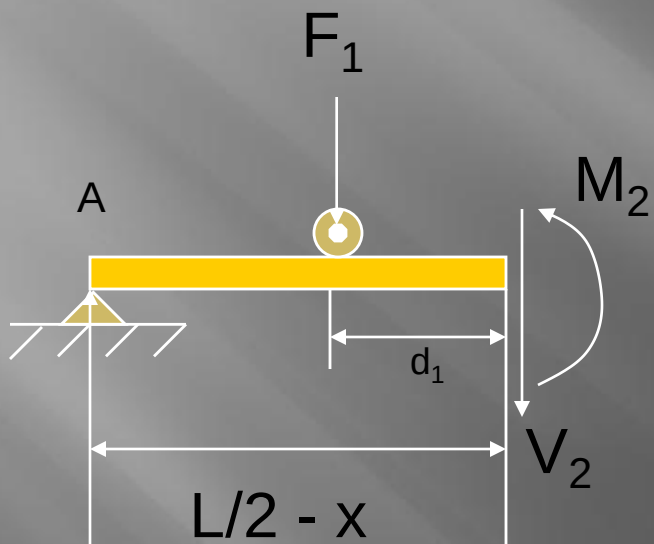
□ در تیر با تکیه گاه ساده و بار واحد حداکثر لنگر در وسط دهانه رخ می دهد. اما در تعداد بارها با توجه به موقعیت بارها تعیین می شود و باید با تحلیل این مورد را بدست آوریم.

مثال



$$\sum M_b = 0$$

$$A_y = \frac{1}{L} (F_R) \left[\frac{L}{2} - (x' - x) \right]$$

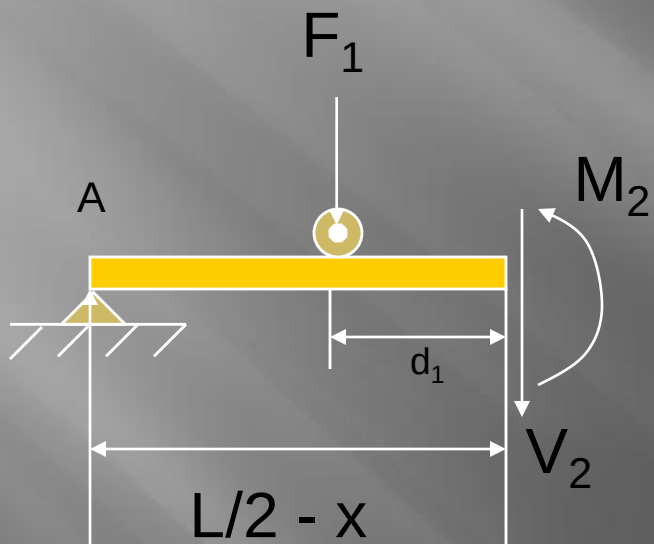


$$\sum M_b = 0$$

$$M_2 = A_y \left(\frac{L}{2} - x \right) - F_1 d_1$$

$$= \frac{1}{L} (F_R) \left[\frac{L}{2} - (x' - x) \right] \left(\frac{L}{2} - x \right) - F_1 d_1$$

$$= \frac{F_R L}{4} - \frac{F_R x'}{2} - \frac{F_R x^2}{L} + \frac{F_R x x'}{L} - F_1 d_1$$



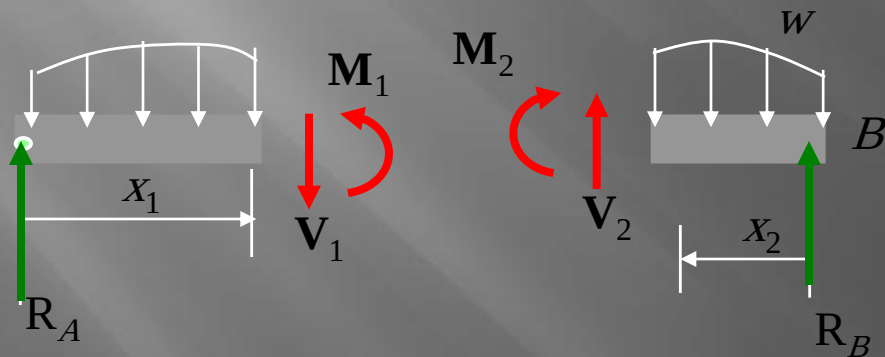
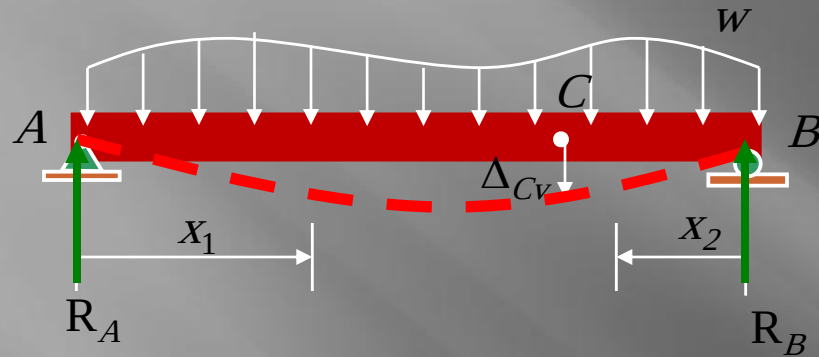
مابیشترین مقدار M_2 را نیاز داریم

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{-2F_R x}{L} + \frac{F_R x'}{L} = 0$$

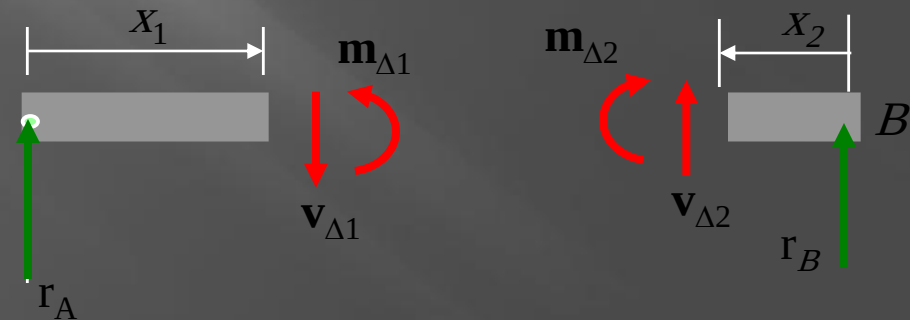
$$x = \frac{x'}{2}$$

تغییر مکان : روش کار مجازی ; تیرها و قابرها

بار واقعی



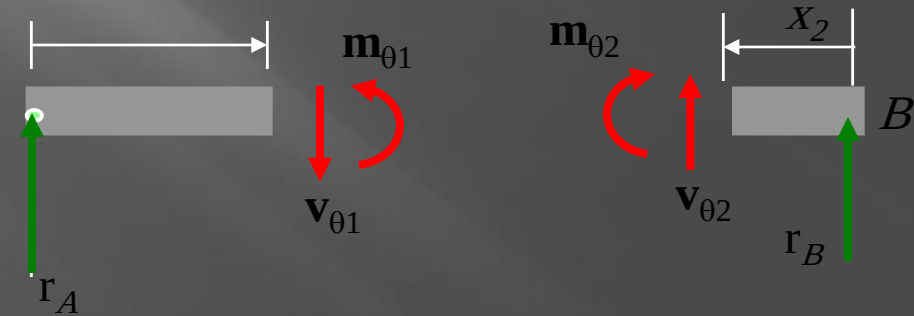
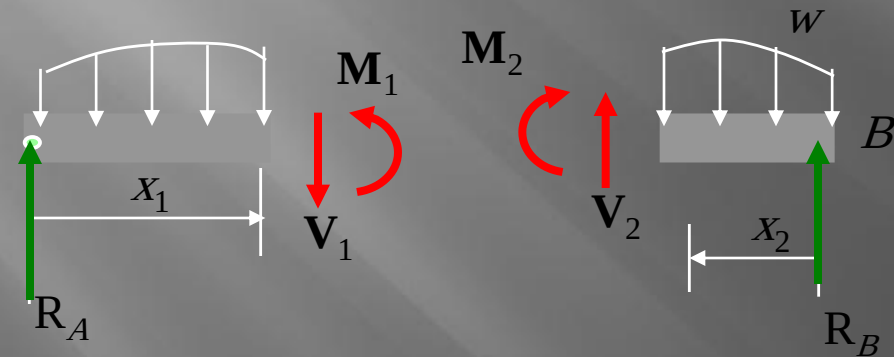
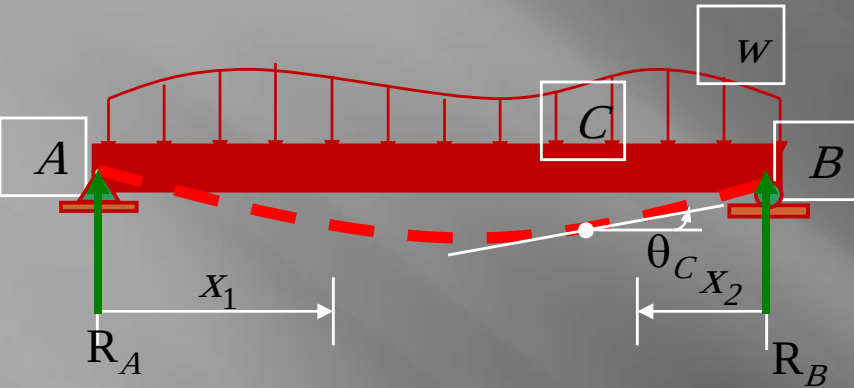
بار واحد مجازی



$$1 \cdot \Delta_{Cv} = \int_0^L \frac{m_{\Delta} M}{EI} dx$$

بار واقعی

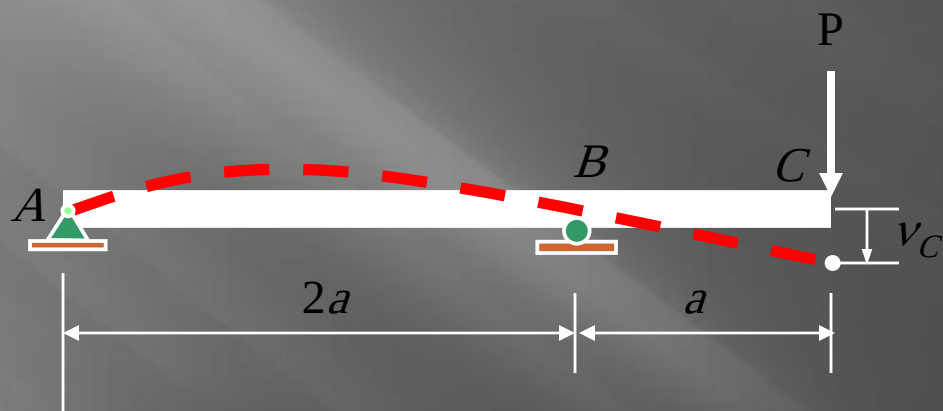
گشتاور واحد مجازی



$$1 \cdot \theta_C = \int_0^L \frac{m_{\theta} M}{EI} dx$$

مثال :

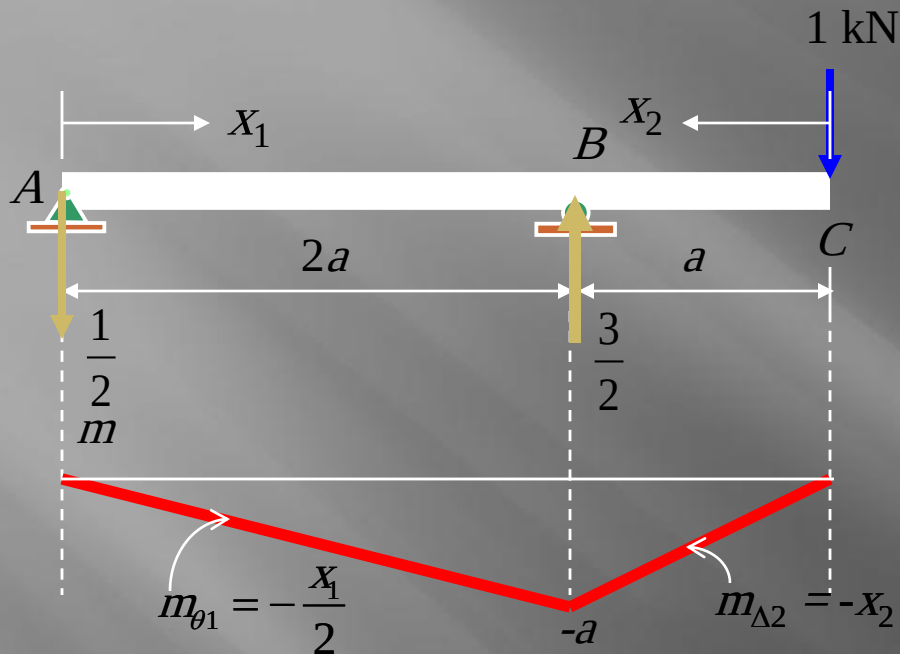
بار P در انتهای تیر شکل زیر وارد شده است. شیب و تغییر مکان را در نقطه C تعیین کنید. EI را ثابت فرض کنید.



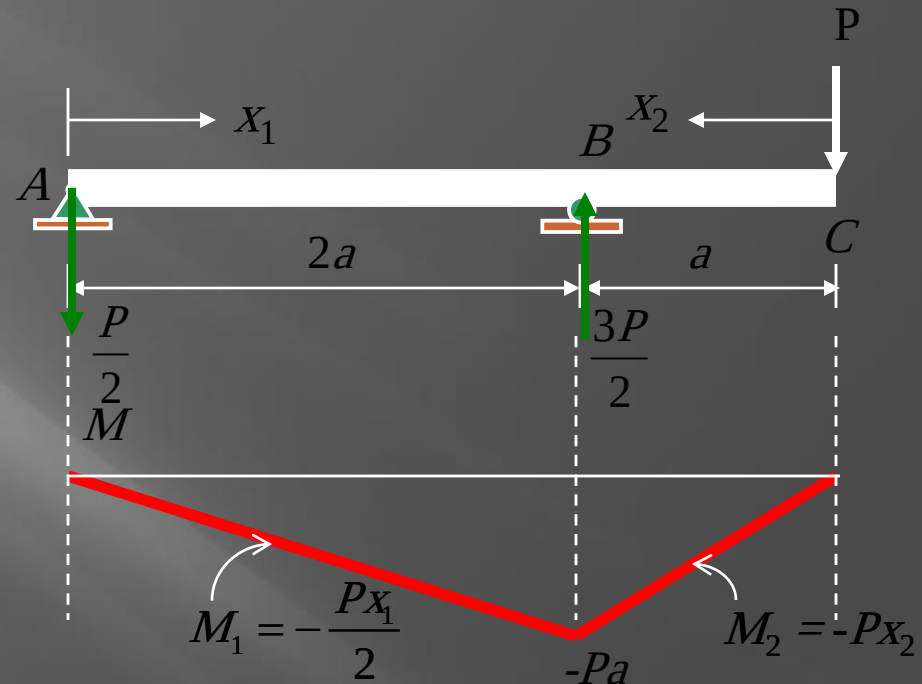
جابجایی در C

حل:

لنگر مجازی m_{Δ}



لنگر واقعی M

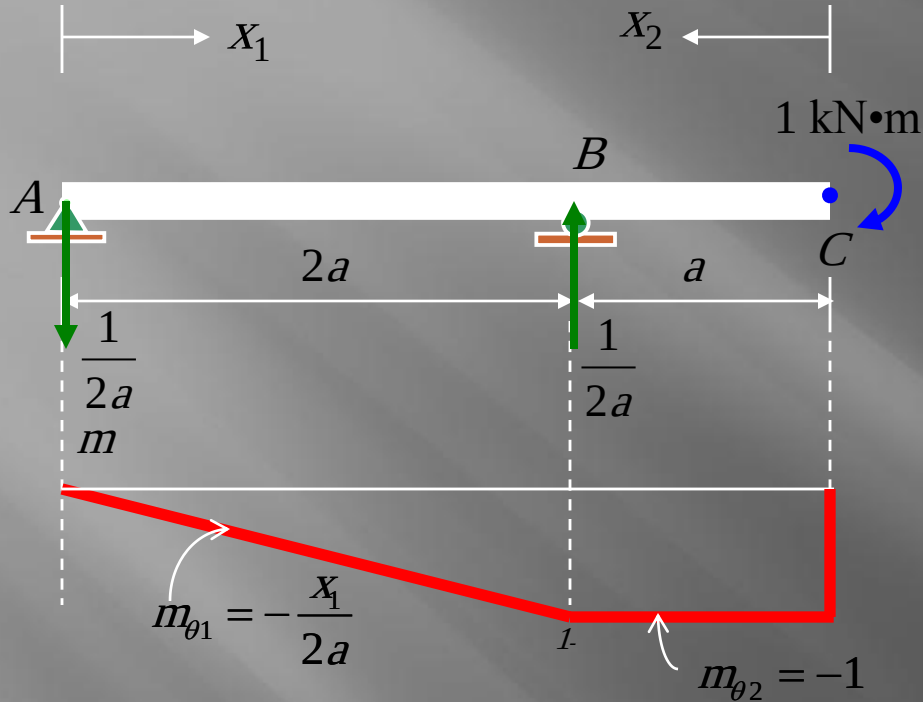


$$(1 \text{ kN})(\Delta_C) = \int_0^L \frac{m_{\Delta} M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \left(-\frac{x_1}{2}\right) \left(-\frac{Px_1}{2}\right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a (-x_2) (-Px_2) dx_2$$

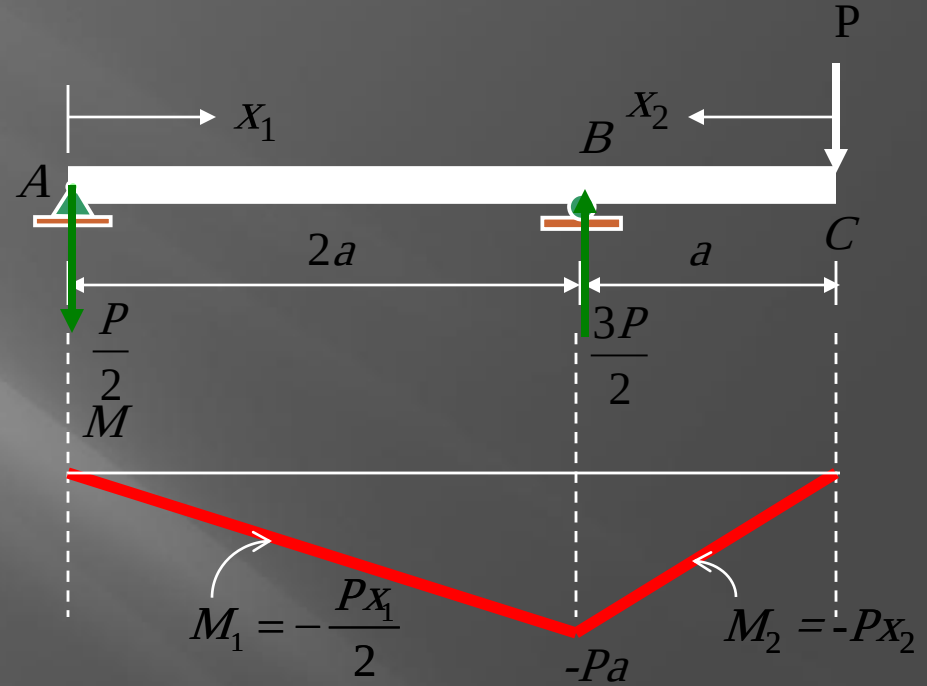
$$\Delta_C = \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{P}{4} \right) \left(\frac{x_1^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} + \left(\frac{P}{EI} \right) \left(\frac{x_2^3}{3} \right) \Big|_0^a = \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{P}{4} \right) \left(\frac{8a^3}{3} \right) + \left(\frac{P}{EI} \right) \left(\frac{a^3}{3} \right) = \frac{Pa^3}{EI},$$

شیب در C

لنگر مجازی m_θ



لنگر واقعی M



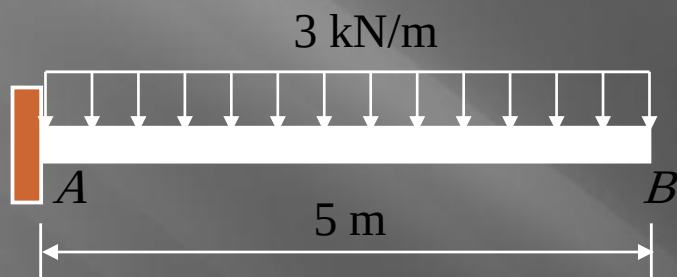
$$(1\text{kN}\cdot\text{m})(\theta_C) = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \left(-\frac{x_1}{2a}\right) \left(-\frac{Px_1}{2}\right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a (-1) (-Px_2) dx_2$$

$$\theta_C = \left(\frac{1}{EI}\right) \left(\frac{P}{4a}\right) \left(\frac{x_1^3}{3}\right) \Big|_0^{2a} + \left(\frac{1}{EI}\right) \left(\frac{Px_2^2}{2}\right) \Big|_0^a = \left(\frac{1}{EI}\right) \left(\frac{P}{4a}\right) \left(\frac{8a^3}{3}\right) + \left(\frac{1}{EI}\right) \left(\frac{Pa^2}{2}\right) = \frac{7}{6} \left(\frac{Pa^2}{EI}\right)$$

مثال :

شیب و تغییر مکان را در نقطه B تعیین کنید .

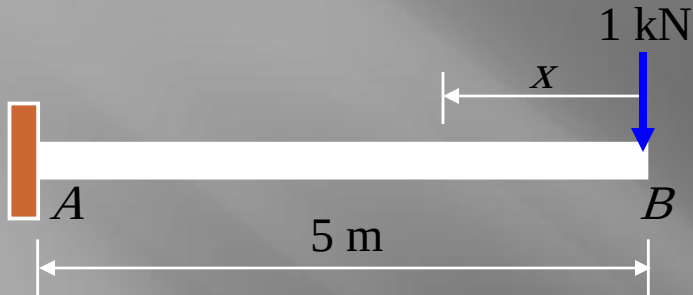
$$E = 200 \text{ Gpa} , I = 250 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



تغییر مکان عمودی در B

حل :

لنگر مجازی m_Δ



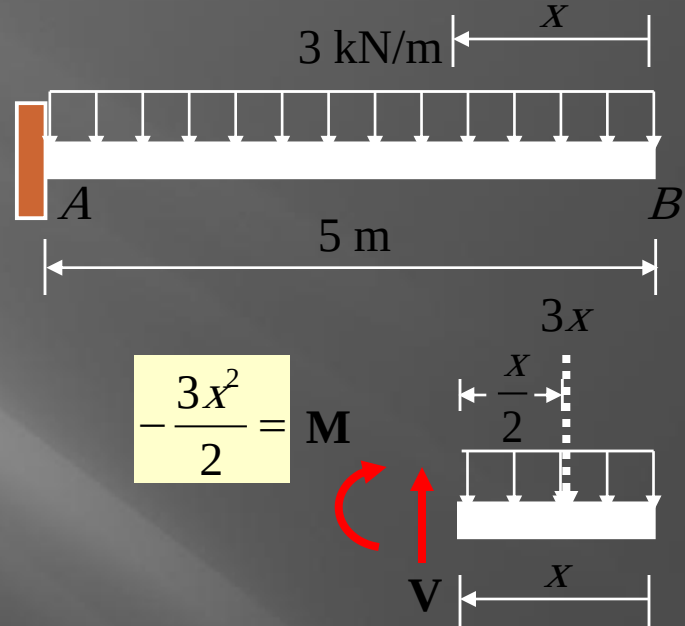
$$-1x = m_\Delta$$

$$(1kN)(\Delta_B) = \int_0^L \frac{m_\Delta M}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^5 (-x) \left(-\frac{3x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^5 \frac{3x^3}{2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{3x^4}{8} \Big|_0^5\right) = \frac{234.375 kN^2 \cdot m^3}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{234.375 kN \cdot m^3}{(200 \times 10^6 \frac{kN}{m})(250 \times 10^{-6} m^4)} = 0.00469 m = 4.69_{mm}, \downarrow$$

لنگر واقعی M

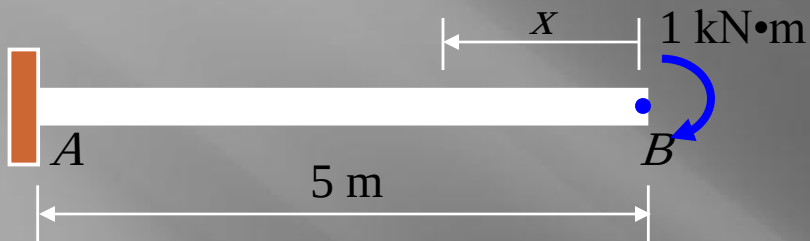


$$-\frac{3x^2}{2} = M$$

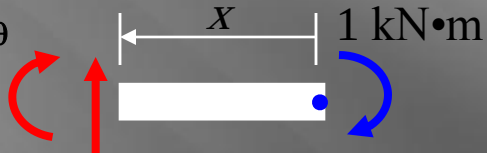
شیب در B

حل :

لنگر مجازی m_θ



$$-1 = m_\theta$$

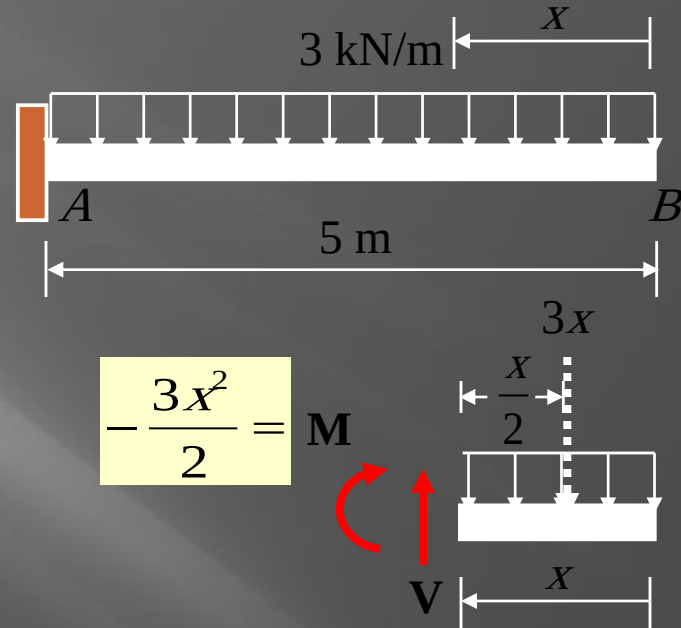


$$(1 \text{ kN} \cdot \text{m})(\theta_B) = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx$$

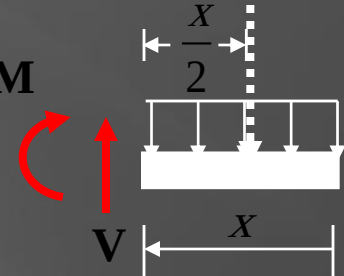
$$= \frac{1}{EI} \int_0^5 (-1) \left(-\frac{3x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^5 \frac{3x^2}{2} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{3x^3}{6} \Big|_0^5 \right) = \frac{62.5 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{62.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}})(250 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 0.00125 \text{ rad}, \quad \swarrow$$

لنگر واقعی M



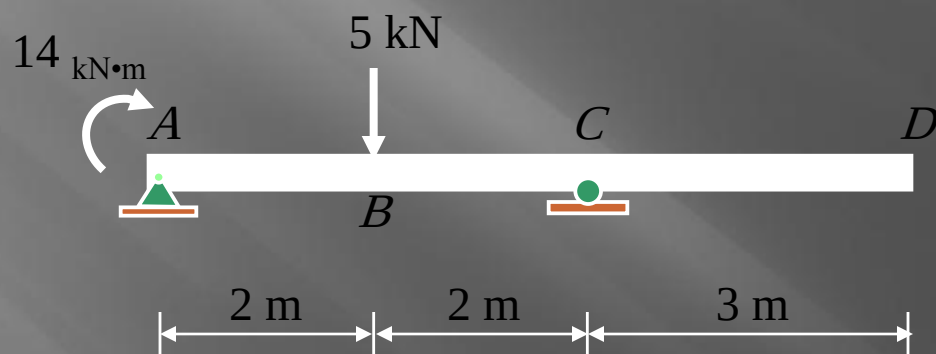
$$-\frac{3x^2}{2} = M$$



مثال :

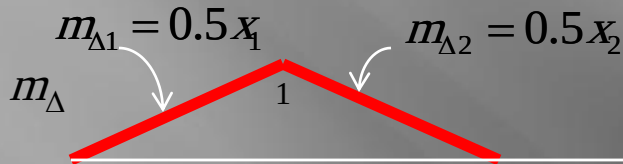
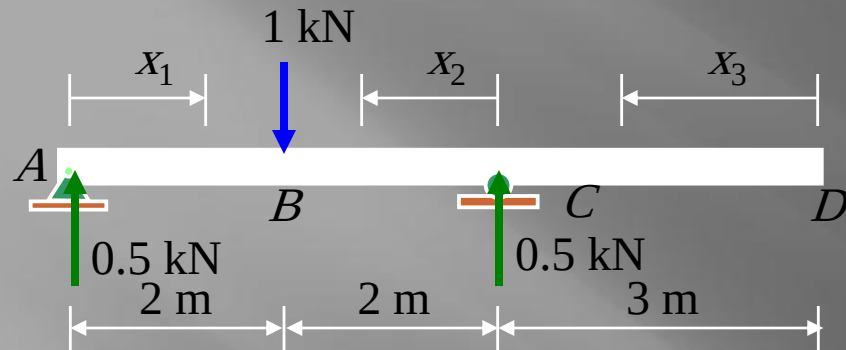
شیب و تغییر مکان را در نقطه B تعیین کنید .

$$E = 200 \text{ Gpa}, I = 60 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



جابجایی در B

لنگر مجازی m_{Δ}



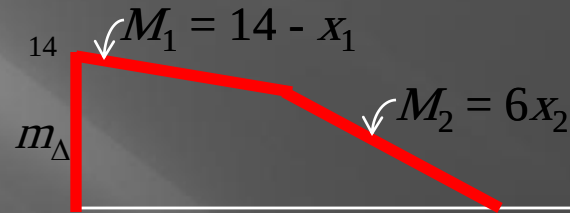
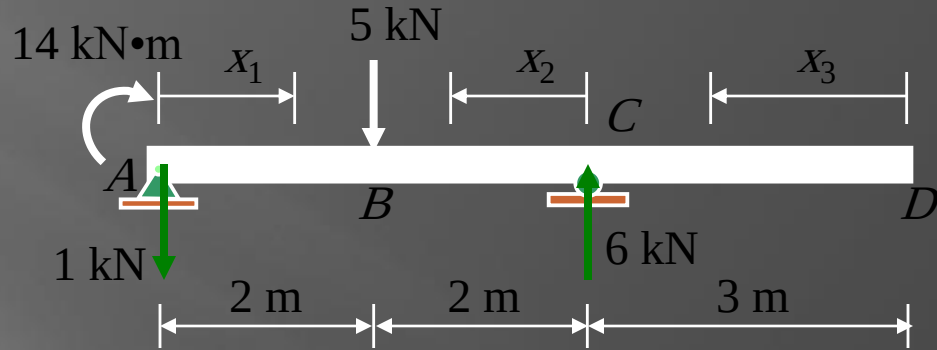
$$(1 \text{ kN})(\Delta_B) = \int_0^L \frac{m_{\Delta} M}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^2 (0.5 x_1)(14 - x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (0.5 x_2)(6 x_2) dx_2 + \int_0^3 (0)(0) dx_3$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^2 (7 x_1 - 0.5 x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (3 x_2^2) dx_2 = \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{7 x_1^2}{2} - \frac{0.5 x_1^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{3 x_2^3}{3} \right) \Big|_0^2$$

$$\Delta_B = \frac{20.667}{EI} = \frac{20.667}{(200)(60)} = 0.00172 \text{ m} = 1.72 \text{ mm}, \downarrow$$

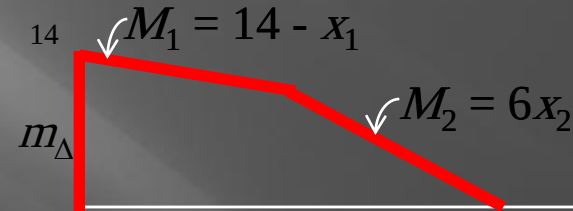
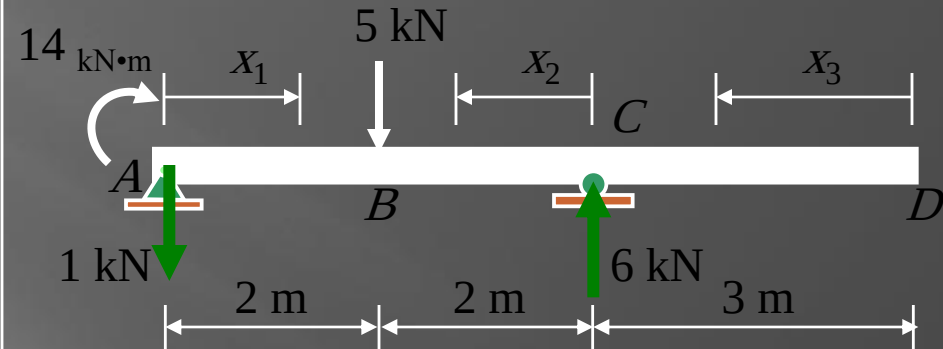
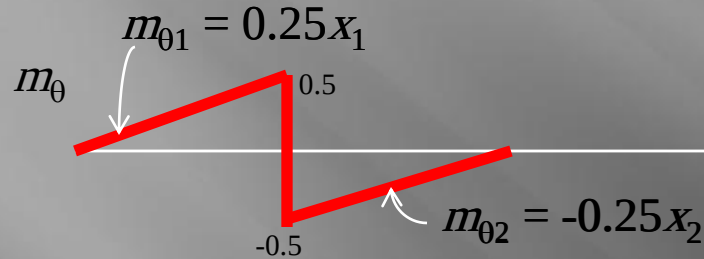
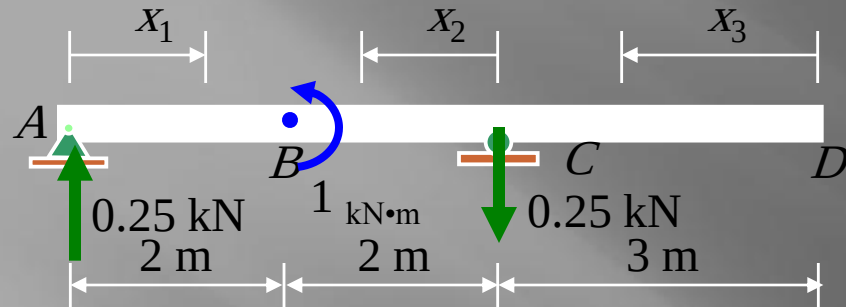
لنگر واقعی M



لنگر مجازی m_θ

شیب در B

لنگر واقعی M



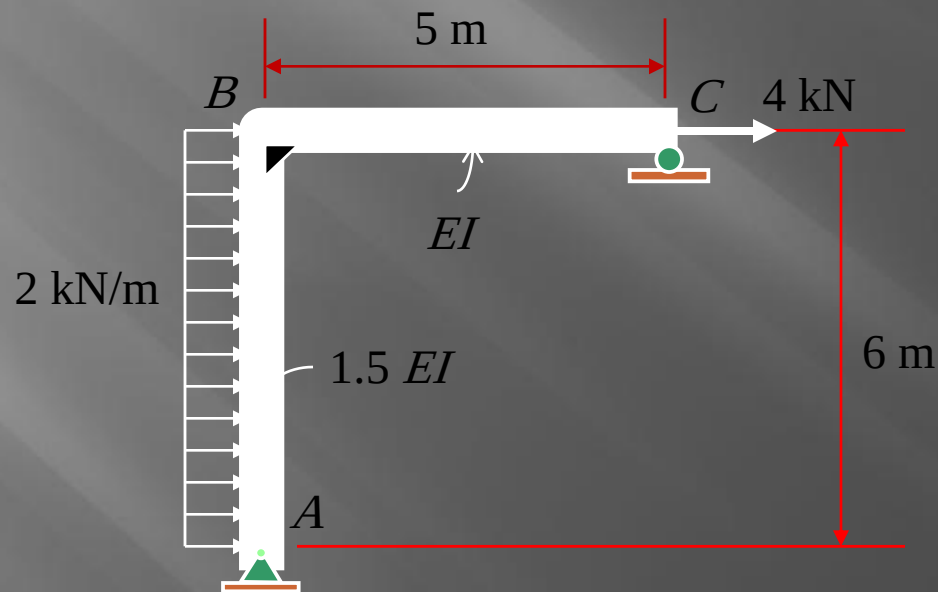
$$\begin{aligned}
 (1\text{ kN}\cdot\text{m})(\theta_B) &= \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 (0.25x_1)(14 - x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-0.25x_2)(6x_2) dx_2 + \int_0^3 (0)(0) dx_3 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (3.5x_1 - 0.25x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-1.5x_2^2) dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{3.5x_1^2}{2} - \frac{0.25x_1^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1.5x_2^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\
 \theta_B &= \frac{2.333}{EI} = \frac{2.333}{(200)(60)} = 0.000194 \text{ rad}
 \end{aligned}$$



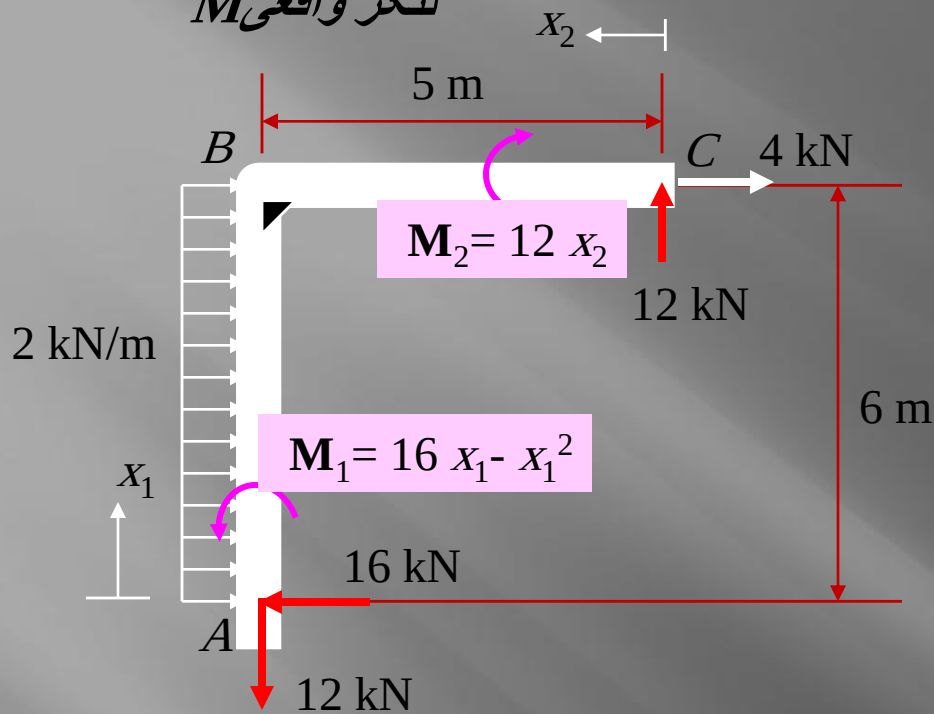
مثال :

شیب و تغییر مکان افقی را در نقطه C در قاب زیر تعیین کنید

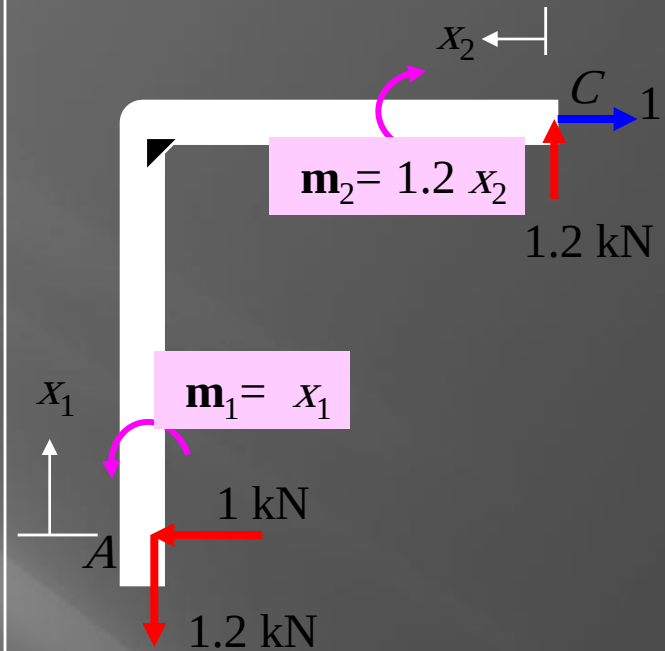
$$I = 200 \times 10^6 \text{ mm}^4, \quad E = 200 \text{ GPa}$$



لنگر واقعی M



لنگر مجازی m_Δ

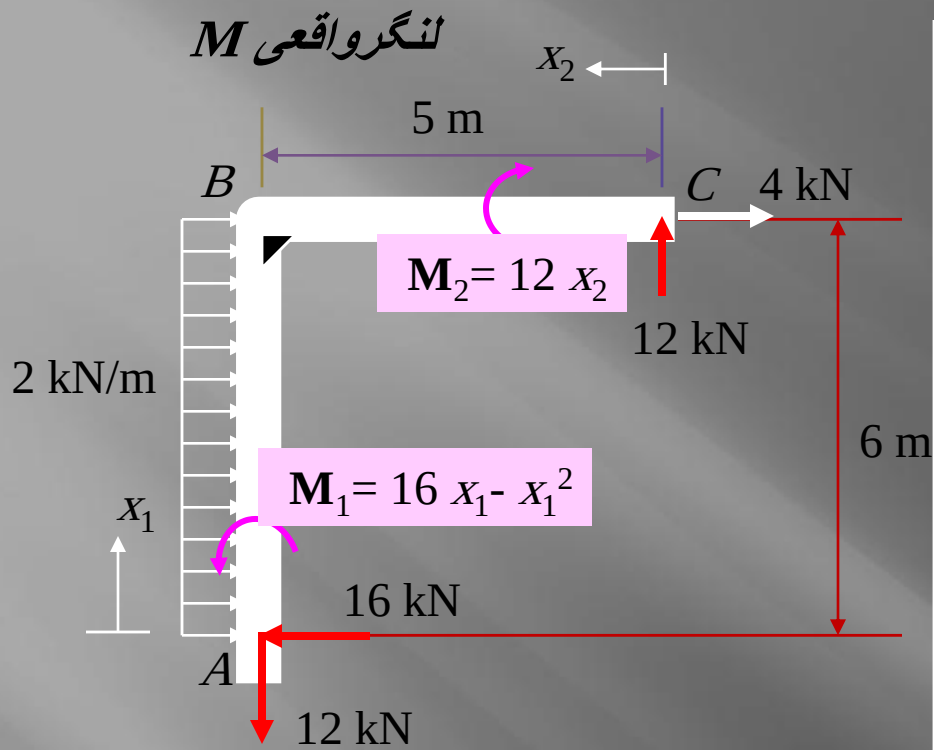


$$(1\text{ kN})(\Delta_{CH}) = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \frac{1}{1.5EI} \int_0^6 (x_1)(16x_1 - x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (1.2x_2)(12x_2) dx_2$$

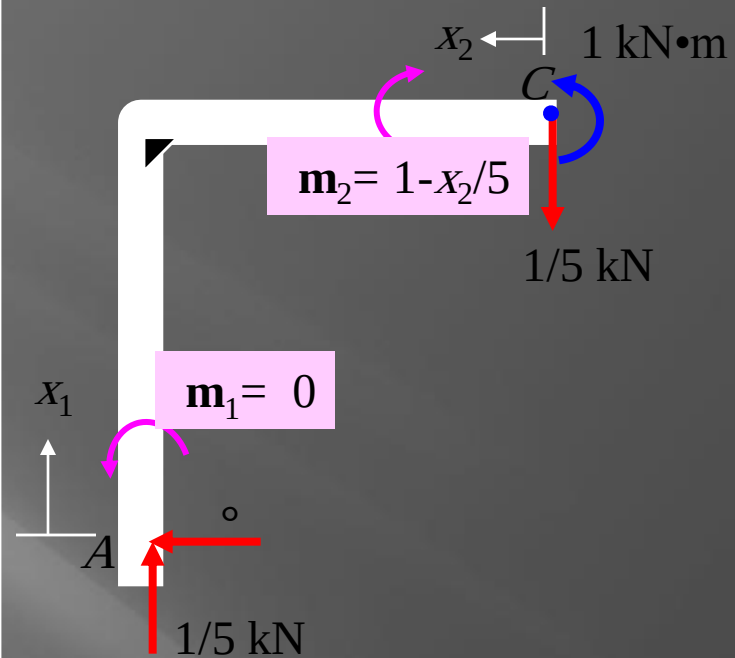
$$= \frac{1}{1.5EI} \int_0^6 (16x_1^2 - x_1^3) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (14.4x_2^2) dx_2$$

$$\Delta_{CH} = \frac{1}{1.5EI} \left(\frac{16x_1^3}{3} - \frac{x_1^4}{4} \right) \Big|_0^6 + \frac{1}{EI} \left(\frac{14.4x_2^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \frac{552}{EI} + \frac{600}{EI} = \frac{1152}{(200)(200)} = +28.8 \text{ mm}, \rightarrow$$

لنگر واقعی M



لنگر مجازی m_θ

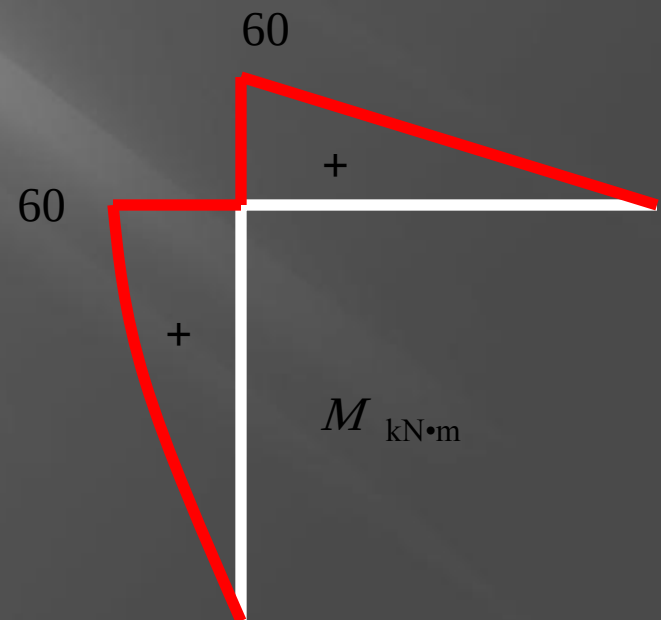
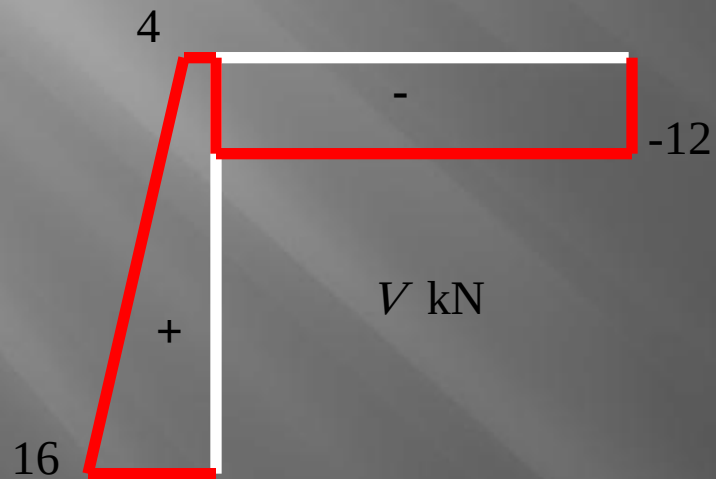
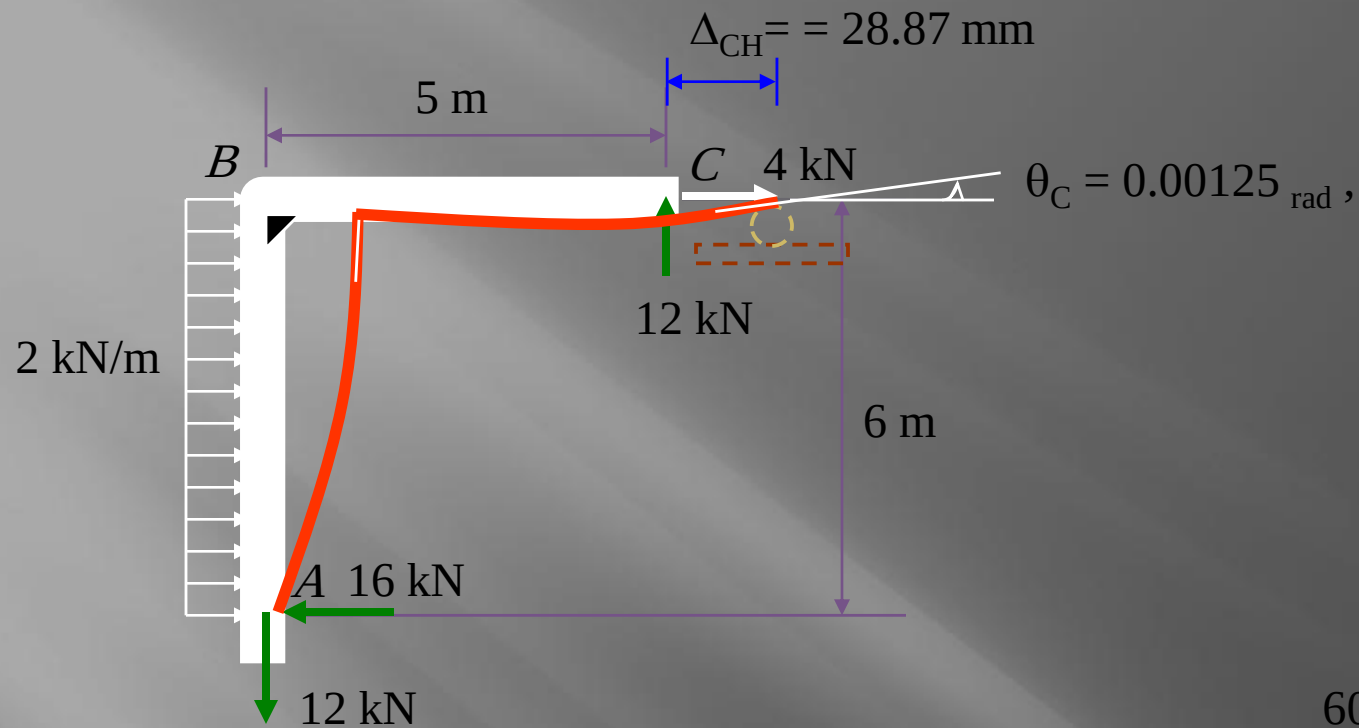


$$(1\text{ kN}\cdot\text{m})(\theta_C) = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \frac{1}{1.5EI} \int_0^6 (0)(16x_1 - x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(1 - \frac{x_2}{5}\right)(12x_2) dx_2$$

$$= 0 + \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(12x_2 - \frac{12x_2^2}{5}\right) dx_2$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left(\frac{12x_2^2}{2} - \frac{12x_2^3}{5 \times 3} \right) \Big|_0^5 = \frac{50}{EI} = \frac{50}{(200)(200)} = +0.00125_{\text{rad}}$$

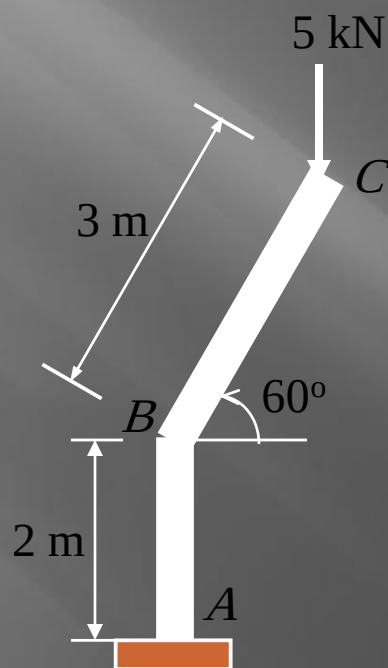




مثال :

شیب و تغییر مکان قائم را در نقطه C در قاب زیر تعیین کنید

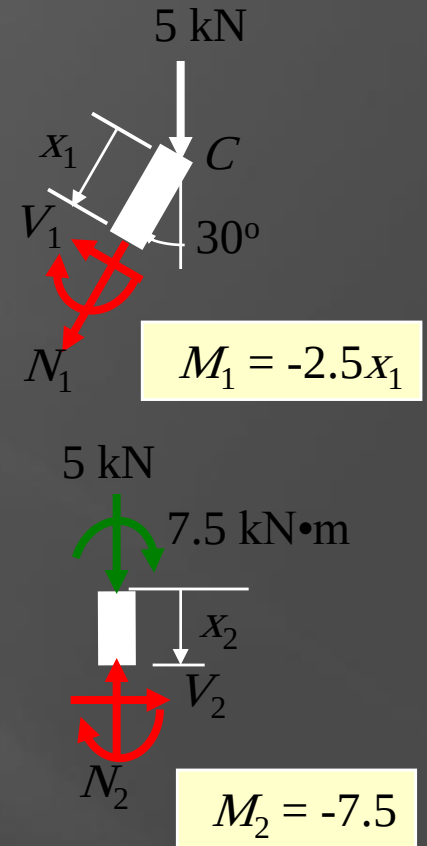
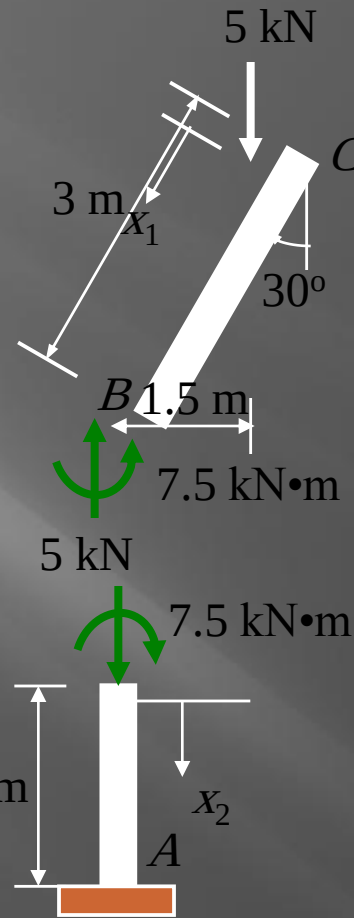
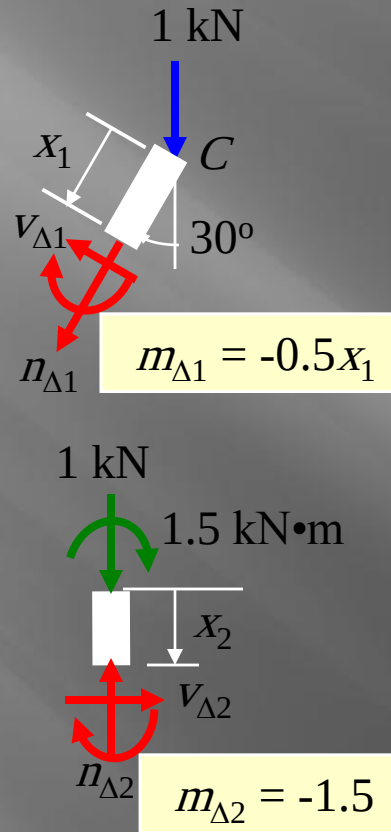
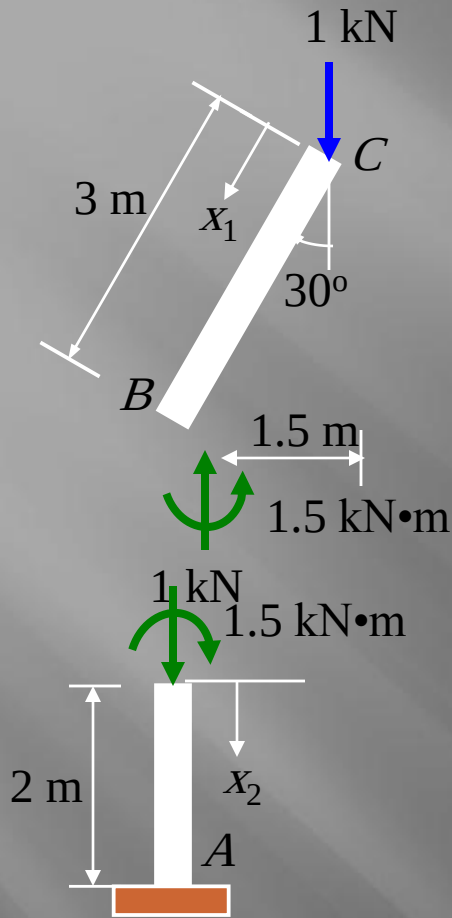
$$I = 15 \times 10^6 \text{ mm}^4, \quad E = 200 \text{ Gpa}$$



لنگر مجازی m_{Δ}

تغییر مکان در C

لنگر واقعی M



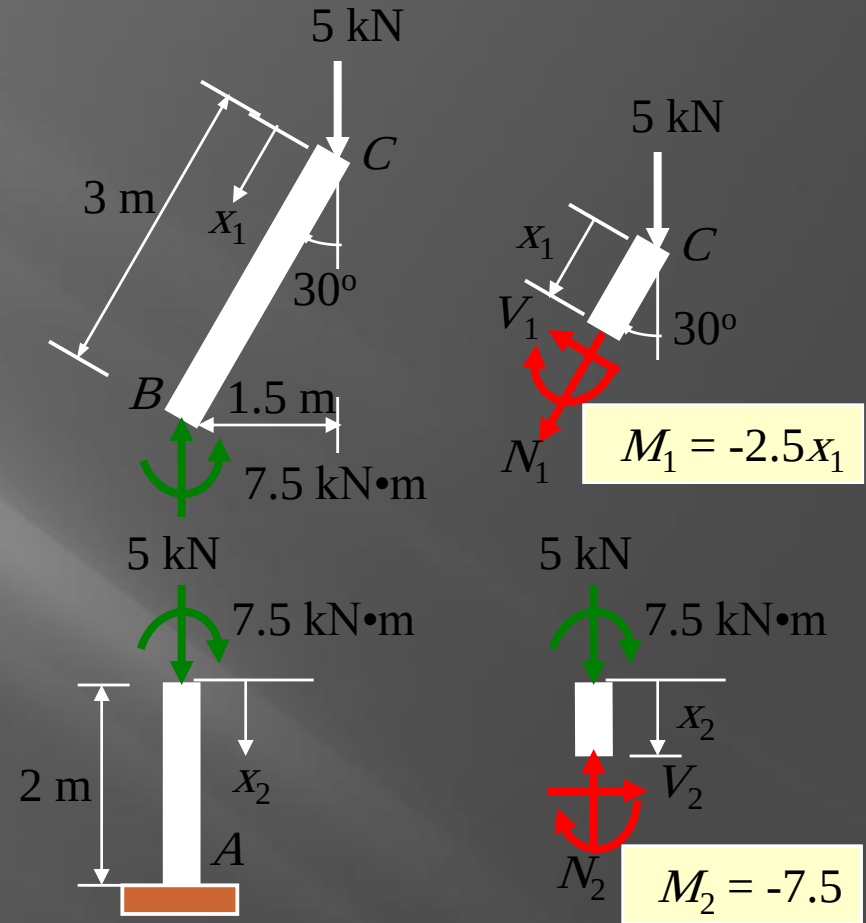
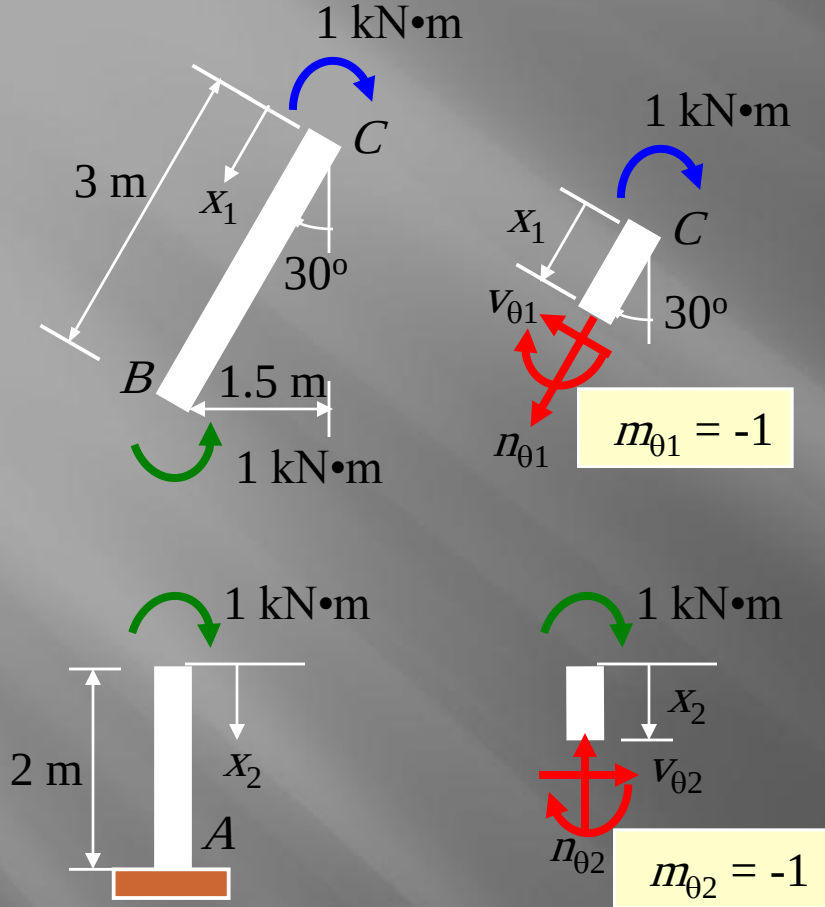
$$(1\text{ kN})(\Delta_{Cv}) = \int_0^L \frac{m_{\Delta} M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^3 (-0.5x_1)(-2.5x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-1.5)(-7.5) dx_2$$

$$\Delta_{Cv} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1.25x_1^3}{3} \right) \Big|_0^3 + \frac{1}{EI} (11.25x_2^2) \Big|_0^2 = \frac{33.75}{EI} = \frac{33.75}{(200)(15)} = 11.25 \text{ mm} \downarrow$$

شیب در C

لنگر مجازی m_θ

لنگر واقعی M



$$(1 \text{ kN} \cdot \text{m})(\theta_C) = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^3 (-1)(-2.5 x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-1)(-7.5) dx_2$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left(\frac{2.5 x_1^2}{2} \right) \Big|_0^3 + \frac{1}{EI} (7.5 x_2) \Big|_0^2 = \frac{26.25}{EI} = \frac{26.25}{(200)(15)} = 0.00875 \text{ rad}$$

انرژی کرنشی مجازی در اثر نیروی محوری و برش و پیچش و تغییرات دما

$$U_n = \int_0^L \frac{nN}{AE} dx$$

نیروی محوری

n = نیروی محوری مجازی داخلی که در اثر بار واحد مجازی خارجی بوجود آمده است

N = نیروی محوری داخلی در عضو که در اثر بار واقعی بوجود آمده است

L = طول عضو

A = سطح مقطع عرضی عضو

E = مدول الاستیسیته عضو

$$U_b = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$$

خمش

m = لنگر مجازی داخلی که در اثر بار واحد مجازی خارجی بوجود آمده است

M = لنگر داخلی در عضو که در اثر بار واقعی بوجود آمده است

L = طول عضو

E = مدول الاستیسیته عضو

I = ممان اینرسی عضو

$$U_t = \int_0^L \frac{tT}{GJ} dx$$

لنگر پیچشی مجازی داخلی که در اثر بار واحد مجازی خارجی بوجود آمده است $t =$

لنگر پیچشی داخلی در عضو که در اثر بار واقعی بوجود آمده است $T =$

مدول الاستیسیته برشی عضو $G =$

ممان اینرسی قطبی $J =$

شعاع سطح مقطع عضو است c که $J = \pi c^4 / 2$

برش

$$U_s = \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx$$

برش مجازی داخلی در عضو که در اثر بار واحد مجازی بوجود آمده است $v =$

برش داخلی در عضو که در اثر بار واقعی بوجود آمده است $V =$

ضریب سطح مقطع $K =$

برای سطح مقطع مستطیلی $K = 1.2$

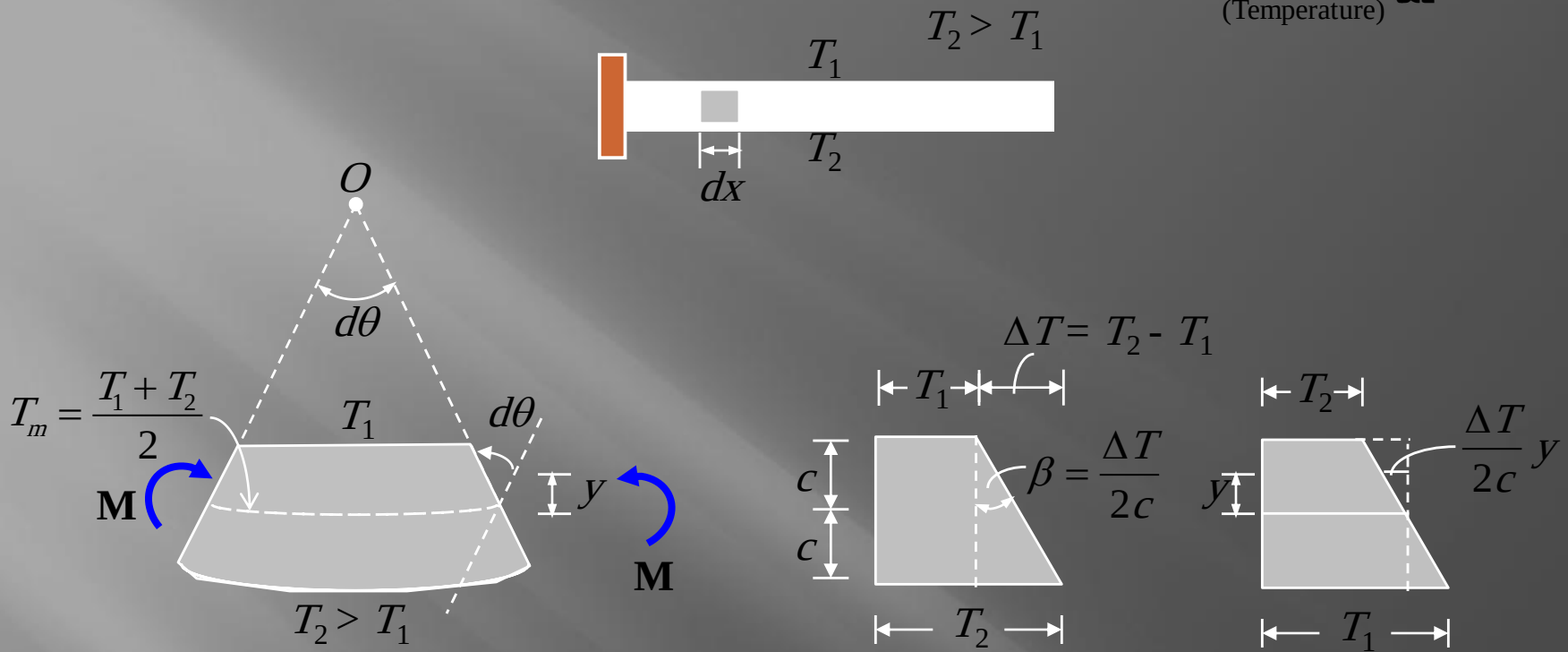
برای سطح مقطع دایره ای $K = 1.111$

شکل و بال پهن I برای تیرهای $K = 1$

مدول الاستیسیته برشی عضو $G =$

سطح مقطع عرضی عضو $A =$

(Temperature) دما



$$(\cancel{d\theta}) \cancel{y} = \alpha \left(\frac{\Delta T}{2c} \right) \cancel{y} dx$$

$$(d\theta) = \alpha \left(\frac{\Delta T}{2c} \right) dx$$

$$U_{temp} = \int m d\theta$$

$$U_{temp} = \int_0^L m \left(\alpha \frac{\Delta T}{2c} \right) dx$$

مثال :

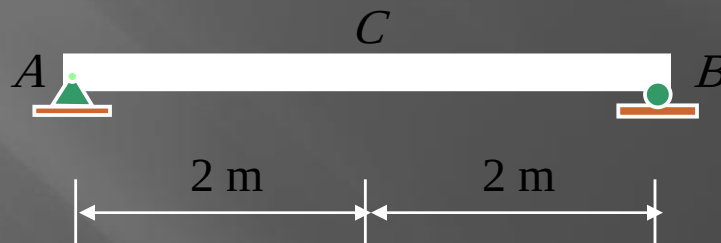
باتوجه به شکل تیر زیر موارد خواسته شده را تعیین کنید:
الف) اگر بار $P = 60 \text{ kN}$ در نقطه C واقع در وسط دهانه وارد شود تغییر مکان نقطه C را در اثر لنگر برشی و خمشی را مشخص کنید.

ب) تغییر مکان عمودی نقطه C را وقتی دمای سطح بالایی 55°C و دمای سطح پائینی 30°C و دمای اتاق 25°C باشد بدست آورید و نیز جابجایی افقی در تکیه گاه B را با فرضیات ذکر شده

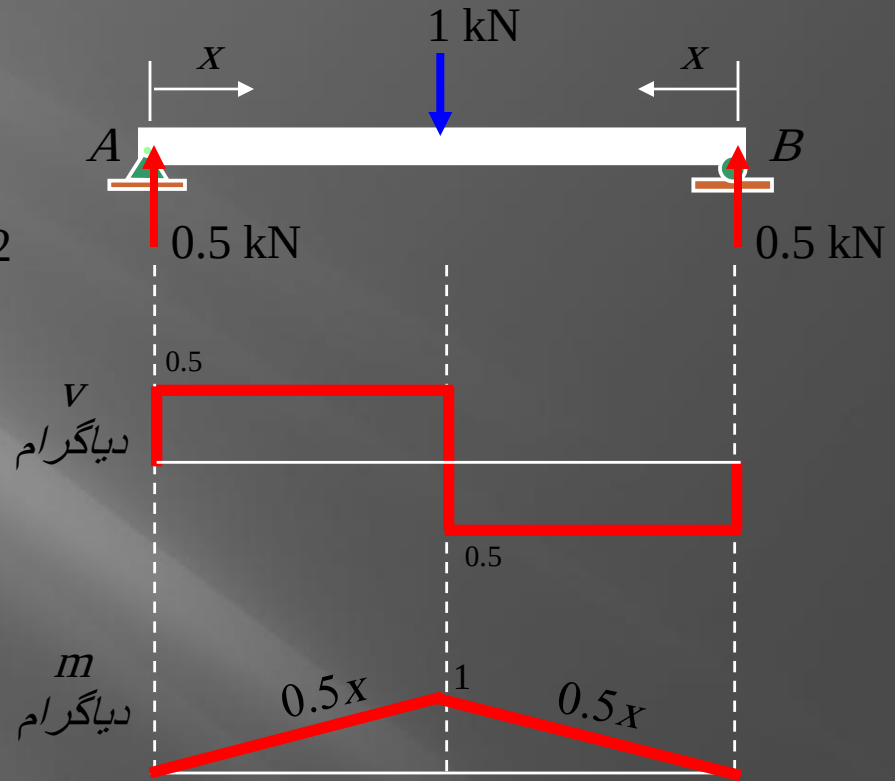
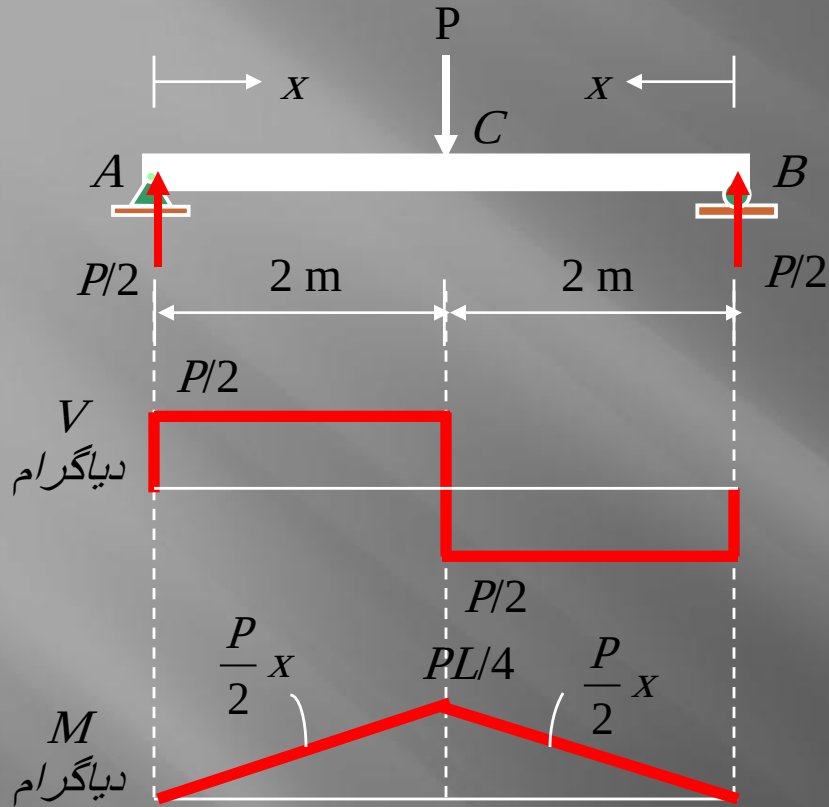
ج) باتوجه به فرضیات گفته شده در مورد (الف) و (ب) تغییر مکان قائم را در نقطه C بدست آورید.

$$A = 35 \times 10^3 \text{ mm}^2, \alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}, E = 200 \text{ GPa}, G = 80 \text{ GPa}, I = 200 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

سطح مقطع را مستطیل بگیرید.



حل : الف :

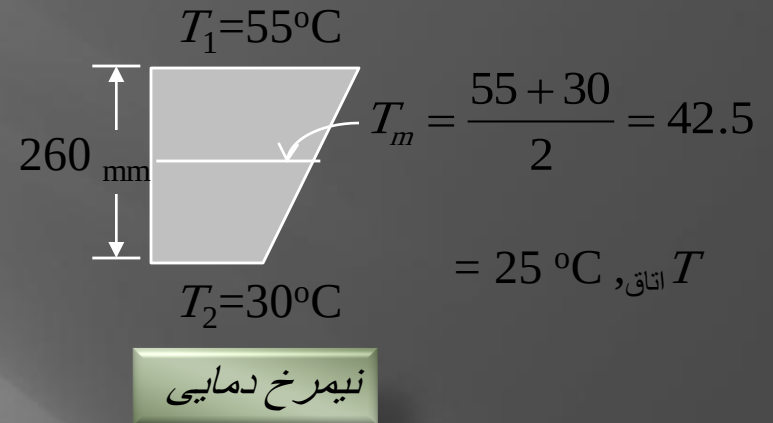
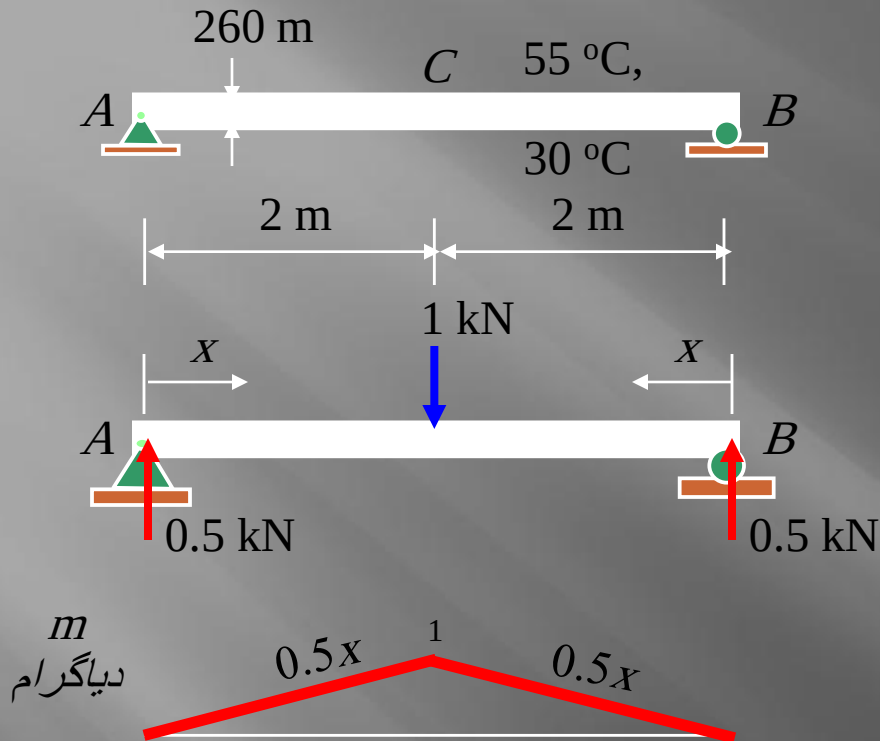


$$\Delta_{bending} = \int_0^L \frac{m_i M_i}{EI} dx = 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{Px}{2}\right) \frac{dx}{EI} = \frac{2}{EI} \left(\frac{Px^3}{4 \times 3}\right) \Big|_0^{L/2} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{60(4)^3}{48(200)(200)} = 2 \text{ mm}, \downarrow$$

$$\Delta_{shear} = \int_0^L \frac{Kv_i V_i}{GA} dx = 2 \int_0^{L/2} K\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) \frac{dx}{GA} = \frac{KPx}{2GA} \Big|_0^{L/2} = \frac{KPL}{4GA} = \frac{1.2(60)(4)}{4(80)(35000)} = 0.026 \text{ mm}, \downarrow$$

$$\Delta_C = \Delta_{bending} + \Delta_{shear} = 2 + 0.026 = 2.03 \text{ mm}, \downarrow$$

حل : ب) جابجایی قائم در C

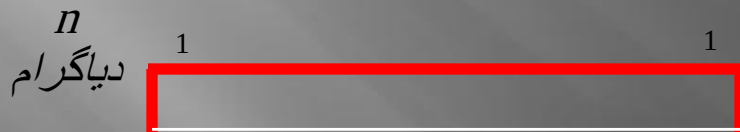
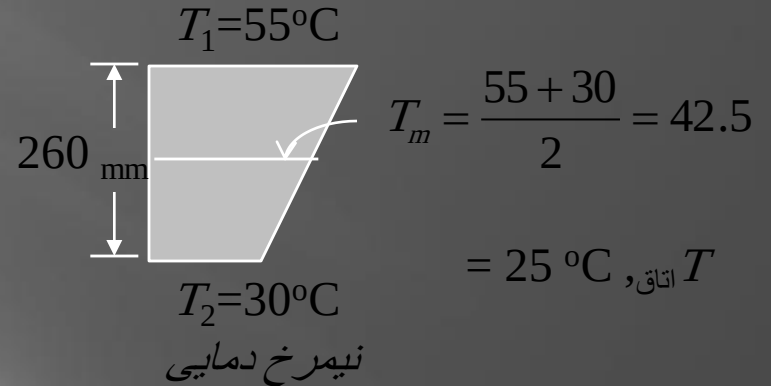
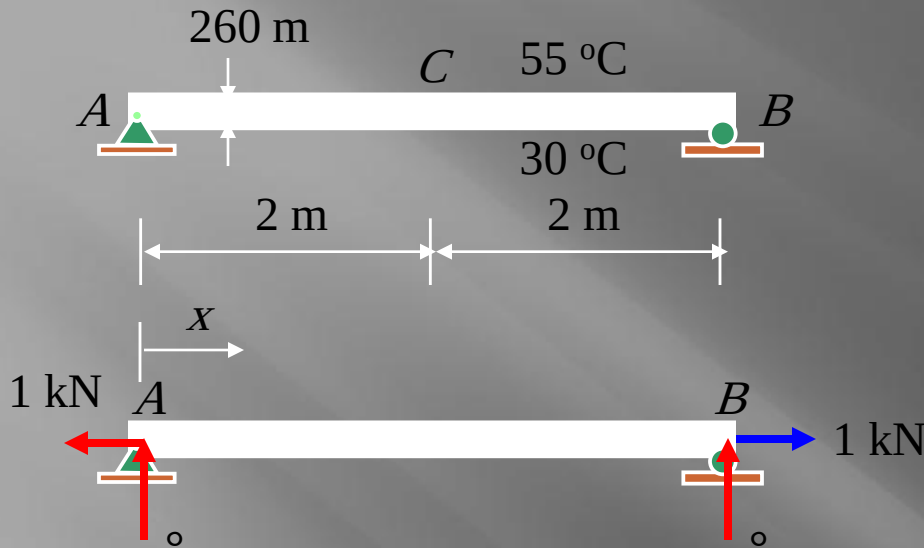


خمش

$$(1\text{ kN})(\Delta_{Cv}) = \int_0^L \frac{m\alpha(\Delta T)}{2c} dx = 2 \frac{\alpha(\Delta T)}{2c} \int_0^2 (0.5x) dx = 2 \frac{(12 \times 10^{-6})(-25)}{(260 \times 10^{-3})} \left(\frac{0.5x^2}{2} \right) \Big|_0^2$$

$$\Delta_{Cv} = -2.31 \text{ mm}, \uparrow$$

ب) : جابجایی افقی در B

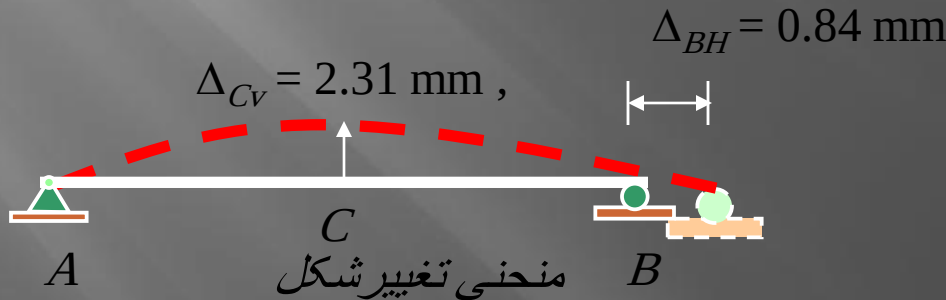


$$(1\text{kN})(\Delta_{BH}) = \int_0^L n\alpha(\Delta T)dx$$

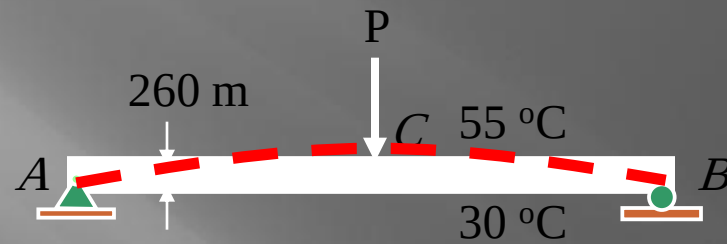
محوری

$$= \alpha(\Delta T) \int_0^4 (1)dx$$

$$= (12 \times 10^{-6})(42.5 - 25)(x) \Big|_0^4$$

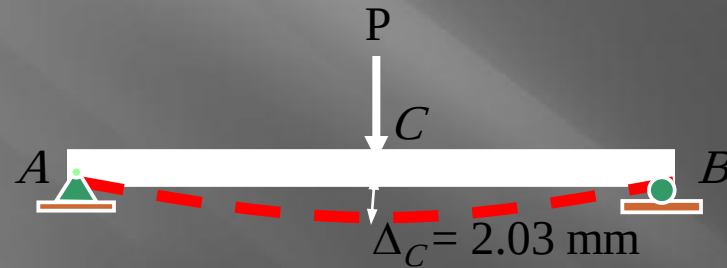


$$\Delta_{BH} = 0.84 \text{ mm} , \rightarrow$$

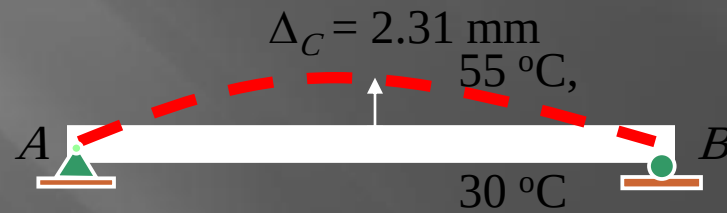


||

$$\Delta_C = -2.03 + 2.31 = 0.28\text{ mm}, \uparrow$$



+



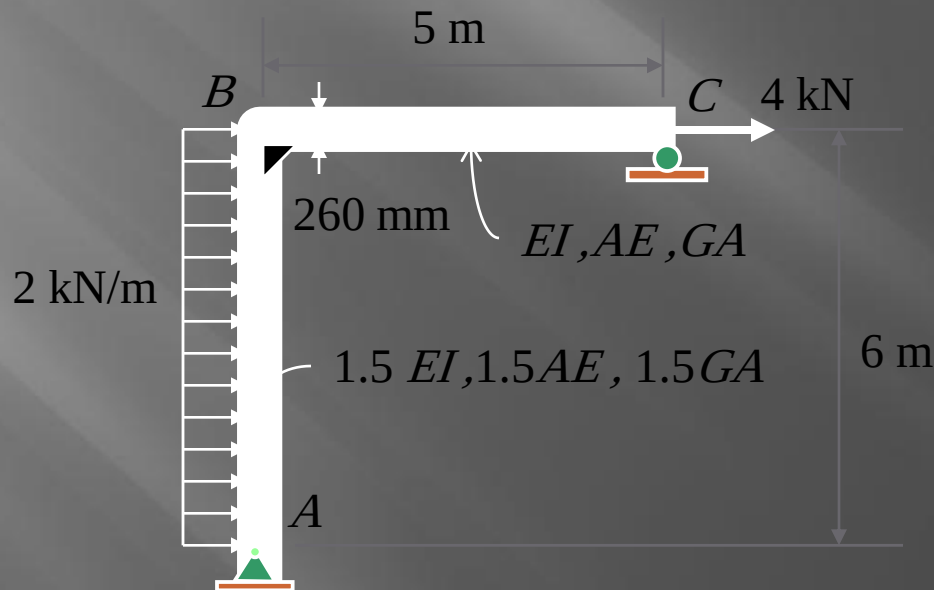
مثال :

در قاب شکل زیر تغییر مکان افقی رادر گره C بدست بیاورید. با فرض اینکه دمای سطح بالایی عضو BC حدود 30°C و دمای سطح زیرین آن 55°C و دمای اتاق 25°C باشد.

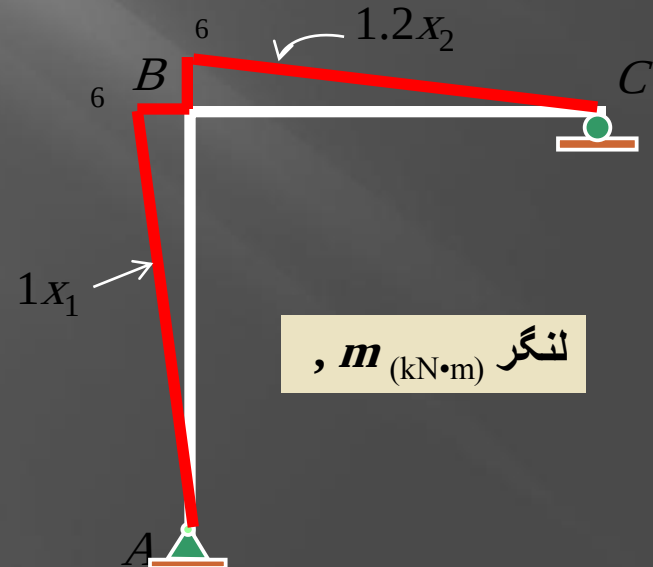
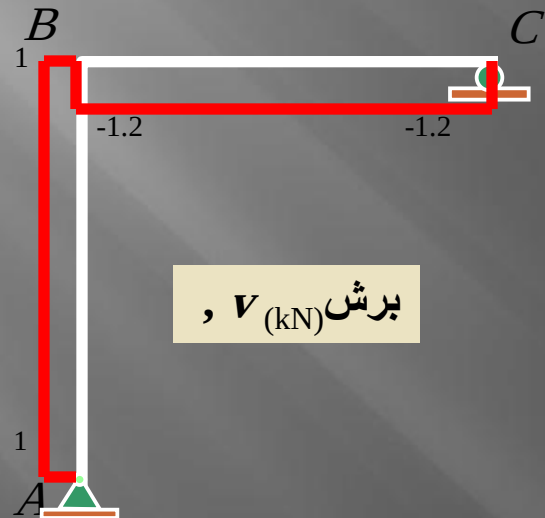
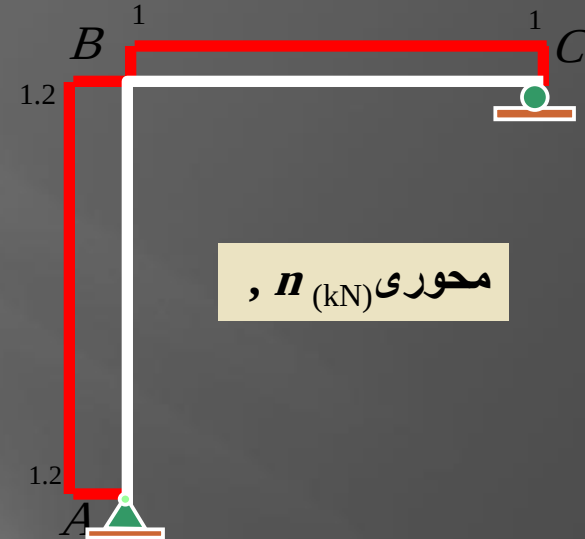
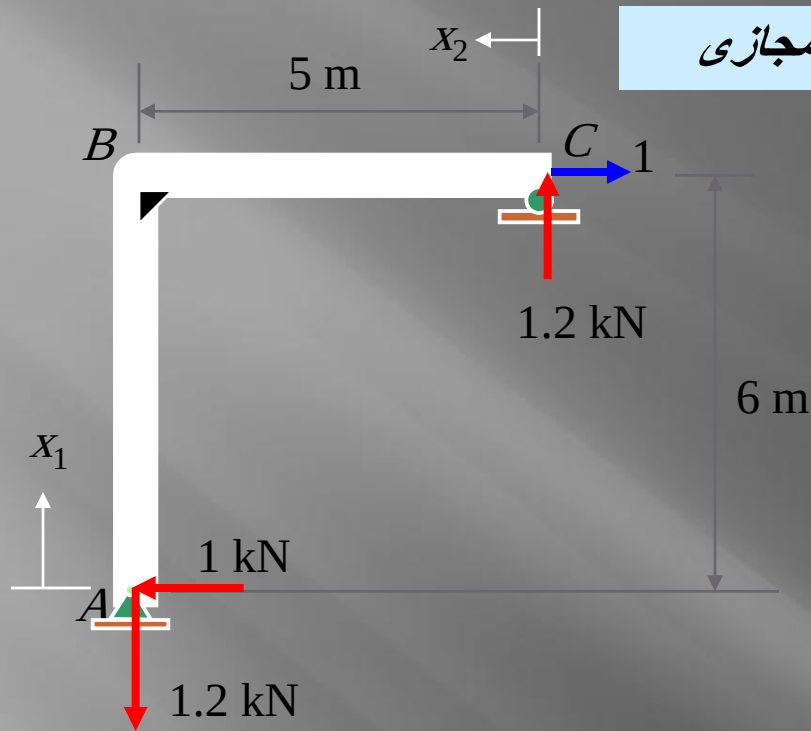
$$A = 35 \times 10^3 \text{ mm}^2 \text{ و } \alpha = 12 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}, E = 200 \text{ GPa}, G = 80 \text{ GPa}, I = 200 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

سطح مقطع مستطیل شکل است

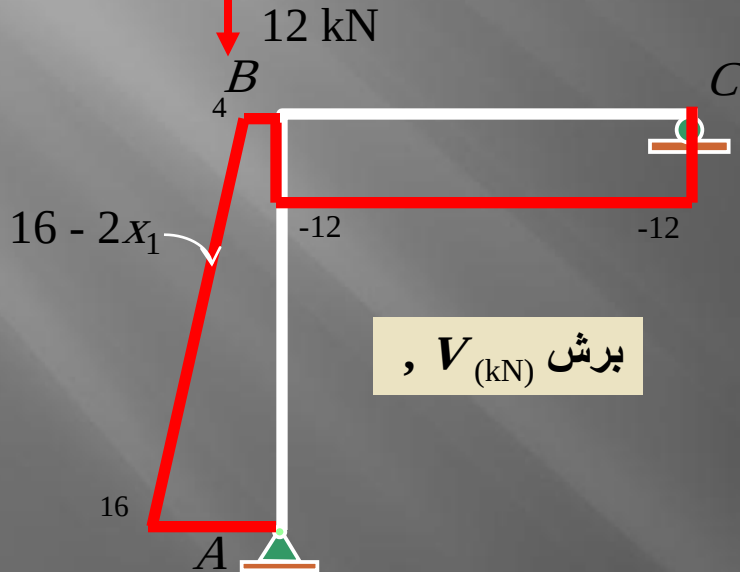
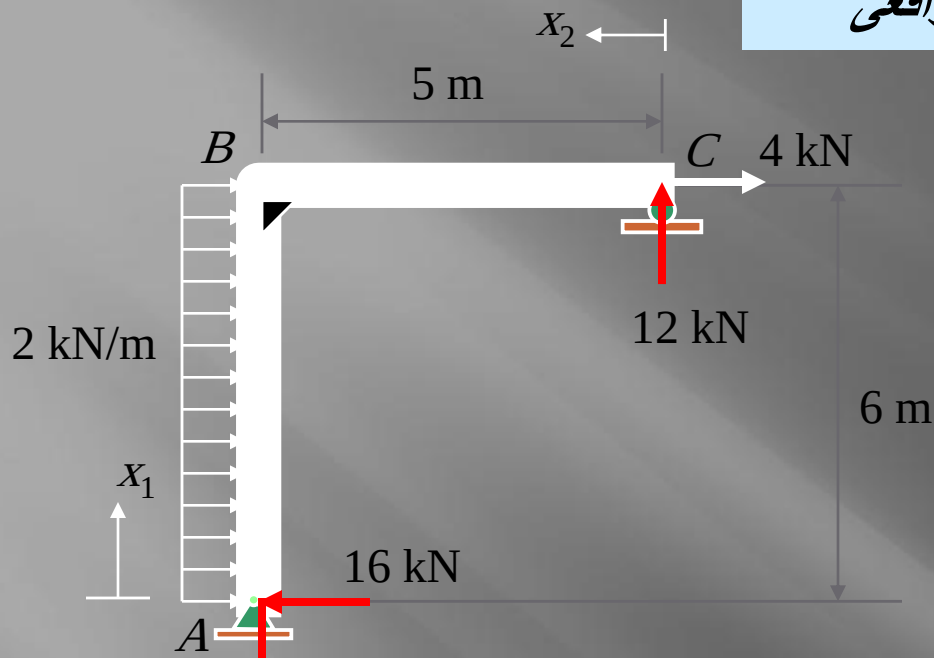
انرژی کرنشی داخلی سبب ایجاد نیروی محوری و برش می گردد.



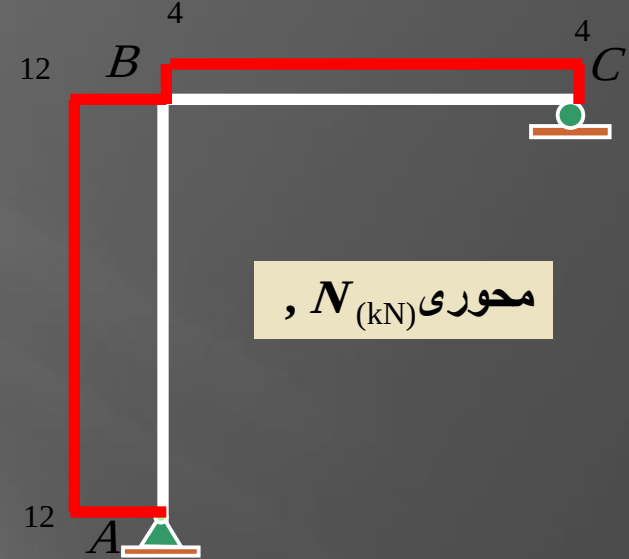
بار مجازی



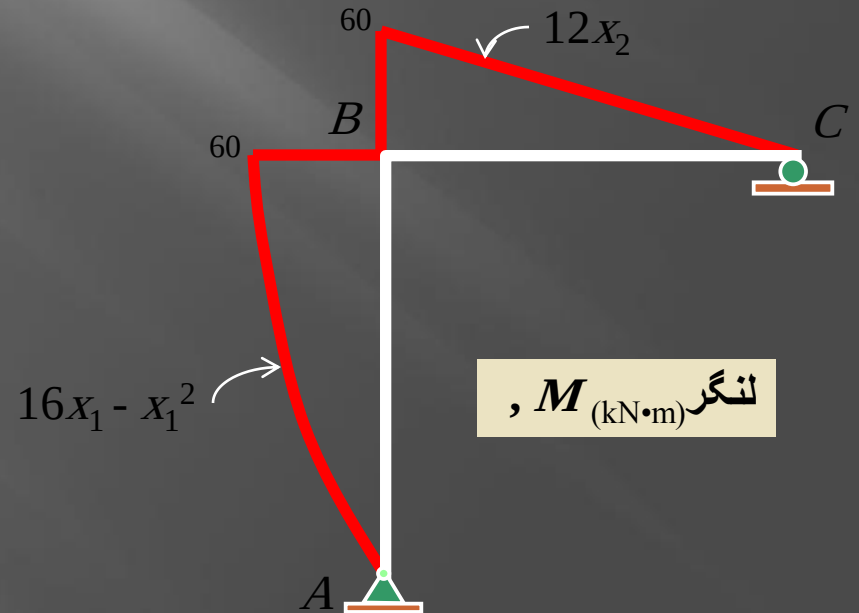
بار واقعی



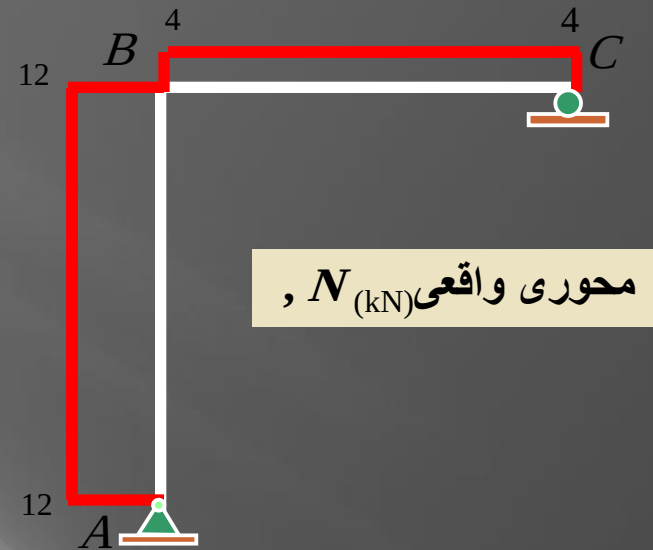
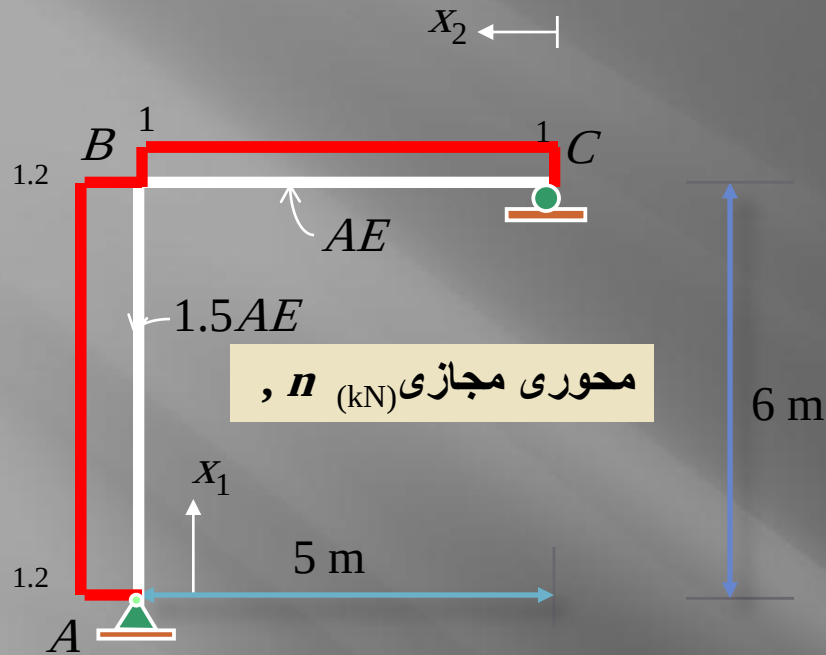
برش V (kN)



محوری N (kN)

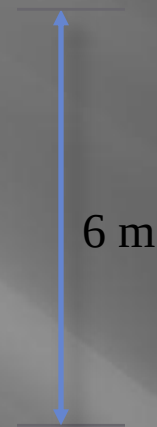
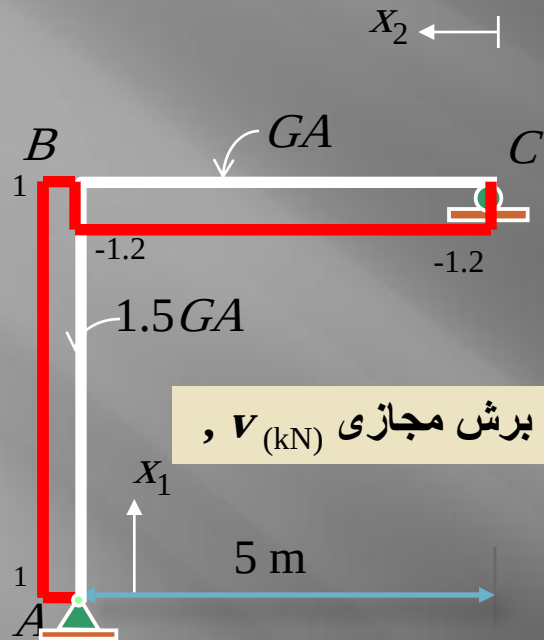


لنگر M (kN.m)



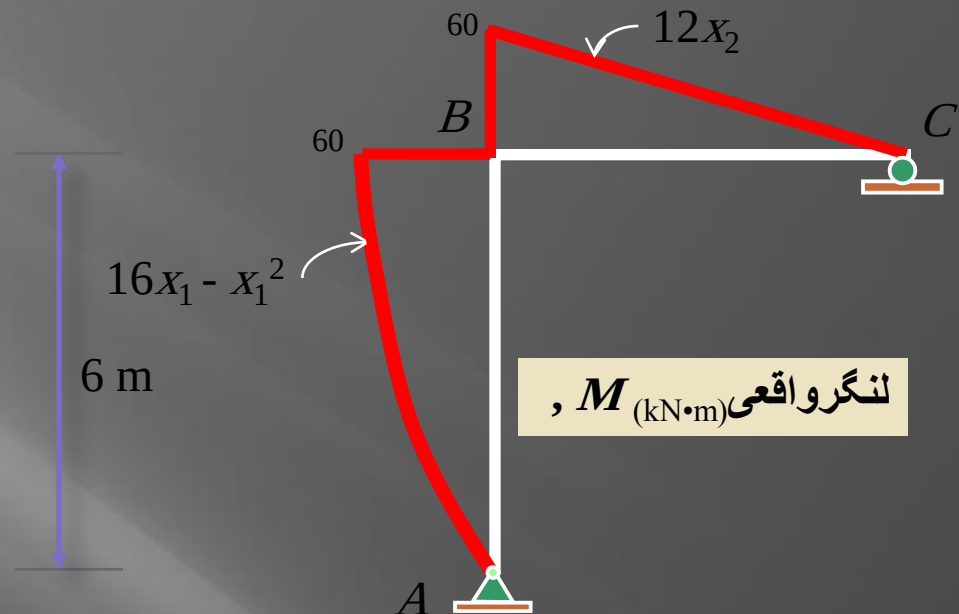
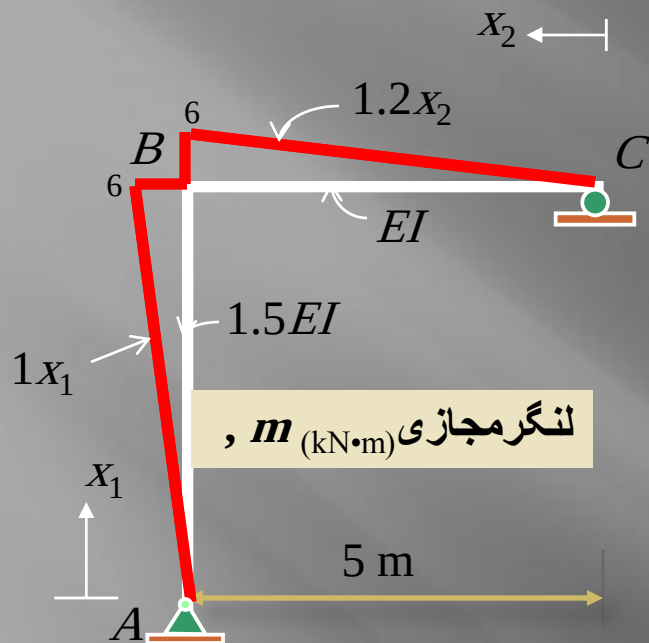
$$\begin{aligned}
 (1\text{ kN})(\Delta_{CH}) &= \sum \frac{n_i N_i L_i}{A_i E_i} \\
 &= \frac{(1.2)(12)(6)}{1.5 AE} + \frac{(1)(4)(5)}{AE} \\
 &= \frac{77.6 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_{CH} = \frac{77.6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(35000 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2})} = 1.109(10^{-5}) \text{ m} = 0.0111 \text{ mm}, \quad \longrightarrow$$



$$\begin{aligned}
 (1kN)(\Delta_{CH}) &= \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx \\
 &= \int_0^6 1.2 \frac{(1)(16 - 2x_1)}{1.5GA} dx_1 + \int_0^5 1.2 \frac{(-1.2)(-12)}{GA} dx_2 \\
 &= \left(\frac{1.2}{1.5GA} \right) \left(16x_1 - \frac{2x_1^2}{2} \right) \Big|_0^6 + \left(\frac{1.2}{GA} \right) (14.4x_2) \Big|_0^5 = \frac{134.4 kN^2 \bullet m}{GA}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_{CH} = \frac{134.4 kN \bullet m}{(80 \times 10^6 \frac{kN}{m^2})(35000 \times 10^{-6} m^2)} = 4.8(10^{-5}) m = 0.048 mm, \longrightarrow$$

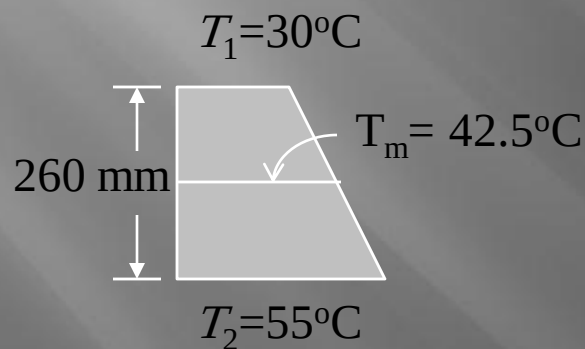
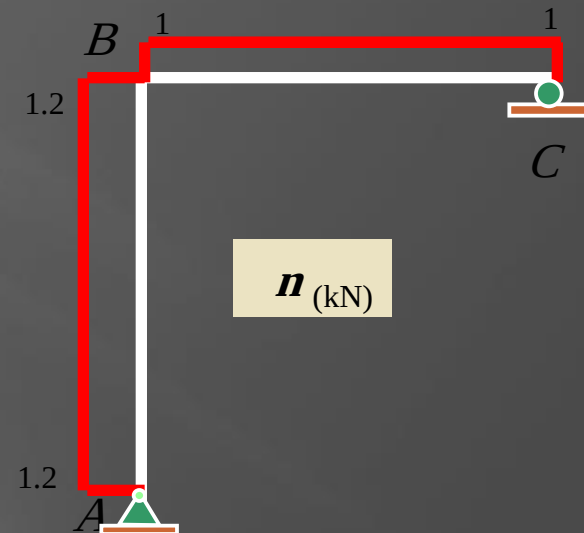
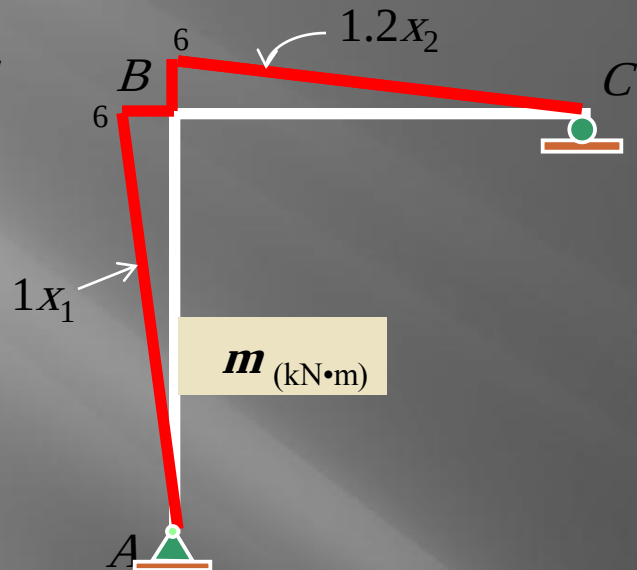
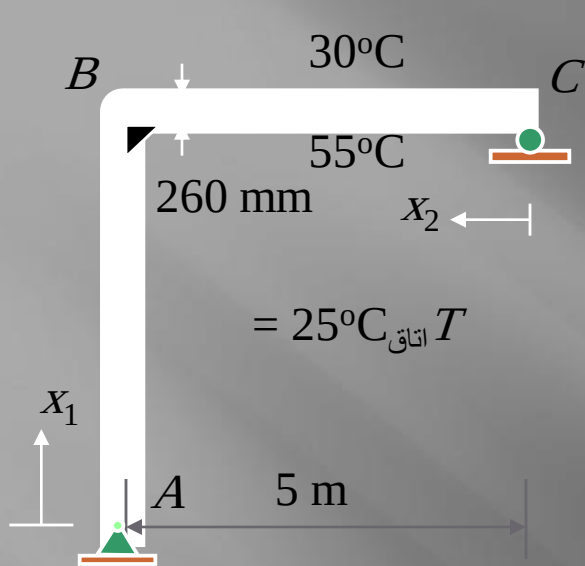


$$(1kN)(\Delta_{CH}) = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{1.5EI} \int_0^6 (x_1)(16x_1 - x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (1.2x_2)(12x_2) dx_2$$

$$= \frac{1}{1.5EI} \left(\frac{16x_1^3}{3} - \frac{x_1^4}{4} \right) \Big|_0^6 + \frac{1}{EI} \left(\frac{14.4x_2^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \frac{1152 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{CH} = \frac{1152 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2})(200 \times 10^{-6} \text{m}^4)} = 0.0288 \text{ m} = +28.8 \text{ mm}, \rightarrow$$



نیمرخ دمایی

$$(1\text{ kN})(\Delta_{CH}) = \int_0^L \frac{m\alpha(\Delta T)}{2c} dx = \int_0^5 \frac{(1.2x_2)(12 \times 10^{-6})(55 - 30)}{(260 \times 10^{-3})} dx_2$$

$$\Delta_{CH} = 0.0173 \text{ m} = 17.3 \text{ mm}, \quad \rightarrow$$

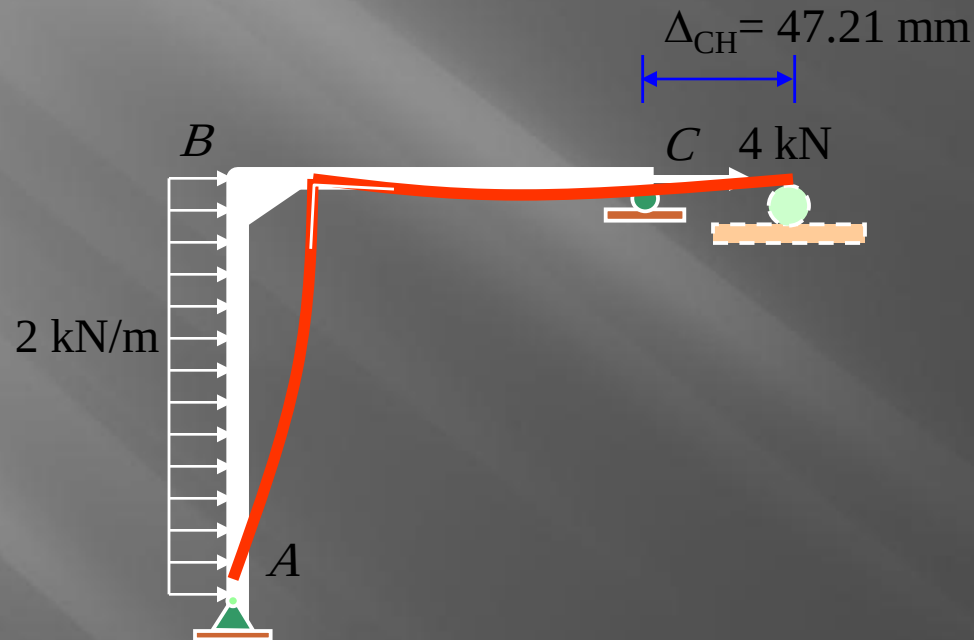
محوری

$$(1\text{ kN})(\Delta_{CH}) = \int_0^L n\alpha(\Delta T) dx = \int_0^5 (1)(12 \times 10^{-6})(42.5 - 25) dx_2$$

$$\Delta_{CH} = 0.00105 \text{ m} = 1.05 \text{ mm}, \quad \rightarrow$$

$$(\Delta_{CH})_{Total} = (\Delta_{CH})_{Axial} + (\Delta_{CH})_{Shear} + (\Delta_{CH})_{Bending} + (\Delta_{CH})_{Temp}$$

$$= 0.01109 + 0.048 + 28.8 + (17.3 + 1.05) = 47.21 \text{ mm}$$



روش کار مجازی

کار خارجی و انرژی کرنشی

روشهای انرژی مبتنی بر اصل بقای انرژی هستند، کار انجام شده خارجی را U_e و کار انجام شده داخلی یا انرژی کرنشی را U_i می نامند.

$$U_e = U_i$$

نیروی کار خارجی

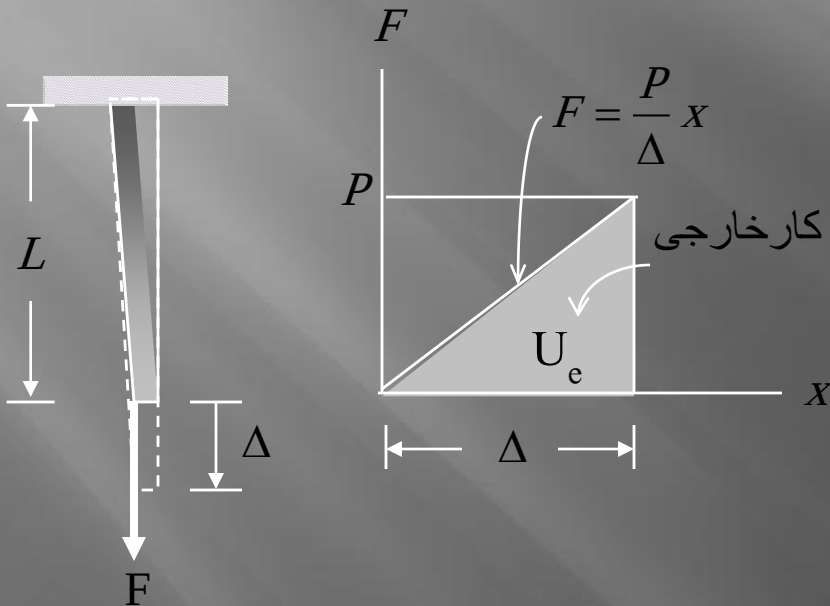
$$dU_e = Fdx$$

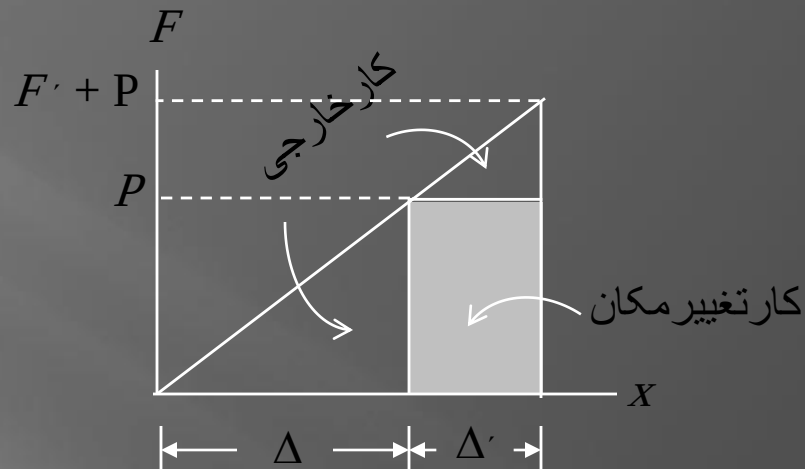
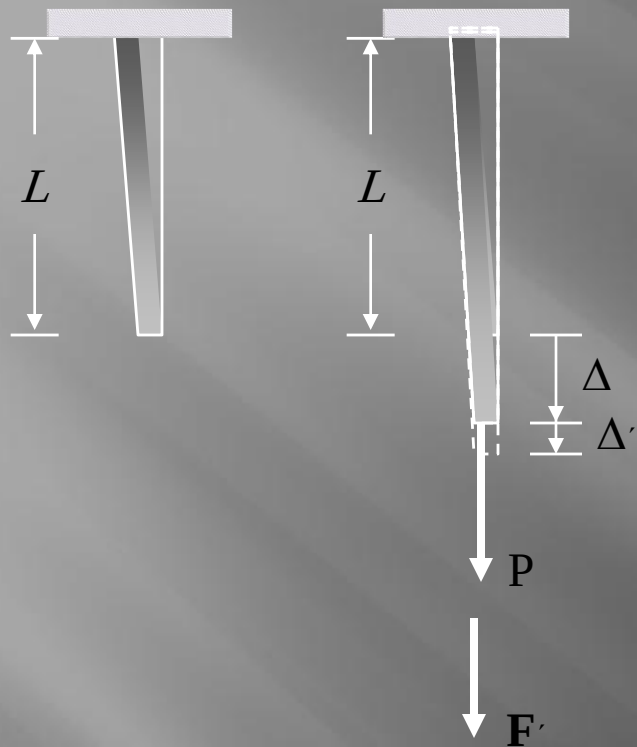
$$U_e = \int_0^x Fdx$$

بطوریکه اندازه F بتدریج از صفر تا $F = P$ افزایش یابد و در نهایت افزایش طول نهایی میله برابر Δ شود.

$$U_e = \int_0^{\Delta} \left(\frac{P}{\Delta} x \right) dx \quad \text{کار خارجی}$$

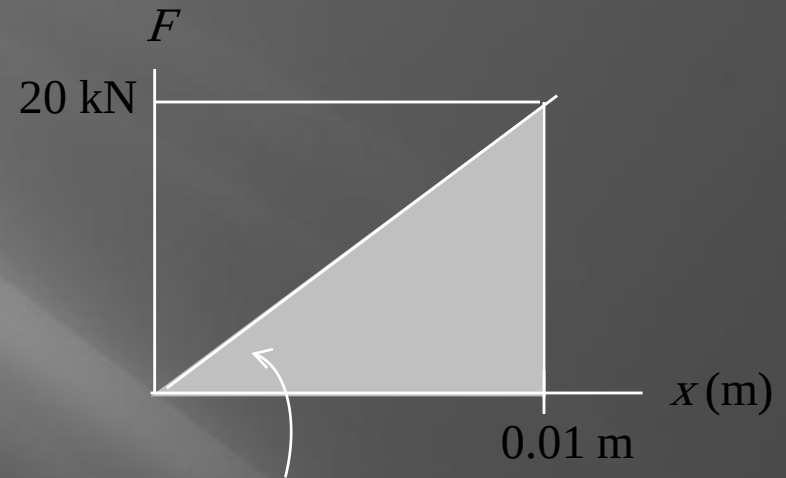
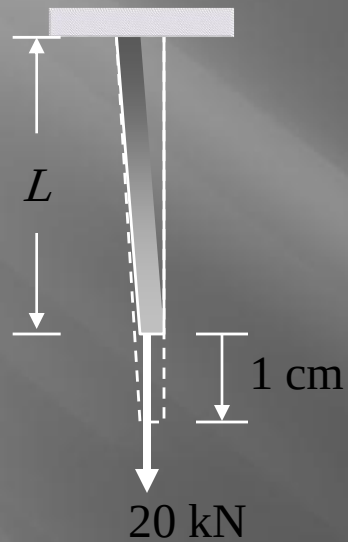
$$U_e = \left(\frac{P}{2\Delta} x^2 \right) \Big|_0^{\Delta} = \frac{1}{2} P\Delta$$



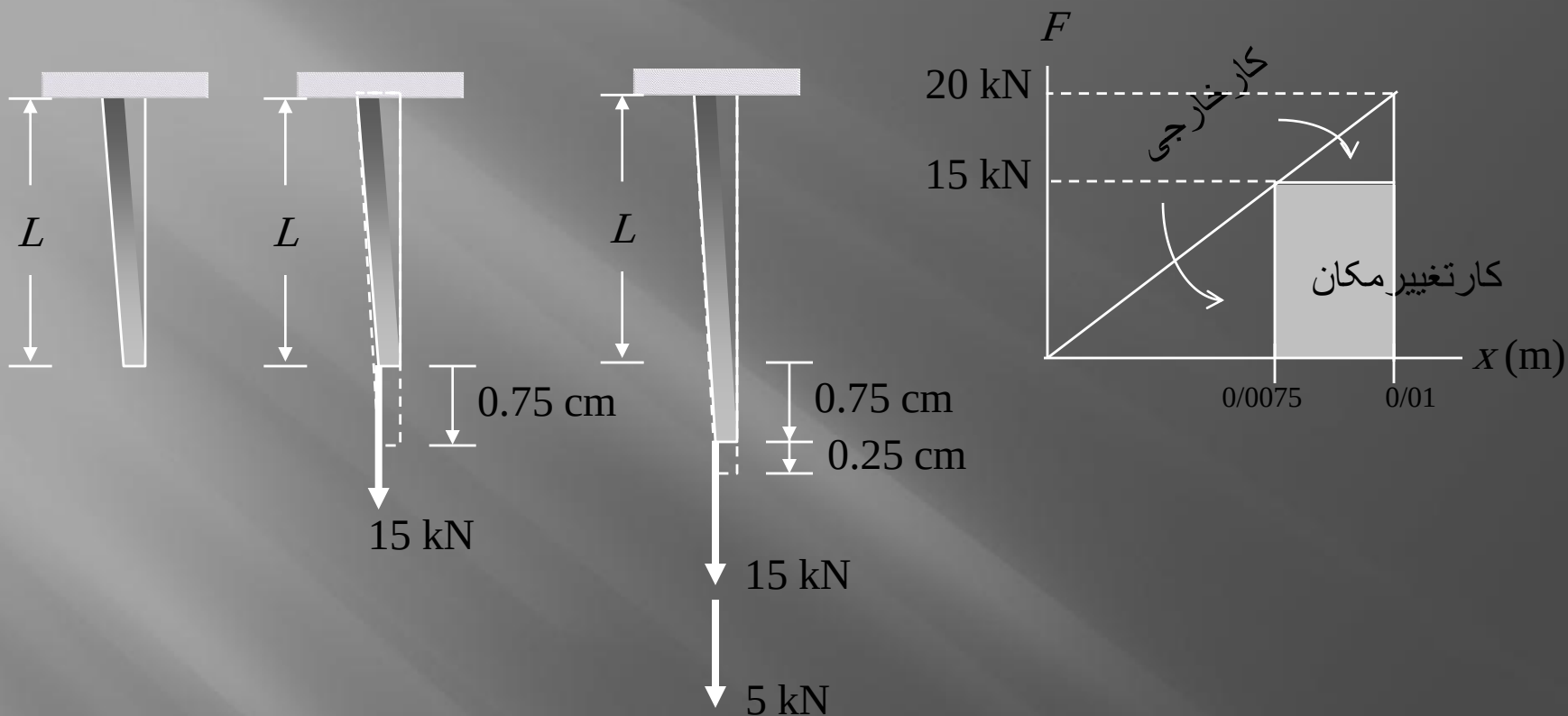


$$(U_e)_{\text{مجموع}} = (\text{کار خارجی})_P + (\text{کار خارجی})_{F'} + (\text{کار تغییر مکان})_P$$

$$(U_e)_{\text{Total}} = \frac{1}{2}(\Delta)(P) + \frac{1}{2}(\Delta')(F') + P(\Delta')$$



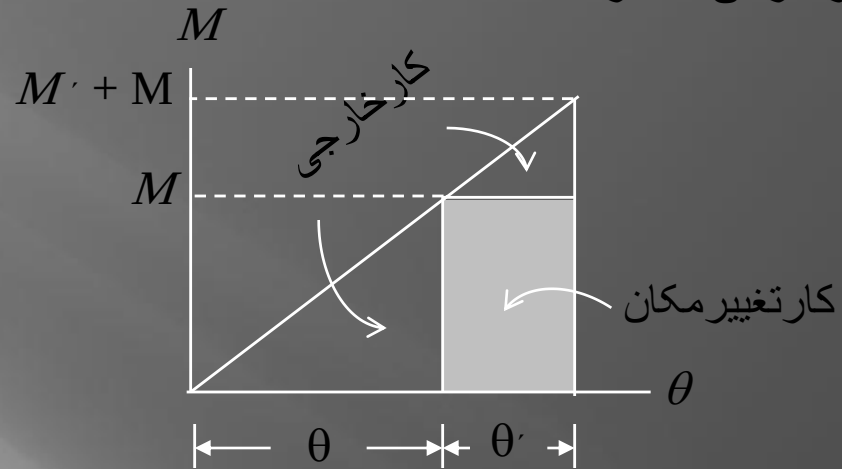
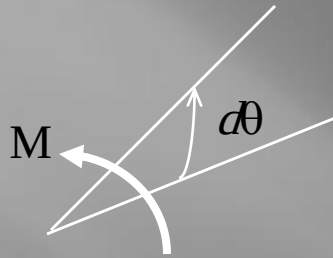
$$U_e = \frac{1}{2} (0.01) (20 \times 10^3) = 100 \text{ N}\bullet\text{m}$$



$$W = \frac{1}{2}(0.0075)(15 \times 10^3) + \frac{1}{2}(0.0025)(5 \times 10^3) + (0.0025)(15 \times 10^3)$$

$$= 56.25 + 6.25 + 37.50 = 100 \text{ N} \bullet \text{m}$$

کار خارجی - لنگر



$$dU_e = M d\theta$$

$$U_e = \int_0^{\theta} M d\theta$$

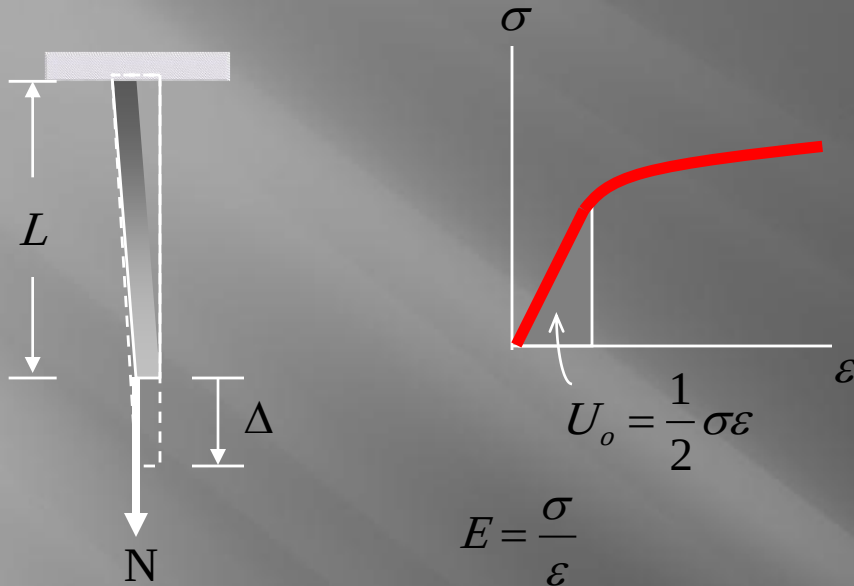
$$U_e = \frac{1}{2} M \theta$$

کار خارجی

$$(U_e)_{Total} = \frac{1}{2} \theta M + \frac{1}{2} \theta' M' + M \theta'$$

$$(U_e)_{Total} = \frac{1}{2} (M + M') (\theta + \theta')$$

نیروی محوری-انرژی کرنشی



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$U_i = \int U_o dV$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \sigma \epsilon \right) dV$$

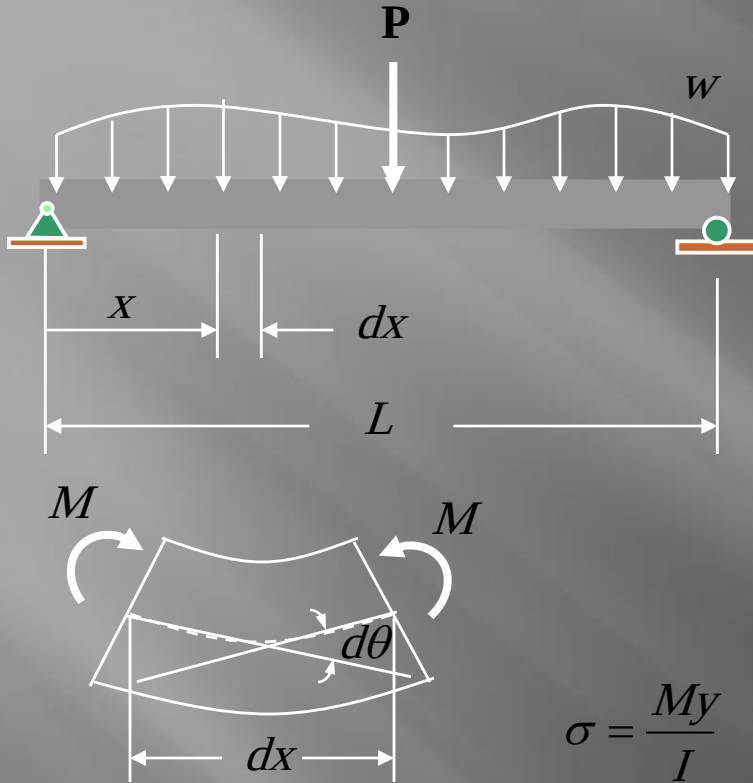
$$= \int \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{E} \right) dV$$

$$= \int \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2 dV$$

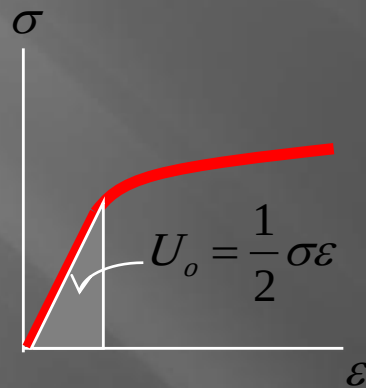
$$= \int \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2 A dx$$

$$U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx$$

خمش - انرژی کرنشی

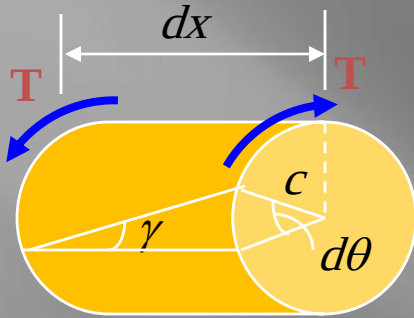


$$\sigma = \frac{My}{I}$$

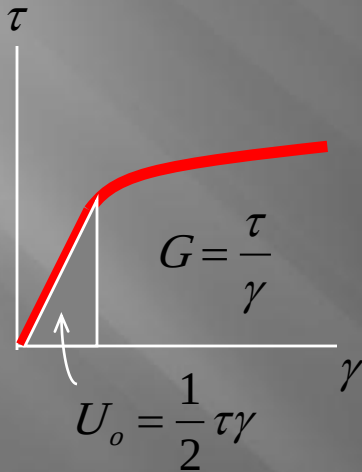


$$\begin{aligned} U_i &= \int_L U_o dV \\ &= \int_L \left(\frac{1}{2} \sigma \epsilon \right) dV \\ &= \int_L \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{E} \right) dV \\ &= \int_L \frac{1}{2E} \left(\frac{My}{I} \right)^2 dV \\ &= \int_L \frac{1}{2E} \left(\frac{M^2 y^2}{I^2} \right) dA dx \\ &= \int_L \frac{1}{2E} \left(\frac{M^2}{I^2} \right) \left(\int_A y^2 dA \right) dx \\ &= \int_L \left(\frac{M^2 I}{2EI^2} \right) dx \end{aligned}$$

$$U_i = \int_0^L \left(\frac{M^2}{2EI} \right) dx$$



$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$



$$U_i = \int U_o dV$$

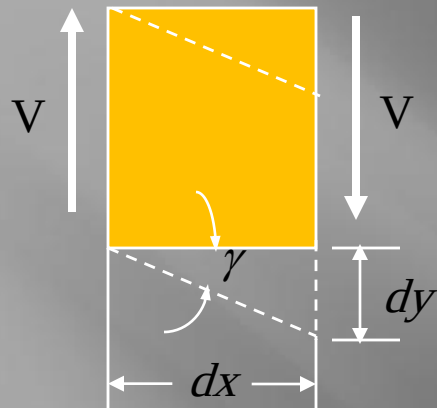
$$= \int \left(\frac{1}{2} \tau \gamma \right) dV$$

$$= \int \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^2}{G} \right) dV$$

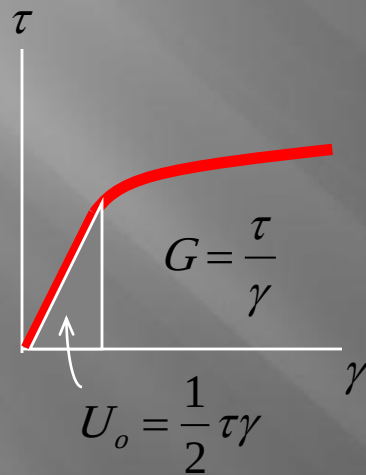
$$= \int \frac{1}{2G} \left(\frac{T\rho}{J} \right)^2 dV$$

$$= \int \frac{1}{2G} \left(\frac{T^2}{J^2} \right) \int (\rho^2 dA) dx$$

$$U_i = \int \frac{T^2}{2GJ} dx$$



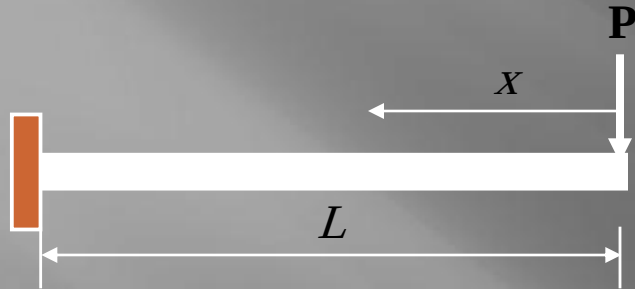
$$\tau = \frac{VQ}{It}$$



$$\begin{aligned} U_i &= \int U_o dV \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \tau \gamma \right) dV \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^2}{G} \right) dV \\ &= \int \frac{1}{2G} \left(\frac{VQ}{It} \right)^2 dV \\ &= \int \frac{V^2}{2G} \int \left(\frac{Q^2}{It} dA \right) dx \end{aligned}$$

$$U_i = \int K \frac{V^2}{2GA} dx$$

اصل کار و انرژی



$$U_e = U_i$$

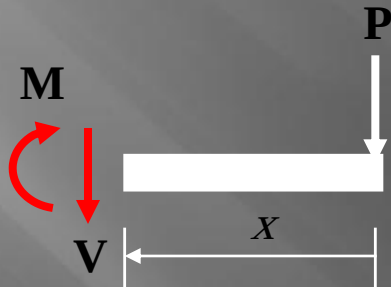
$$\frac{1}{2} P\Delta = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$\frac{1}{2} P\Delta = \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI}$$

$$\frac{1}{2} P\Delta = \frac{P^2 x^3}{6EI} \Big|_0^L$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

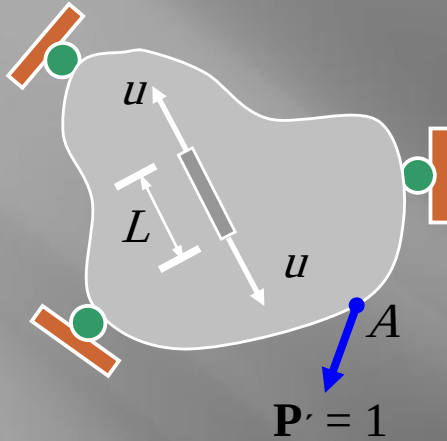
M دیاگرام



$$+\curvearrowright \Sigma M_x = 0: -M - Px = 0$$

$$M = -Px$$

اصل کار مجازی



$$\delta U_e = \delta U_i$$

$$\left(\frac{1}{2} P_1 \Delta_1\right) + 1 \cdot \Delta = \sum u \cdot dL + \int U_o dV$$

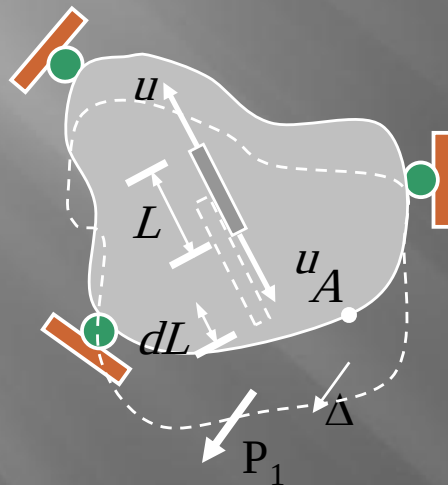
بار مجازی را اعمال میکنیم (P') ابتدا

بارگذاری های مجازی

$$1 \cdot \Delta = \sum u \cdot dL$$

تغییر مکانهای واقعی

رفتار مشابه



بارگذاری مجازی

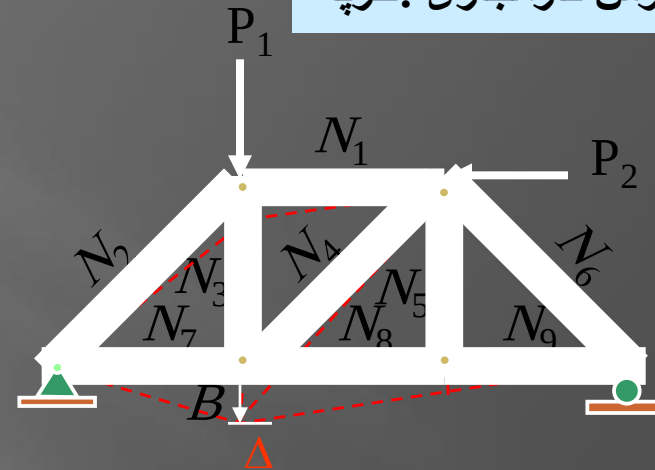
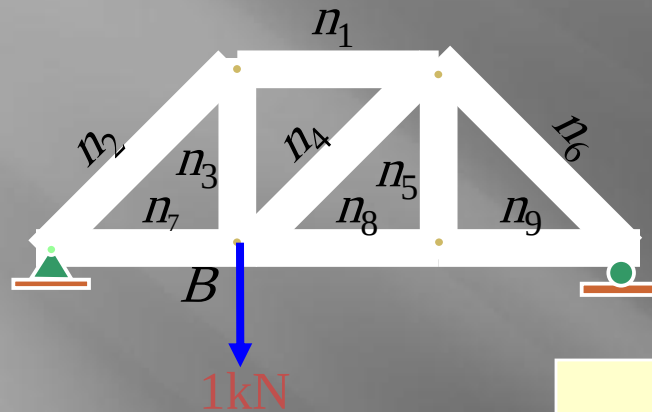
$$1 \cdot \theta = \sum u_o \cdot dL$$

تغییر مکان واقعی

سپس (P_1) بار واقعی را اعمال می کنیم

روش کار مجازی: خریا

بارگذاری خارجی



$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$$

$1 =$ بار واحد مجازی (خارجی) وارد شده بر مفصل خریا و در امتداد Δ

$n =$ نیروی داخلی مجازی در اعضای خریا، این نیرو توسط بار واحد مجازی ایجاد شده است

$\Delta =$ تغییر مکان خارجی مفصل در اثر اعمال بار واقعی

$N =$ نیروی داخلی واقعی در اعضای خریا، این نیرو توسط بار واقعی ایجاد شده است

$L =$ طول اعضا

$A =$ سطح مقطع عرضی اعضا

$E =$ مدول الاستیسیته اعضا

$$1 \bullet \Delta = \sum n \alpha (\Delta T) L$$

Δ = تغییر مکان خارجی مفصل در اثر تغییر دما
 α = ضریب انبساط حرارتی عضو
 ΔT = تغییرات درجه حرارت در عضو

خطای ساخت

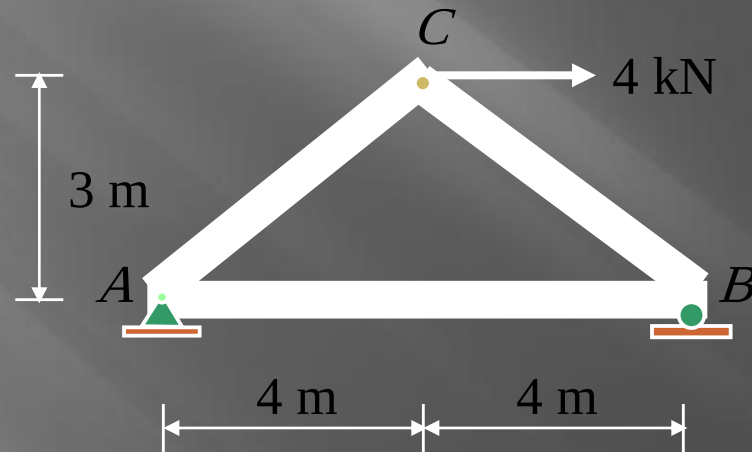
$$1 \bullet \Delta = \sum n \Delta L$$

Δ = تغییر مکان خارجی مفصل در اثر خطای ساخت
 ΔL = تفاوت بین اندازه مورد نظر و قطعه دارای خطا

مثال :

باتوجه به شکل موارد خواسته شده را بدست آورید.

- الف) تغییر مکان عمودی مفصل C در اثر بار وارد شده.
- ب) هرگاه عضو AB حدود 5 mm کوتاهتر ساخته شود و هیچ باری به خریا وارد نشود تغییر مکان ب عمودی مفصل C را بدست آورید.
- ج) هرگاه هم خطای ساخت و هم نیروی اعمال شده همزمان وجود داشته باشد تغییر مکان مفصل C را بدست آورید.



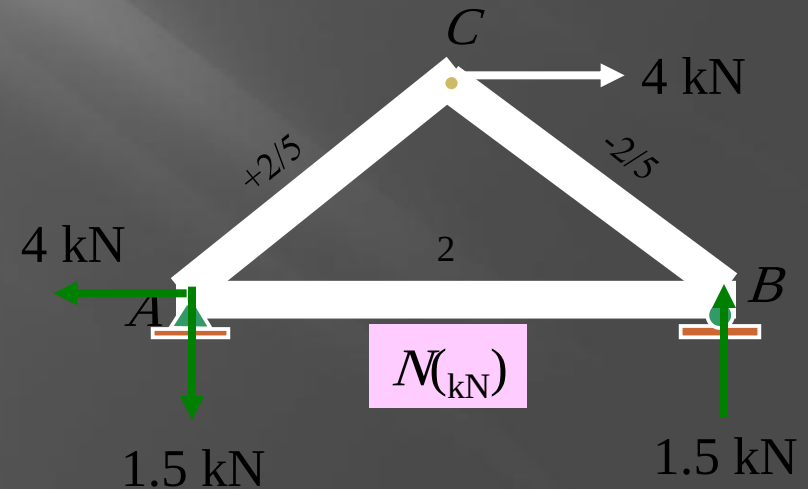
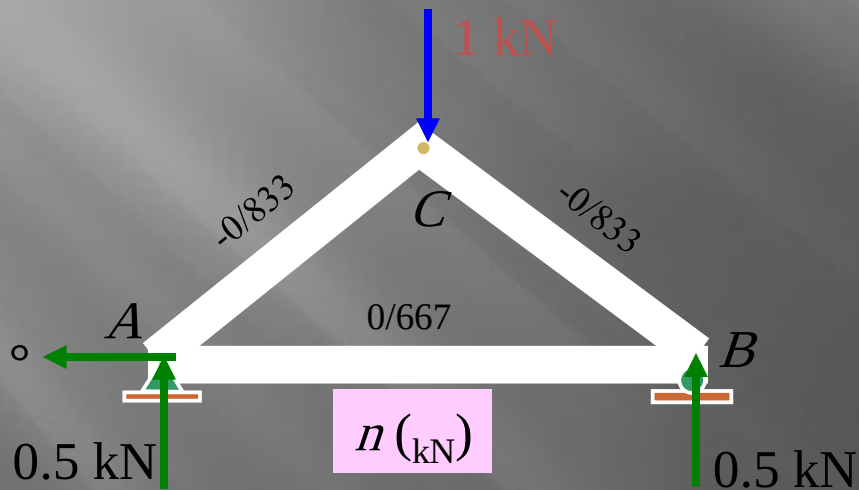
$$E = 200 \text{ GPa} \text{ و } A = 400 \text{ mm}^2$$

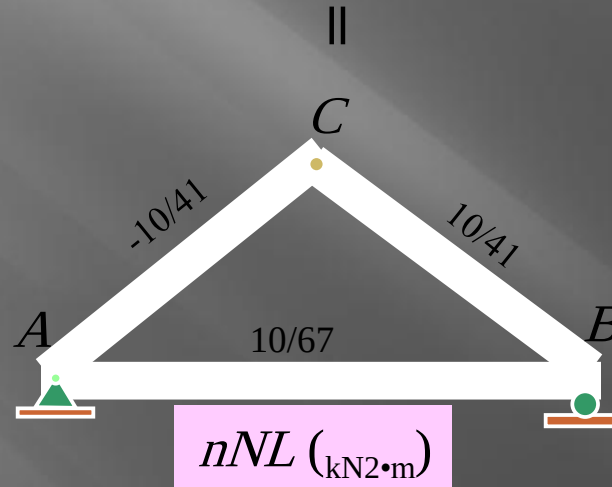
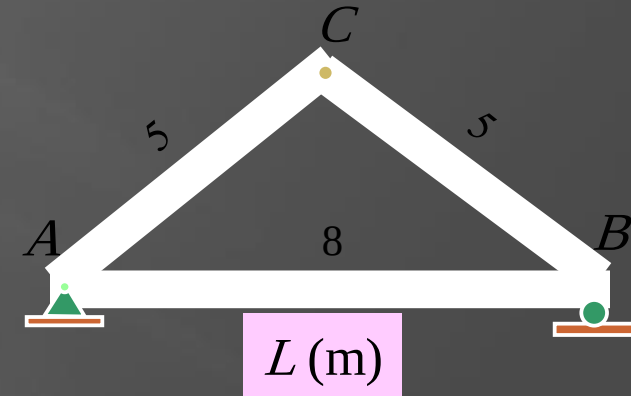
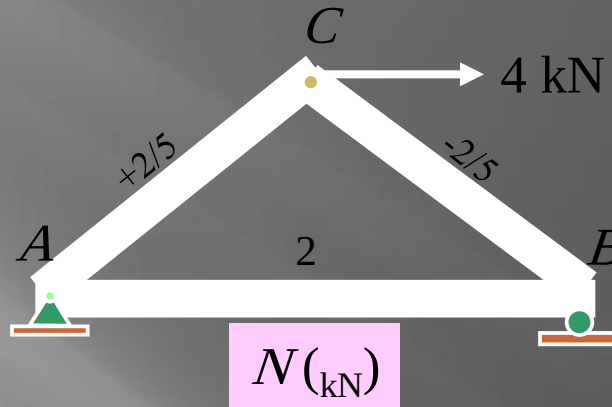
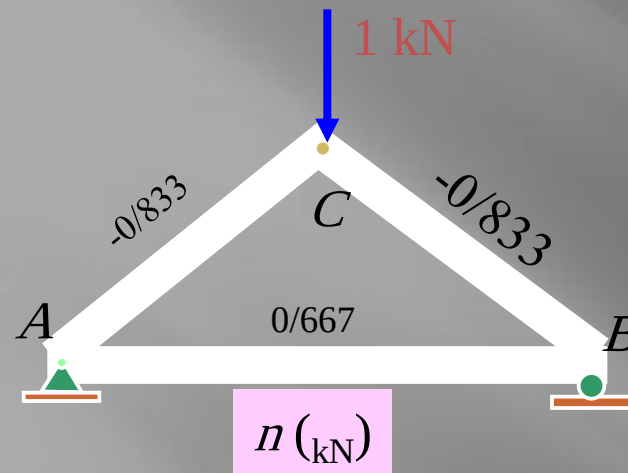
حل :

الف)

ابتدا بار مجازی واحد را در جهت جابجایی مورد نظر اعمال می کنیم.

سپس بار واقعی را در نظر می گیریم.



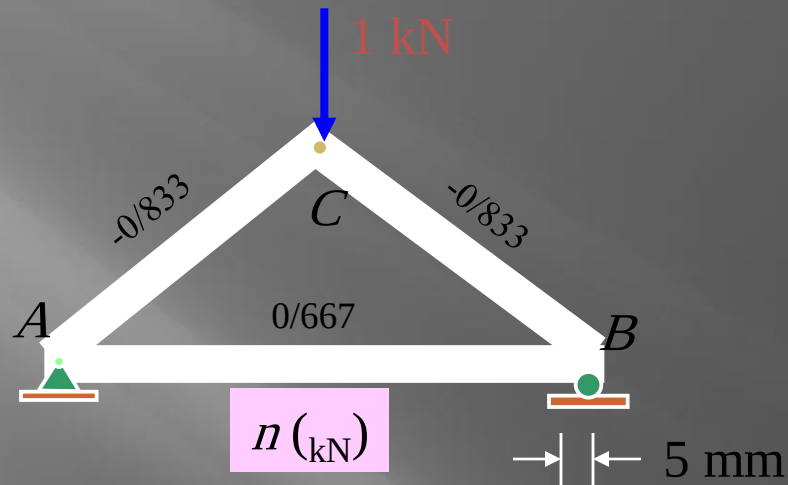


$$(1kN)(\Delta_{Cv}) = \sum \frac{nNL}{AE}$$

$$\Delta_{Cv} = \frac{1}{AE}(-10.41 + 10.41 + 10.67) = \frac{10.67 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(400 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2})}$$

$$\Delta_{Cv} = 0.133 \text{ mm}, \downarrow$$

(ب)



$$(1)(\Delta_{C_V}) = \sum n(\Delta L)$$

$$\Delta_{C_V} = (0.667)(-0.005)$$

$$\Delta_{C_V} = -3.33 \text{ mm}, \uparrow$$

(ج)

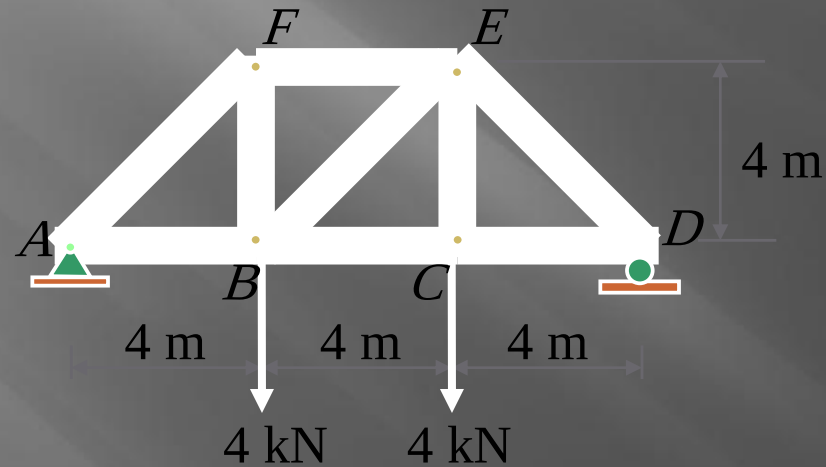
$$\Delta_{C_V} = 0.133 - 3.33 = -3.20 \text{ mm}$$

$$\Delta_{C_V} = -3.20 \text{ mm}, \uparrow$$

مثال :

تغییر مکان عمودی مفصل C را در اثر بارهای وارد شده تعیین کنید.

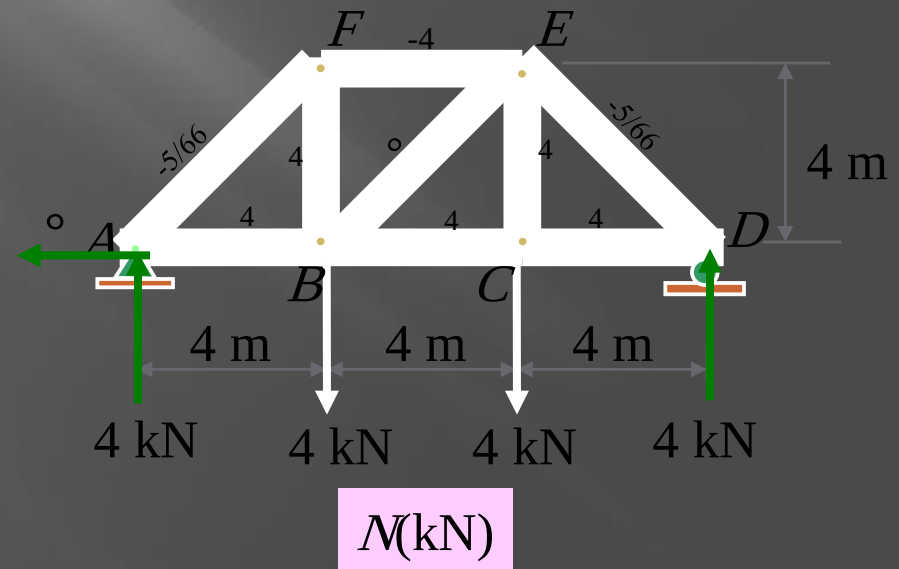
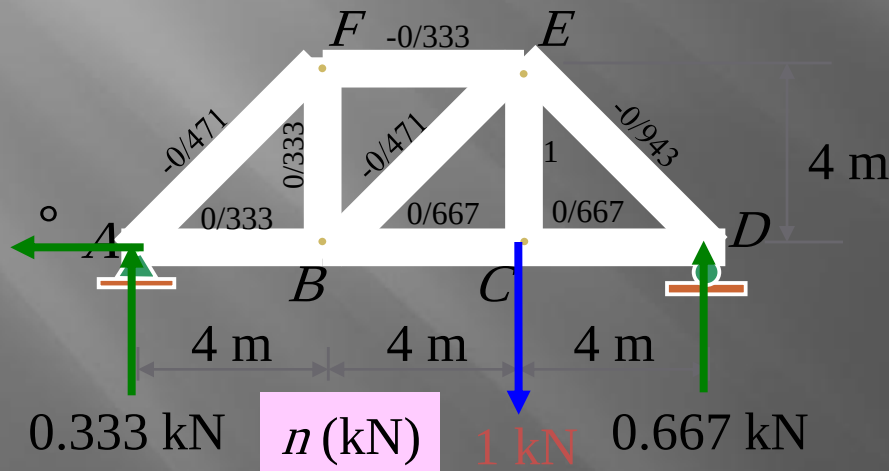
$$E = 200 \text{ GPa} \text{ و } A = 400 \text{ mm}^2$$

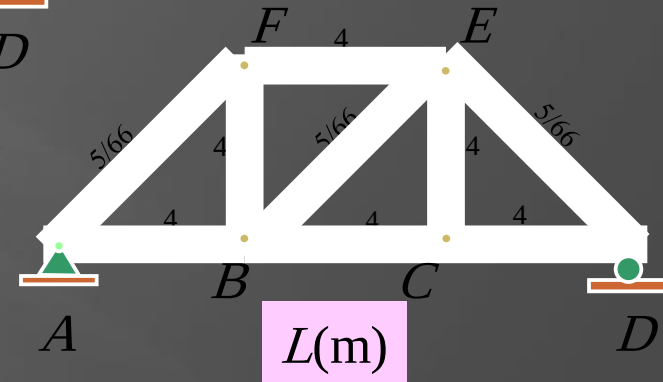
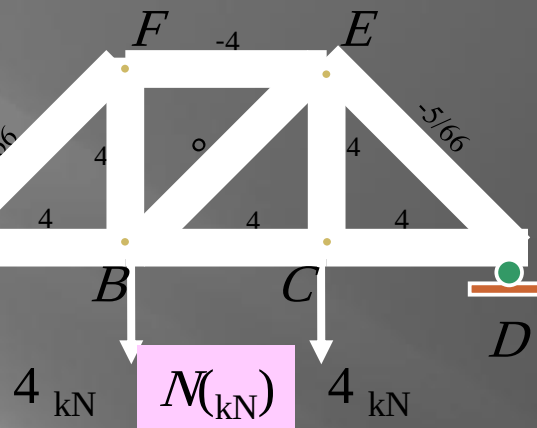
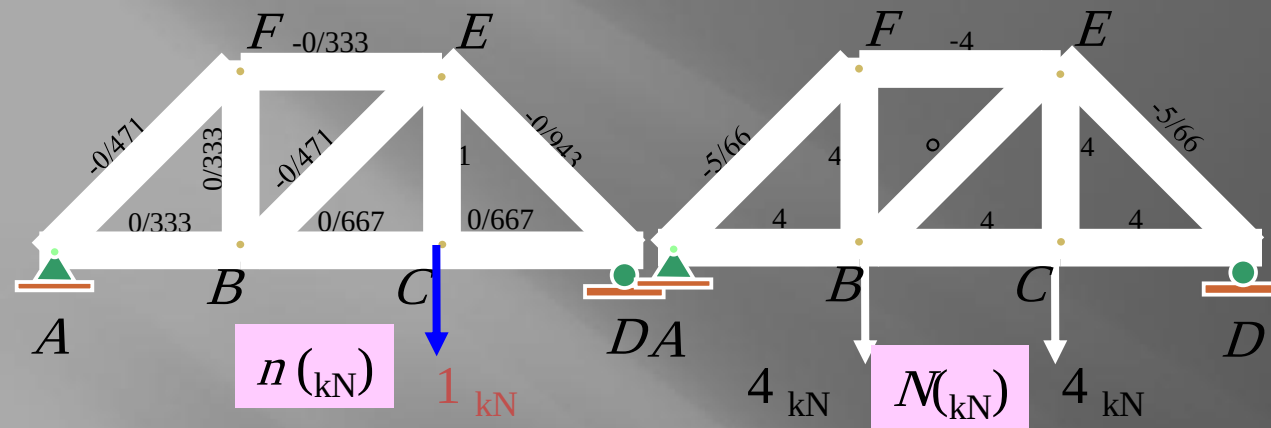


حل :

ابتدا بار مجازی واحد را در جهت جابجایی در مفصل مورد نظر اعمال می کنیم.

سپس بارهای واقعی را در اعمال می کنیم.





$$(1kN)(\Delta_{Cv}) = \sum \frac{nNL}{AE}$$

$$\Delta_{Cv} = \frac{1}{AE} [15.07 + 3(5.33) + 2(10.67) + 16 + 30.18] = \frac{72.4kN \bullet m}{(400 \times 10^{-6} m^2)(200 \times 10^6 \frac{kN}{m^2})}$$

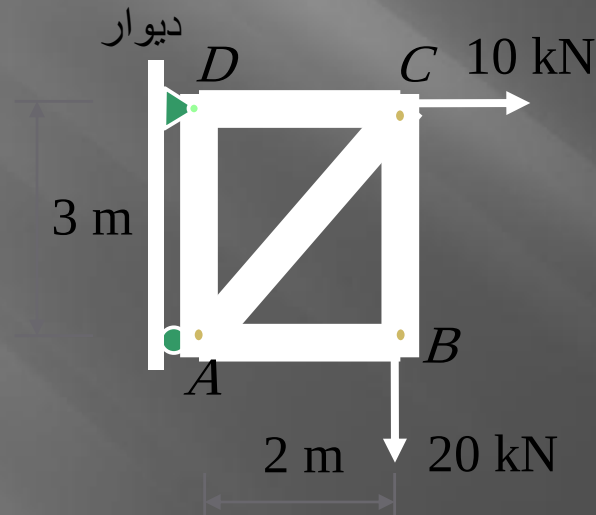
$$\Delta_{Cv} = 1.23 \text{ mm}, \downarrow$$

مثال :

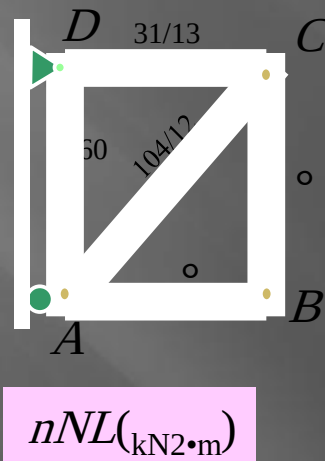
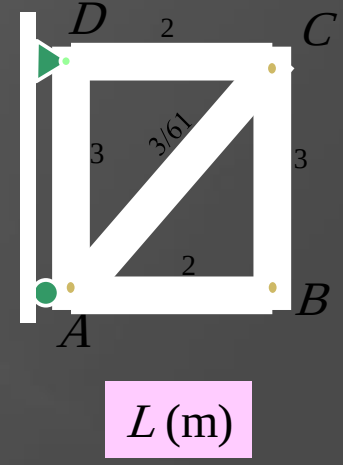
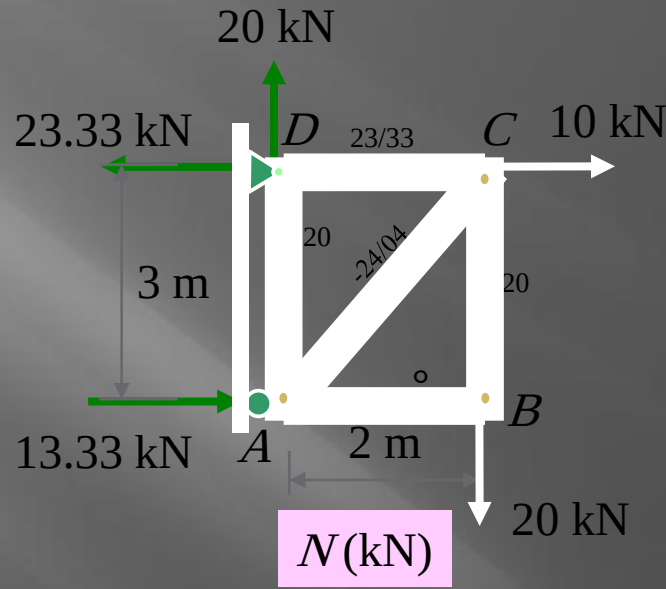
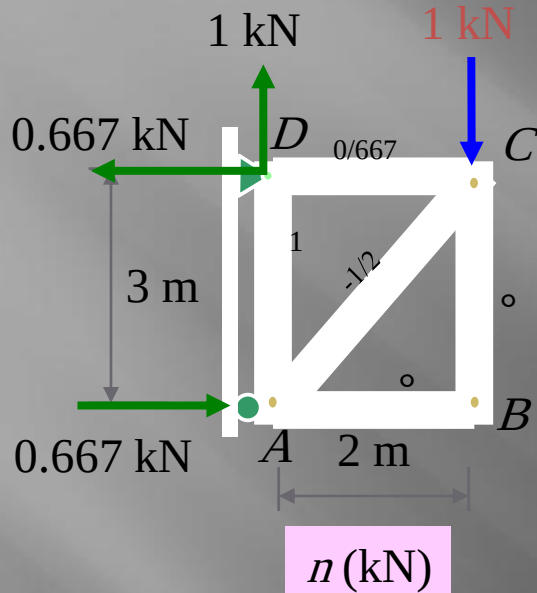
تغییر مکان عمودی مفصل C را در اثر بارهای وارد شده تعیین کنید.

$$E = 200 \text{ GPa} \cdot \alpha = 12(10^{-6}) \text{ و } A = 400 \text{ mm}^2$$

در عضو AD افزایش درجه حرارت $+60^\circ\text{C}$ عضو DC افزایش درجه حرارت $+40^\circ\text{C}$ و عضو AC کاهش درجه حرارت -20°C همچنین عضو DC دارای خطا در ساخت به میزان 2 mm کوتاهتر و عضو AC حدود 3 mm بلندتر ساخته شده است.



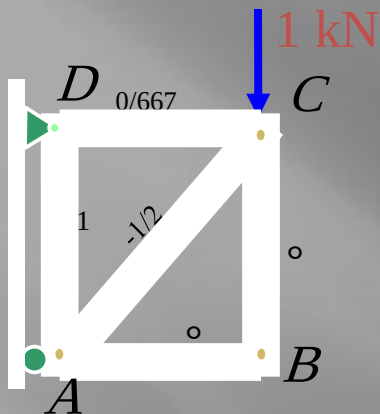
حل :



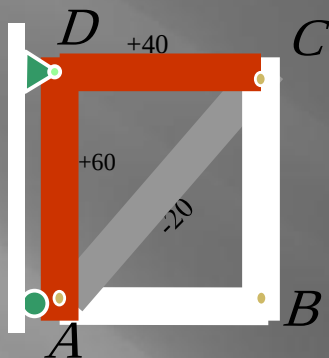
$$(1 \text{ kN})(\Delta_{Cv}) = \sum \frac{nNL}{AE}$$

$$\Delta_{Cv} = \frac{1}{(400)(200)} (60 + 31.13 + 104.12)$$

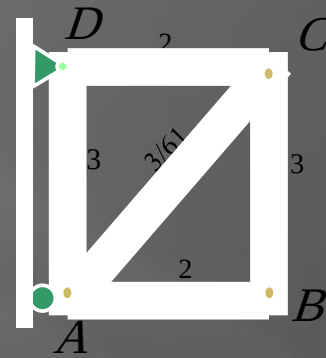
$$\Delta_{Cv} = 2.44 \text{ mm, } \downarrow$$



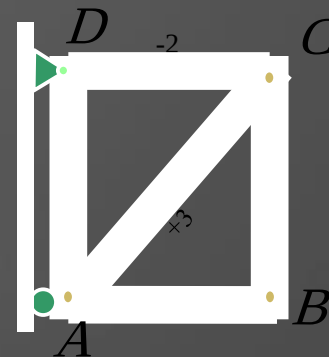
n (kN)



ΔT ($^{\circ}\text{C}$)



L (m)



خطای ساخت (mm)

تغییر دما

$$(1\text{kN})(\Delta_{Cv}) = \sum n\alpha(\Delta T)L$$

$$\Delta_{Cv} = (12 \times 10^{-6})[(1)(60)(3) + (0.667)(40)(2) + (-1.2)(-20)(3.61)] = 3.84 \text{ mm},$$

خطای ساخت

$$(1\text{kN})(\Delta_{Cv}) = \sum n(\Delta L)$$

$$\Delta_{Cv} = (0.667)(-0.002) + (-1.2)(0.003) = -4.93 \text{ mm},$$

مجموع تغییر مکانها

$$(\Delta_{Cv})_{\text{Total}} = 2.44 + 3.84 - 4.93 = 1.35 \text{ mm},$$

روش انرژی: تئوری کاستیگلیانو

در این روش با فرض پایستار بودن
سیستم، بامساوی قراردادن انرژی
کرنشی جذب شده توسط مجموع
المانها با کار خارجی تغییر مکان
متناظر با بار خارجی به دست می
آید لذا این روش زمانی قابل
استفاده است که به سازه فقط یک
بار منفرد اعمال شده باشد
و تغییر مکان متناظر با همان بار
مد نظر باشد.

□ قضیه اول کاستیگلیانو

“بیشتر از آنکه برای محاسبه تغییر مکان ها باشد روشی برای ذکر شرایط تعادل و برای تحلیل سازه های نا معین است و بیان میدارد:
مشتق اول انرژی تغییر شکل نسبت به هر مولفه دیگر تغییر شکل برابر است با نیروی موثر در آن نقطه و در راستای نظیر به همان مولفه تغییر مکان.”

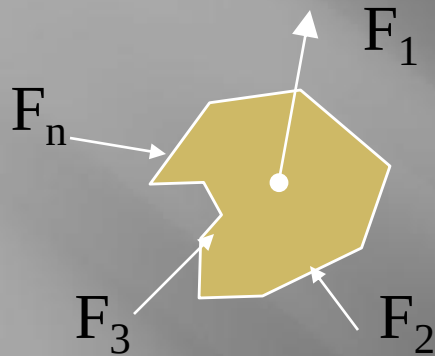
$$\Delta = \frac{\sigma U}{\sigma W}$$

قضیه دوم کاستیگلیانو

“در سازه های بار رفتار خطی مشتق جزئی انرژی کرنشی نسبت به هر مولفه نیرو برابر است با تغییر مکان نظیر آن نیرو”

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

نیرو و تغییر مکان مفهوم کلی دارند و شامل کوپل و دوران زاویه ای نیز میشوند. اگر درجه حرارت ثابت نباشد ویاتکیه گاهی نشست کند و جسم الاستیک فطی نباشد این قضایا صادق نخواهند بود.

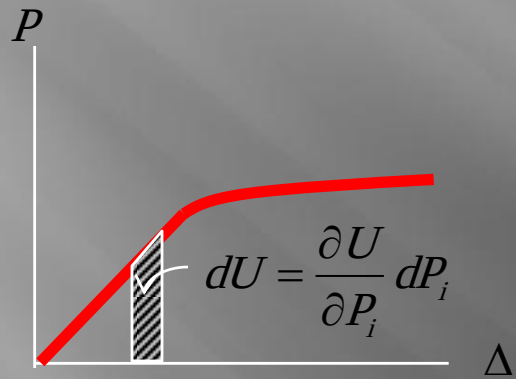
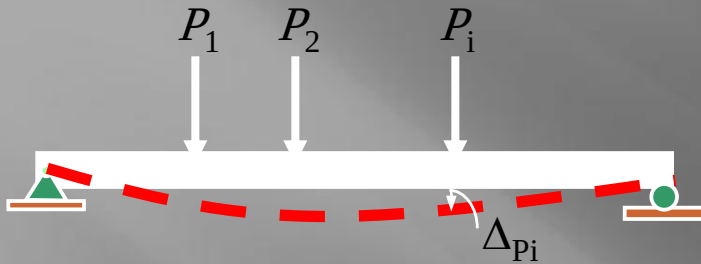


تصور کنید بر جسمی نیروهای $F_{i=1\dots n}$ ، مانند شکل اثر کنند.

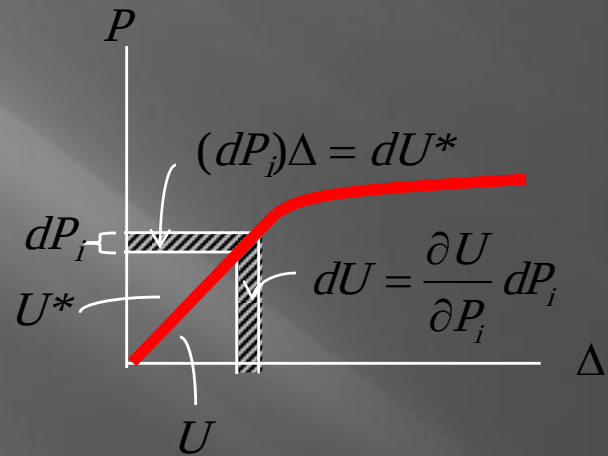
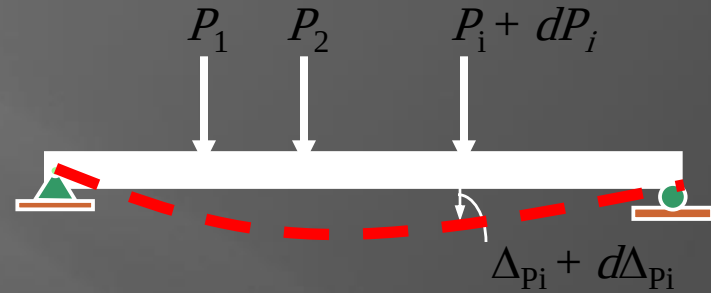
□ مجموع کار انجام شده روی جسم :

$$U = \frac{1}{2}F_1\Delta_1 + \frac{1}{2}F_2\Delta_2 + \frac{1}{2}F_3\Delta_3 + \dots + \frac{1}{2}F_n\Delta_n$$

Δ_i تغییر مکان متناظر با نیروی F_i



$$U_i = f(P_1, P_2, \dots, P_n)$$



$$U = U^*$$

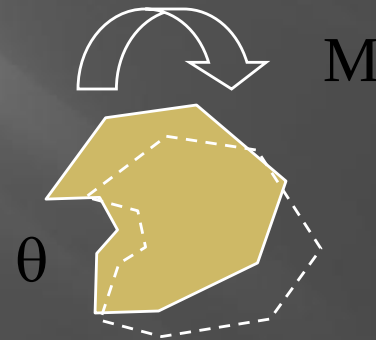
$$dU = dU^*$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i = (dP_i) \Delta_{Pi}$$

$$\Delta_{Pi} = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

□ مقدار θ در جسم باتوجه به لنگر را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\theta_n = \frac{\partial U}{\partial M_n}$$



تغییر مکان:

نیروی محوری

$$\Delta_{Pi} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\int \frac{N^2}{2AE} dx \right) = \int \underbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial P_i} \right)}_{n_{\Delta}} \frac{N}{AE} dx$$

خمش

$$\Delta_{Pi} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\int \frac{M^2}{2EI} dx \right) = \int \underbrace{\left(\frac{\partial M}{\partial P_i} \right)}_{m_{\Delta}} \frac{M}{EI} dx$$

برش

$$\Delta_{Pi} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\int \frac{KV^2}{2GA} dx \right) = \int \underbrace{K \left(\frac{\partial V}{\partial P_i} \right)}_{V_{\Delta}} \frac{V}{GA} dx$$

تغییر مکان گره بیرون خریا Δ

نیروی خارجی وارد به تیر و قاب در امتداد $P = \Delta$

نیروی داخلی اعضا که در اثر بارها خارجی در اعضا ایجاد شده است $N =$

گشتاور داخلی در تیر یا قاب $M =$

لنگر (برش) داخلی در تیر یا قاب $V =$

شیب :

$$\theta_{Mi} = \frac{\partial U}{\partial M_i}$$

خمش

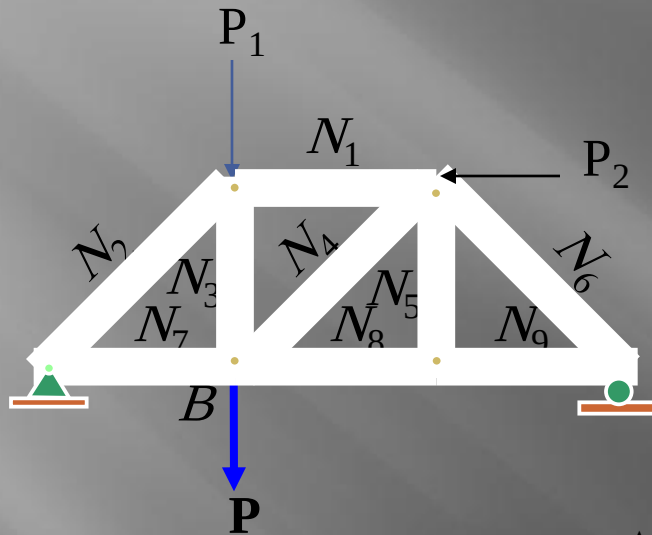
$$\theta_{Mi} = \frac{\partial}{\partial M_i} \left(\int \frac{M^2}{2EI} dx \right) = \int \underbrace{\left(\frac{\partial M}{\partial M_i} \right)}_{M_\theta} \frac{M}{EI} dx$$

θ = شیب خارجی تیر یا قاب

$M_i = \theta$ = لنگر خارجی وارد به تیر و قاب در امتداد

M = گشتاور داخلی در تیر یا قاب

تئوری کاستیلیانو : خریا



$$\Delta = \sum \left(\frac{\partial N_i}{\partial P} \right) \frac{N_i}{AE} L_i$$

Δ = تغییر مکان گره بیرون خریا

P = نیروی خارجی وارد به تیر و قاب در امتداد Δ

N = نیروی داخلی اعضا که در اثر بارها خارجی در اعضا ایجاد شده است

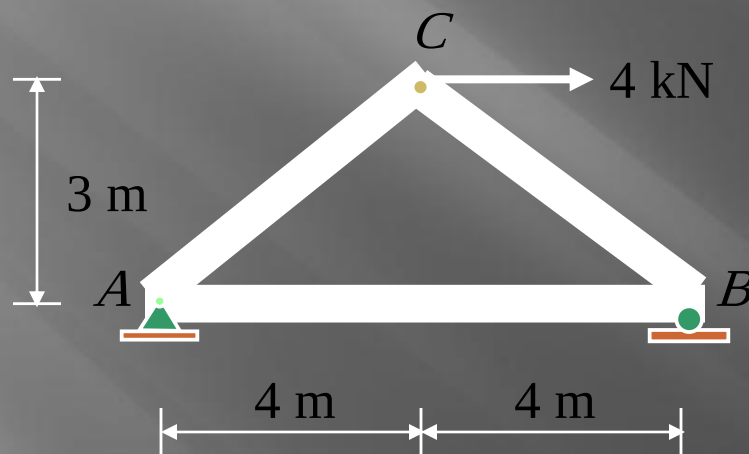
L = طول اعضا

A = سطح مقطع عرضی اعضا

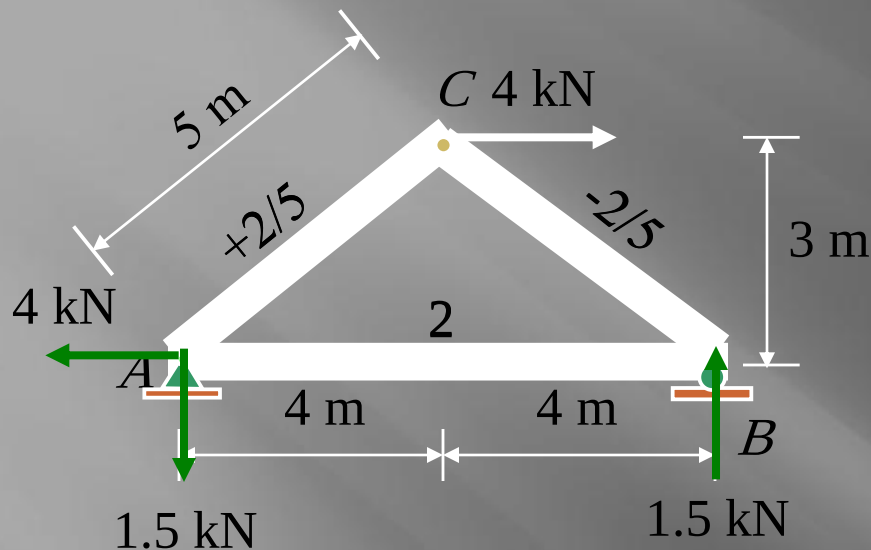
E = مدول الاستیسیته اعضا

مثال :

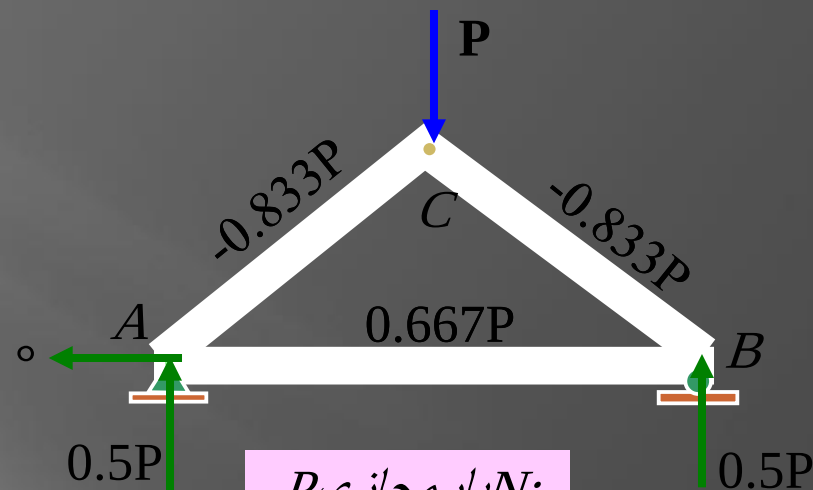
تغییر مکان عمودی رادر نقطه C از خریای فولادی شکل زیر راتعیین کنید.
سطح مقطع عرضی اعضا: $A = 400 \text{ mm}^2$ و $E = 200 \text{ GPa}$



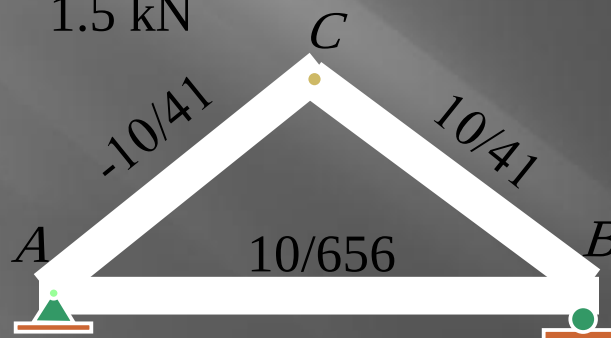
حل:



N : بار واقعی



N : بار مجازی P



$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$

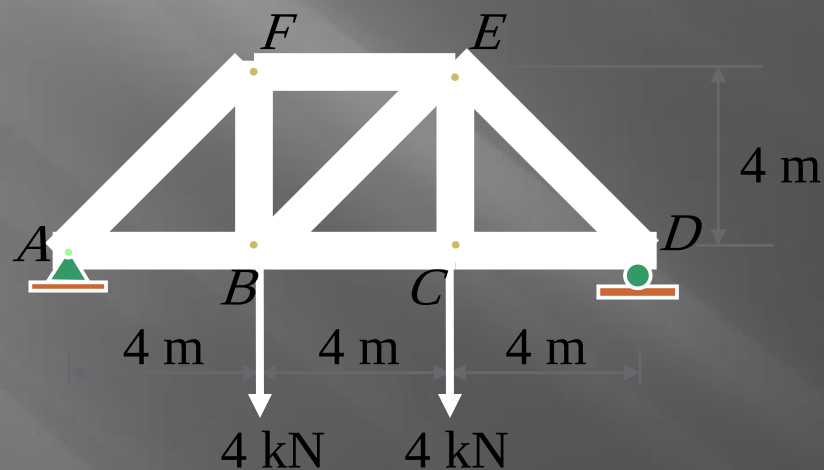
$$\Delta_{Cv} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}$$

$$\Delta_{Cv} = \frac{1}{AE}(-10.41 + 10.41 + 10.67) = \frac{10.67 \text{ kN.m}}{(400 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2})}$$

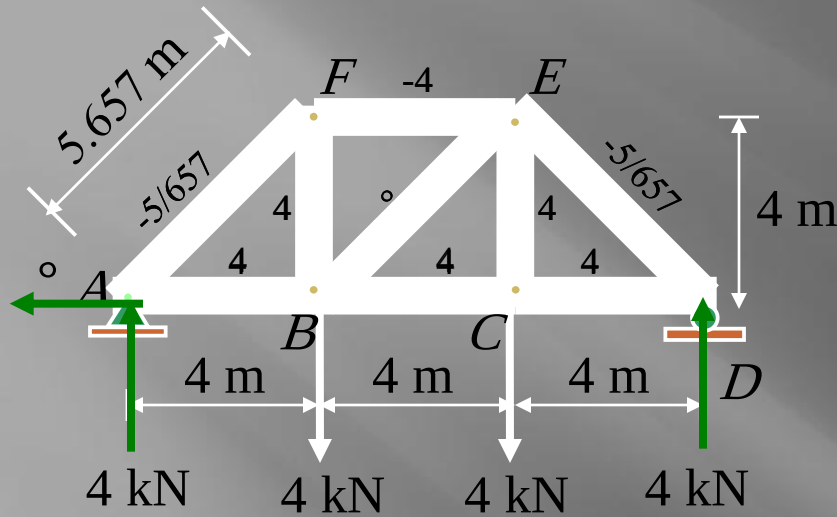
$$\Delta_{Cv} = 0.133 \text{ mm}, \downarrow$$

مثال :

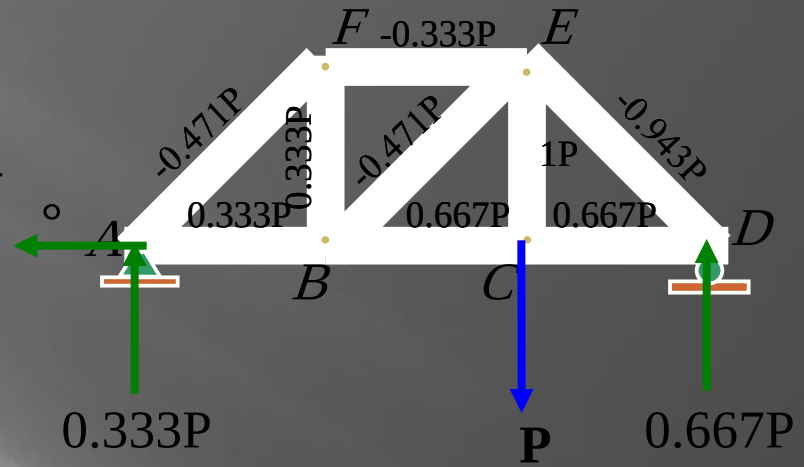
تغییر مکان عمودی رادر نقطه C از خرپای فولادی شکل زیر را تعیین کنید.
سطح مقطع عرضی اعضا: $A = 400 \text{ mm}^2$ و $E = 200 \text{ GPa}$



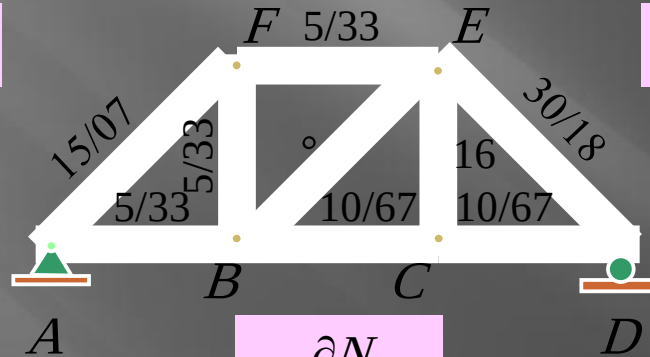
حل:



N : بار واقعی



N : بار مجازی P



$$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$$

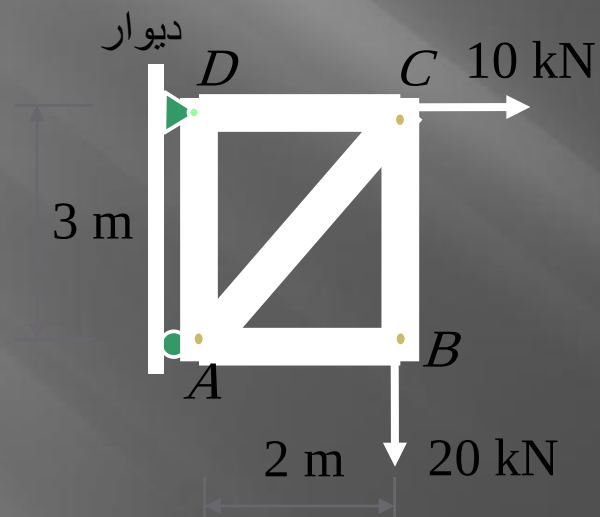
$$\Delta_{Cv} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}$$

$$\Delta_{Cv} = \frac{1}{AE} [15.07 + 3(5.33) + 2(10.67) + 16 + 30.18] = \frac{72.4 \text{ kN.m}}{(400 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2})}$$

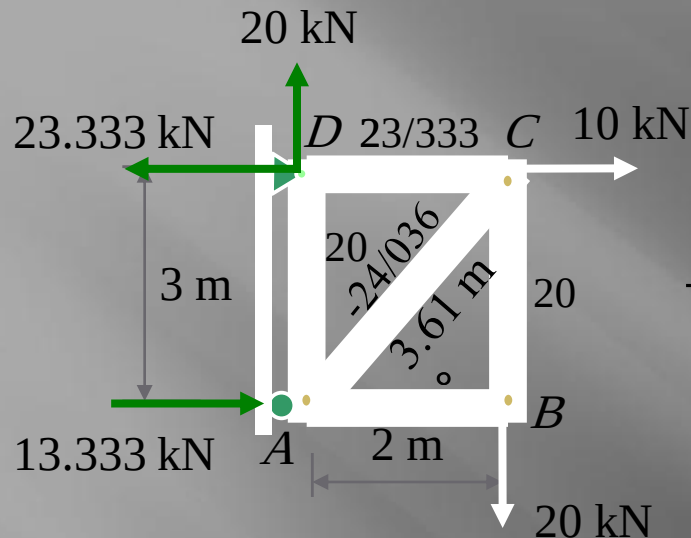
$$\Delta_{Cv} = 1.23 \text{ mm}, \downarrow$$

مثال :

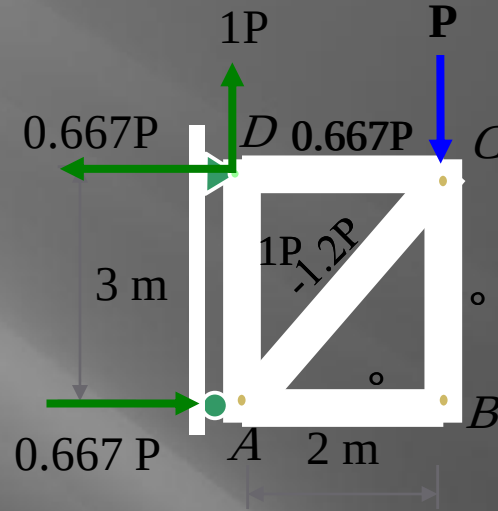
تغییر مکان عمودی را در نقطه C از خرابای فولادی شکل زیر را تعیین کنید.
سطح مقطع عرضی اعضا: $A = 400 \text{ mm}^2$ و $E = 200 \text{ GPa}$



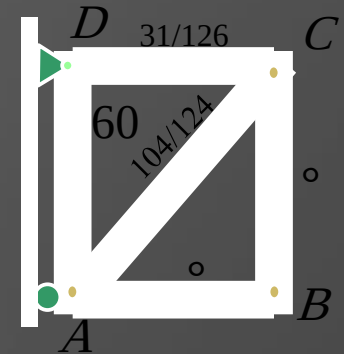
حل :



N : بار واقعی



N : بار مجازی P



$$N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L$$

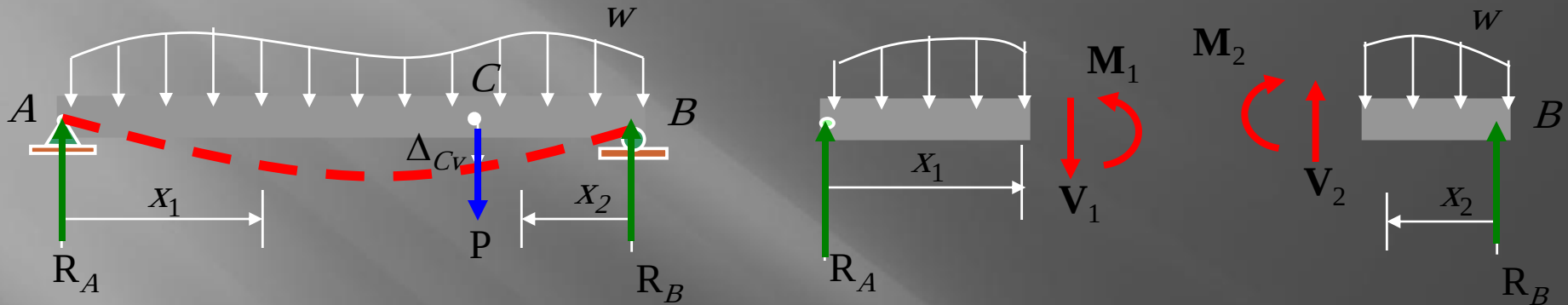
$$\Delta_{Cv} = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE}$$

$$\Delta_{Cv} = \frac{1}{AE} (60 + 31.13 + 104.12) = \frac{195.25 \text{ kN.m}}{(400 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2})}$$

$$\Delta_{Cv} = 2.44 \text{ mm}, \downarrow$$

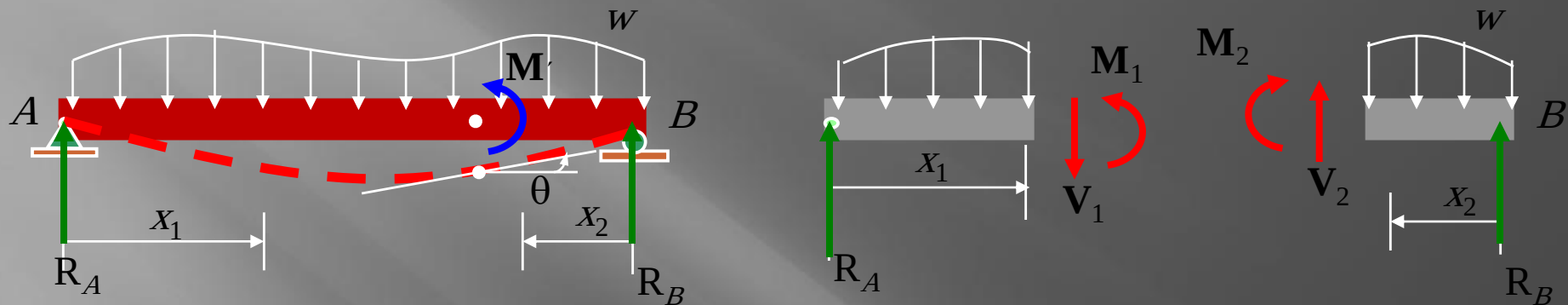
تئوری کاستیلیانو: تیرها و قابها

تغییر مکان



$$\Delta = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx$$

تغییر مکان بیرونی بوسیله بارهای خارجی روی تیر و قاب Δ =
 نیروی خارجی وارد به تیر و قاب در امتداد $P = \Delta$
 گشتاور داخلی در تیر یا قاب $M =$



$$\theta = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{M}{EI} dx$$

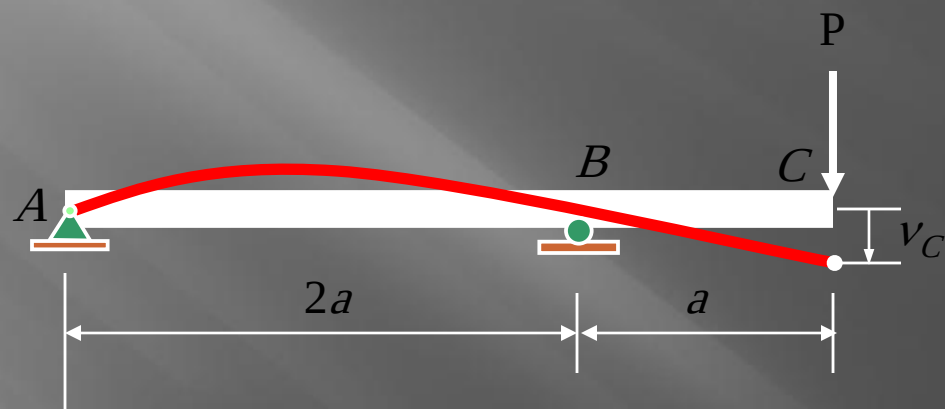
تغیر مکان بیرونی بوسیله بارهای خارجی روی تیر و قاب Δ

لنگر خارجی وارده تیر و قاب در امتداد $M' = \Theta$

لنگر داخلی در تیر یا قاب $M =$

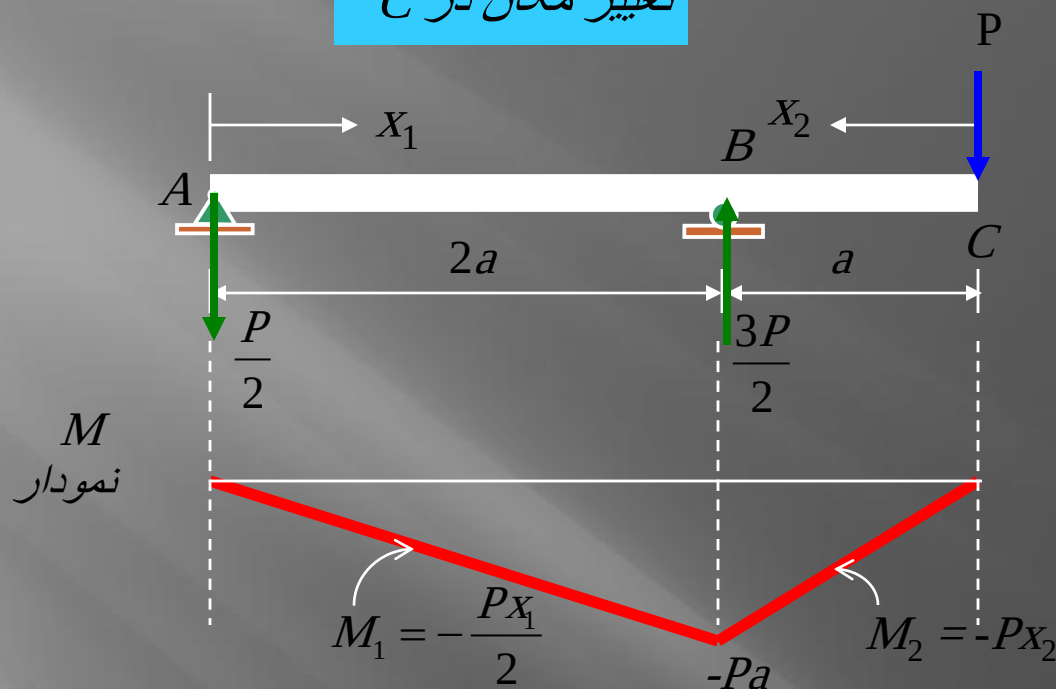
مثال :

در تیر شکل زیر باتوجه به مکان بارگذاری شیب و تغییر مکان را در نقطه C تعیین کنید (EI ثابت).



تغییر مکان در C

حل:

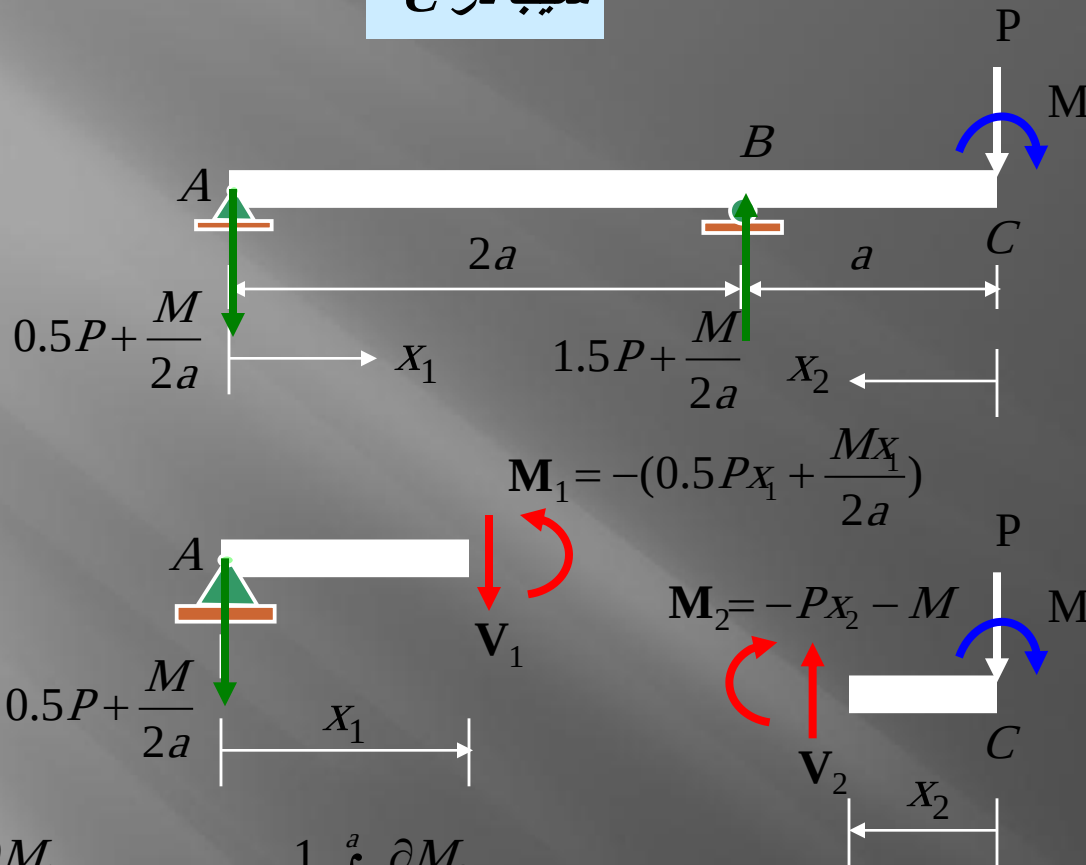


$$\Delta_{Cv} = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \left(\frac{\partial M_1}{\partial P} \right) (M_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a \left(\frac{\partial M_2}{\partial P} \right) (M_2) dx_2$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \left(-\frac{x_1}{2} \right) \left(-\frac{Px_1}{2} \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a (-x_2) (-Px_2) dx_2$$

$$\Delta_{Cv} = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4} \right) \left(\frac{x_1^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} + \frac{1}{EI} (P) \left(\frac{x_2^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{Pa^3}{EI}, \quad \downarrow$$

شیب در C



$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \left(\frac{\partial M_1}{\partial M} \right) (M_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a \left(\frac{\partial M_2}{\partial M} \right) (M_2) dx_2$$

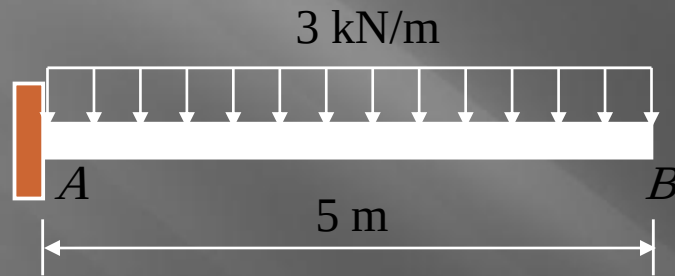
$$= \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \left(-\frac{x_1}{2a} \right) \left(-0.5Px_1 - \frac{Mx_1}{2a} \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a (-1) (-Px_2 - M) dx_2$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4} \right) \left(\frac{x_1^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} + \frac{1}{EI} (P) \left(\frac{x_2^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{2Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2}{2EI} = \frac{7Pa^3}{6EI}, \quad \curvearrowright$$

مثال :

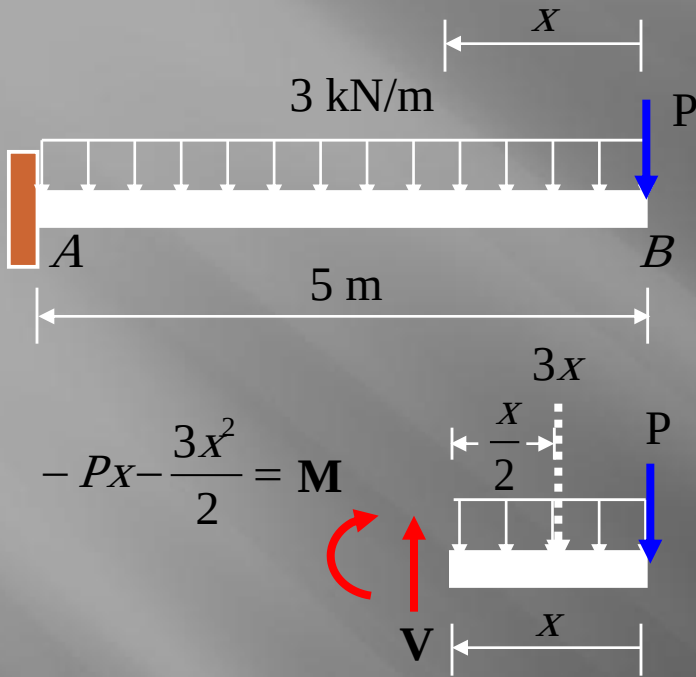
شیب و تغییر مکان را در نقطه B از تیر فولادی شکل زیر بدست بیاورید.

$$E = 200 \text{ Gpa}, I = 250 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



تغییر مکان در B

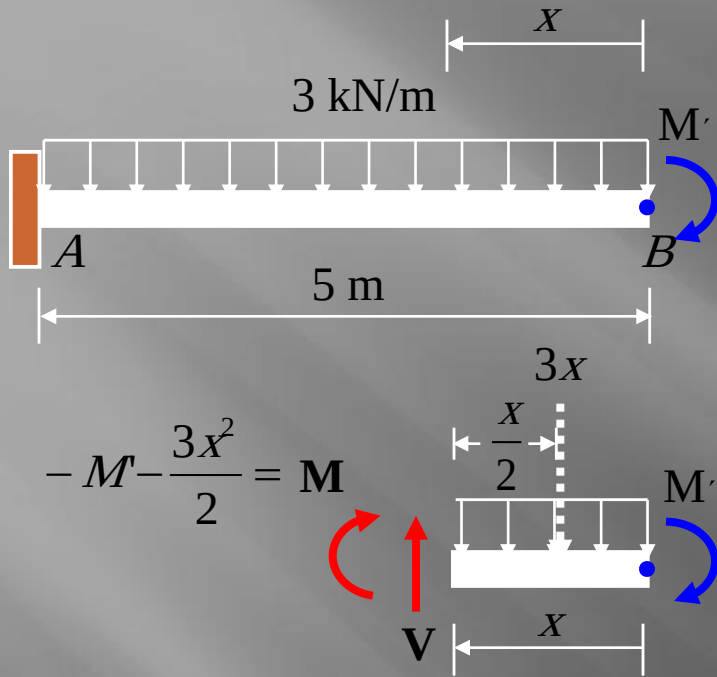
حل:



$$\begin{aligned}
 (\Delta_B) &= \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^5 (-x) \left(-Px - \frac{3x^2}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^5 \frac{3x^3}{2} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{3x^4}{8} \right) \Big|_0^5 \\
 &= \frac{234.375 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI} \\
 &= \frac{234.375 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}})(250 \times 10^{-6} \text{m}^4)}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_B = 0.00469 \text{ m} = 4.69 \text{ mm}, \quad \downarrow$$

شیب در B



منحنی تغییر شکل



$$\begin{aligned}
 \theta_B &= \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{M}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^5 (-1) \left(-M' - \frac{3x^2}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^5 \frac{3x^2}{2} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{3x^3}{6} \Big|_0^5 \right) \\
 &= \frac{62.5 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI} \\
 &= \frac{62.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{(200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}})(250 \times 10^{-6} \text{m}^4)}
 \end{aligned}$$

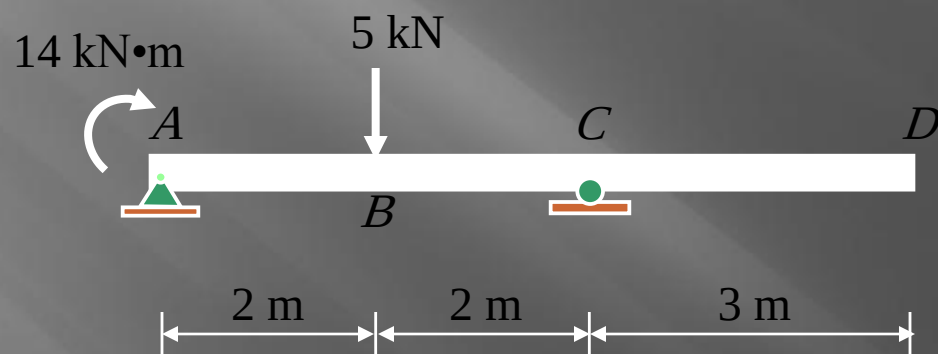
$$\theta_B = 0.00125 \text{ rad},$$



مثال :

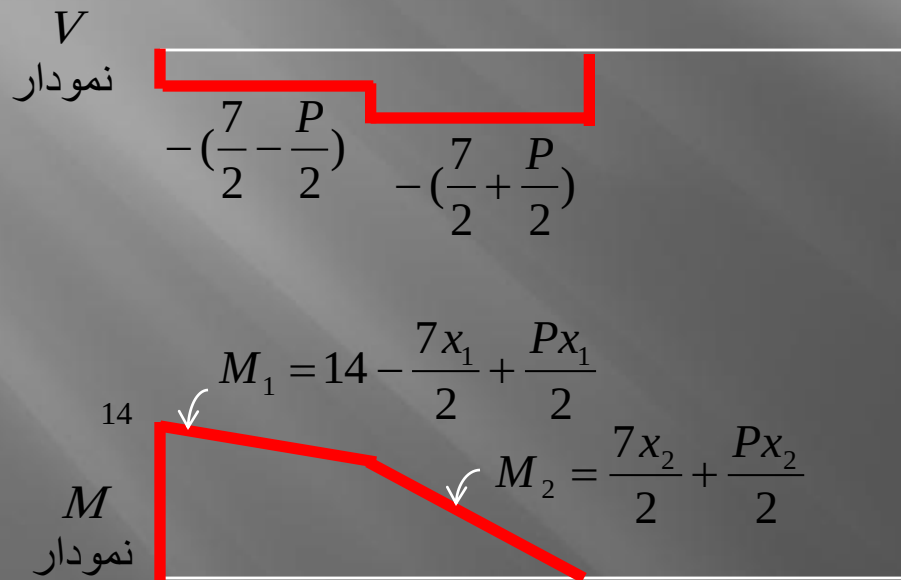
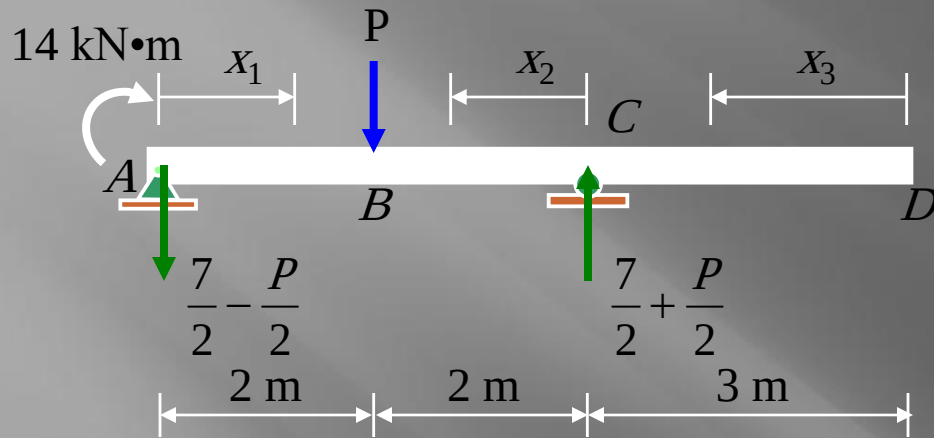
شیب و تغییر مکان را در نقطه B از تیر فولادی شکل زیر بدست بیاورید.

$$E = 200 \text{ Gpa}, I = 60 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



تغییر مکان در B

حل:

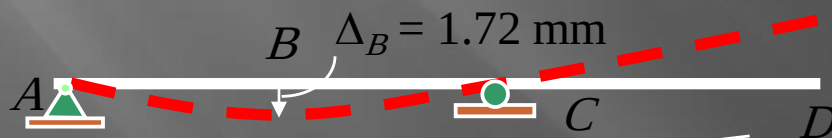
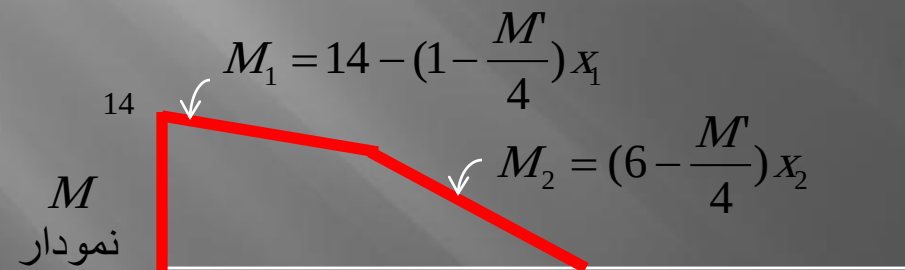
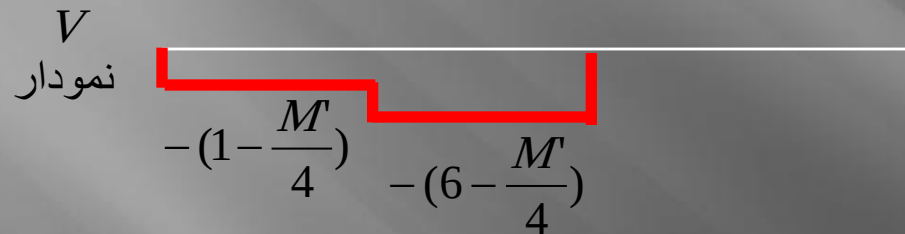
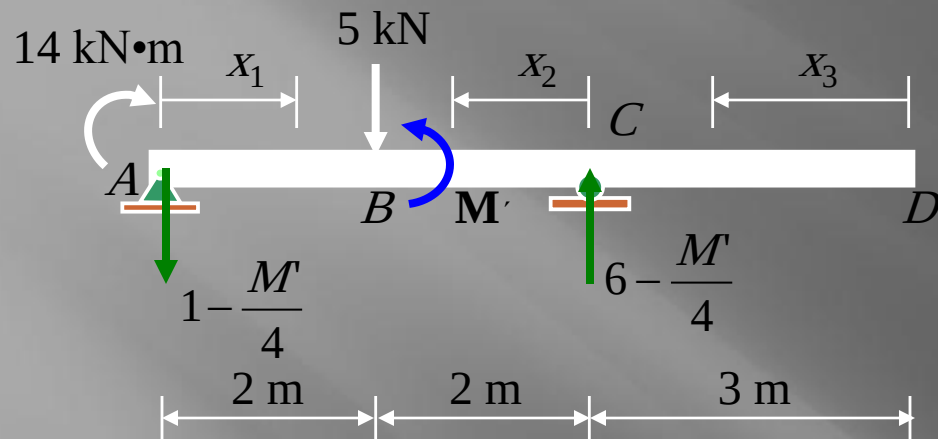


$$\begin{aligned}
 (\Delta_B) &= \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{x_1}{2} \right) \left(14 - \frac{7x_1}{2} + \frac{x_1 P}{2} \right) dx_1 \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{x_2}{2} \right) \left(\frac{7x_2}{2} + \frac{Px_2}{2} \right) dx_2 \\
 &\quad + \int_0^3 (0)(0) dx_3 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (7x_1 - 0.5x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (3x_2^2) dx_2 \\
 &= \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{7x_1^2}{2} - \frac{0.5x_1^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{3x_2^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{20.667}{EI} = \frac{20.667}{(200)(60)}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_B = 0.00172 \text{ m} = 1.72 \text{ mm}, \downarrow$$

حل :

شیب در B



$$\begin{aligned}
 \theta_B &= \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{M}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{x_1}{4} \right) \left(14 - x_1 + \frac{M'}{4} \right) dx_1 \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{x_2}{4} \right) \left(6x_2 - \frac{M'x_2}{4} \right) dx_2 \\
 &\quad + \int_0^3 (0)(0) dx_3 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (3.5x_1 - 0.25x_1^2) dx_1 \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-1.5x_2^2) dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{3.5x_1^2}{2} - \frac{0.25x_1^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1.5x_2^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{2.333}{EI} = \frac{2.333}{(200)(60)}
 \end{aligned}$$

$$\theta_B = 0.000194 \text{ rad,}$$

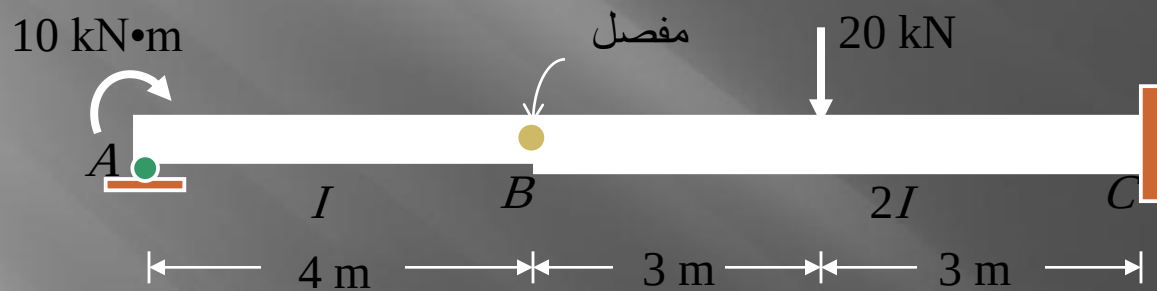


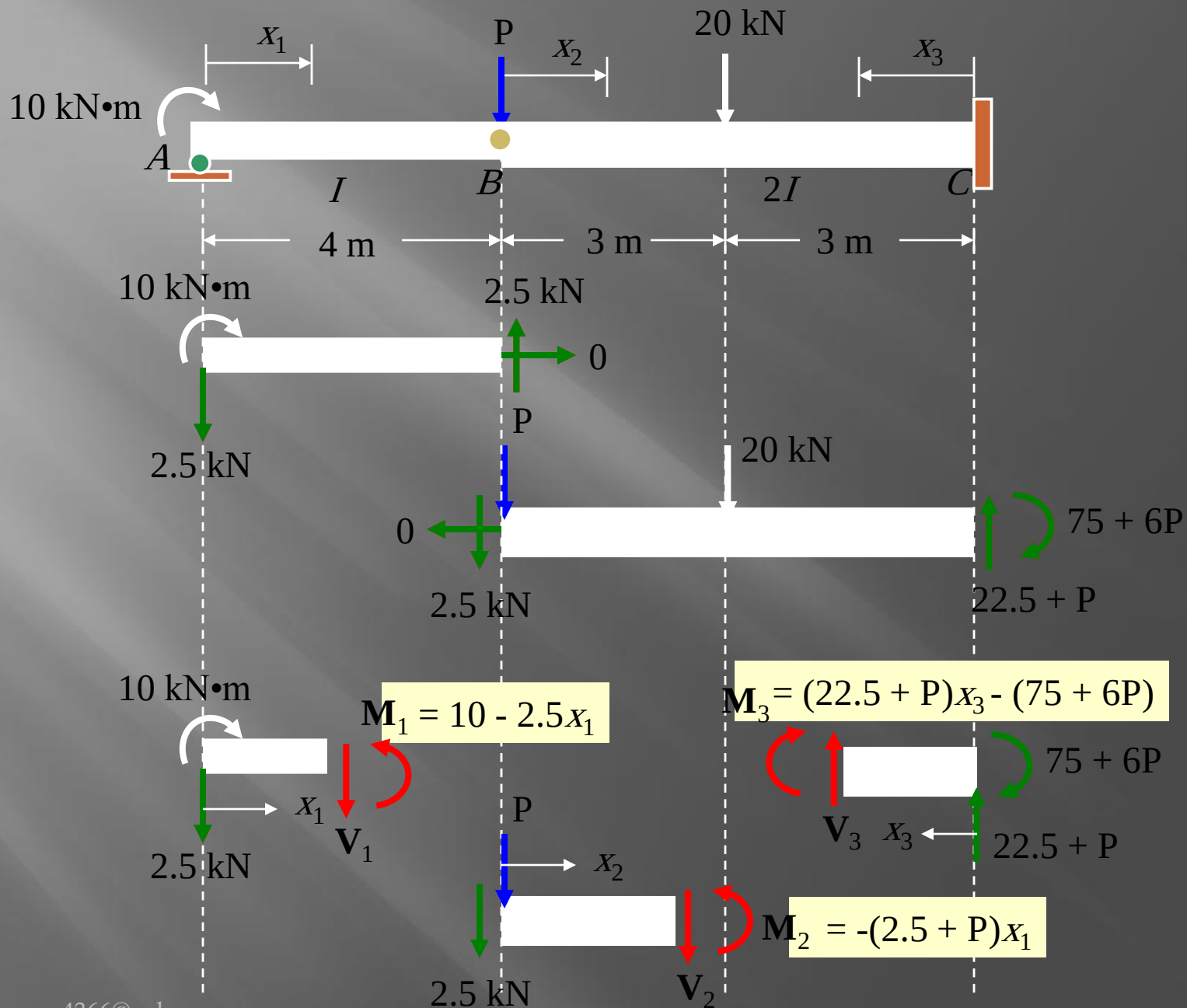
$$\theta_B = 0.000194 \text{ rad}$$

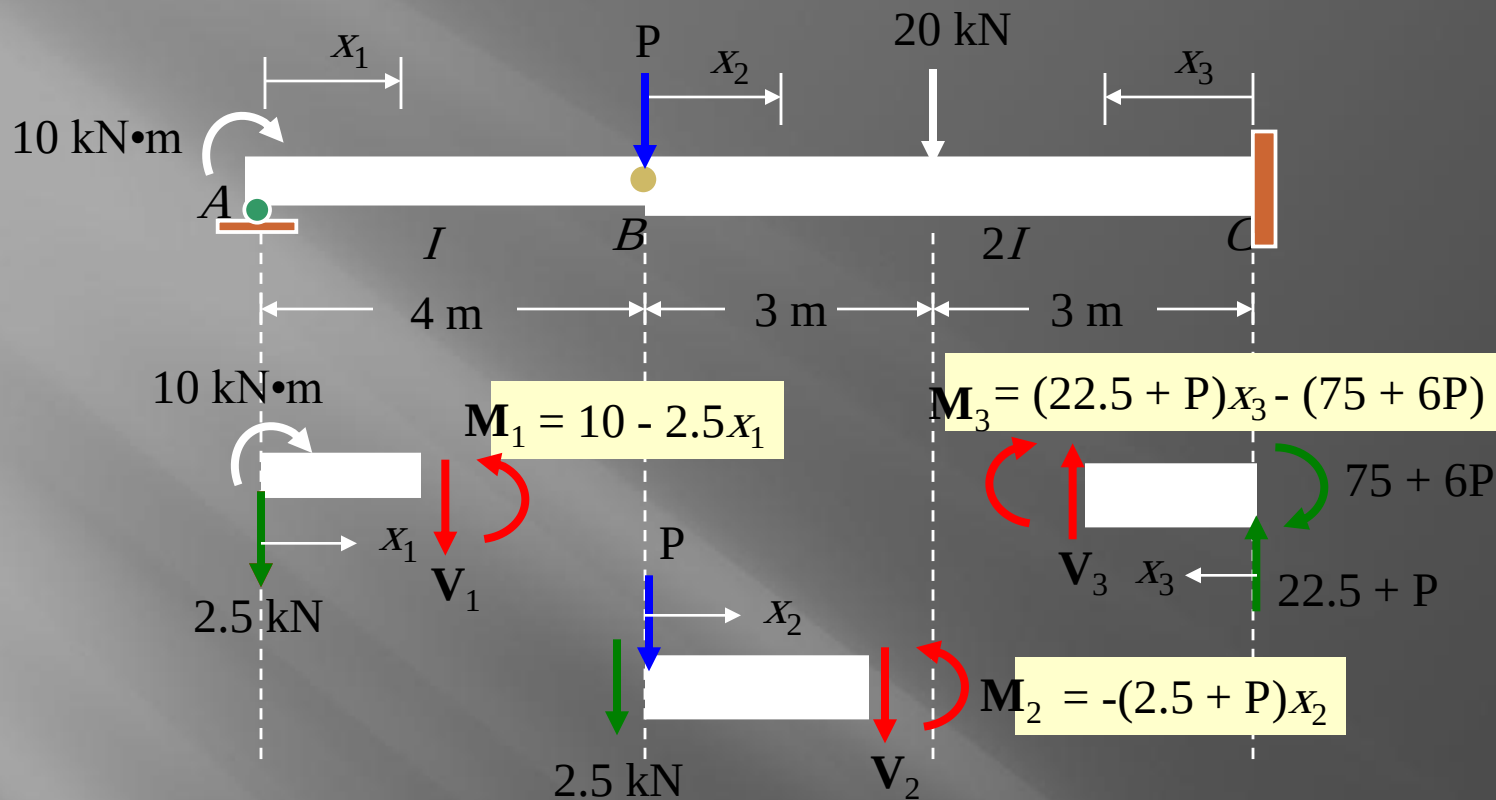
مثال :

تغییر مکان رادر نقطه B از تیر فولادی در شکل زیر تعیین کنید.

$$E = 200 \text{ GPa}, I = 200 \times 10^6 \text{ mm}^4$$





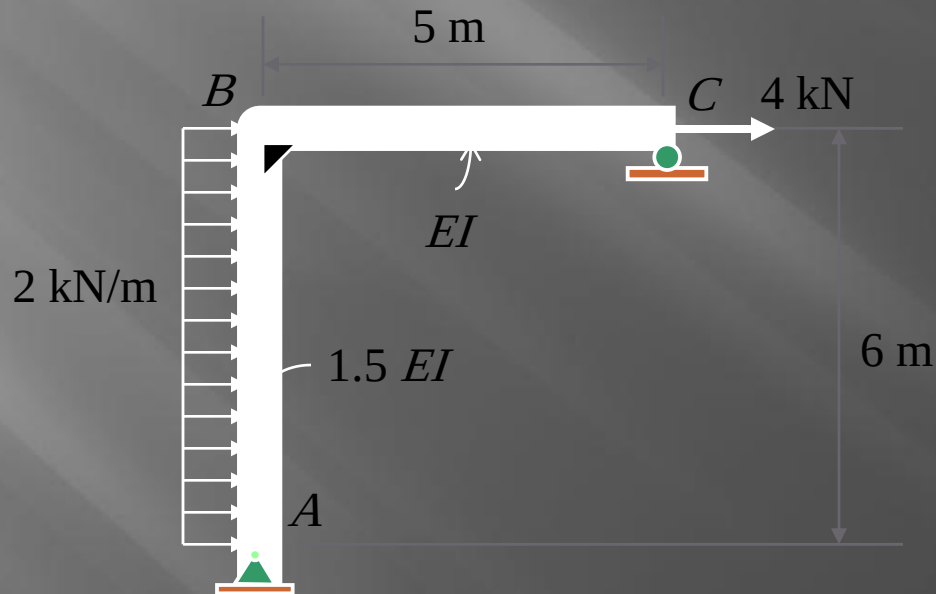


$$\begin{aligned}
 \Delta_B &= \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^4 (0)(10 - 2.5x_1) dx_1 + \frac{1}{2EI} \int_0^3 (-x_2)(-2.5x_2 - x_2 P) dx_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2EI} \int_0^3 (x_3 - 6)(22.5x_3 + x_3 P - 75 - 6P) dx_3 \\
 &= 0 + \frac{1}{2EI} \int_0^3 (2.5x_2^2) dx_2 + \frac{1}{2EI} \int_0^3 (22.5x_3^2 - 210x_3 + 450) dx_3 \\
 \Delta_B &= \frac{11.25}{EI} + \frac{303.75}{EI} = \frac{315}{EI} = \frac{315}{(200)(200)} = 7.875 \text{ mm, } \downarrow
 \end{aligned}$$

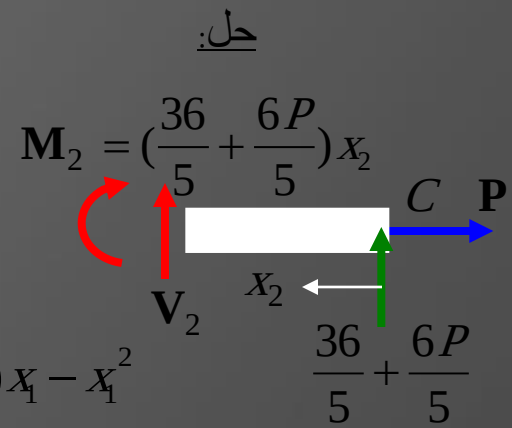
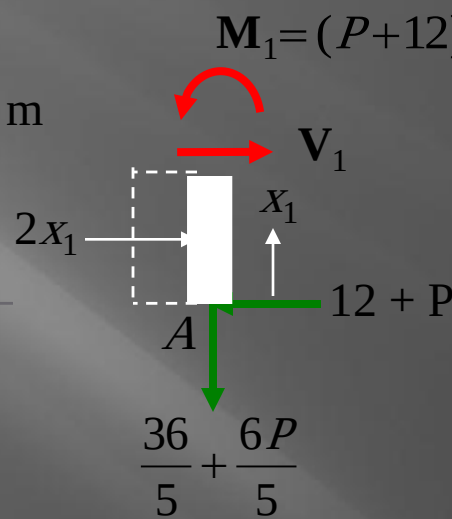
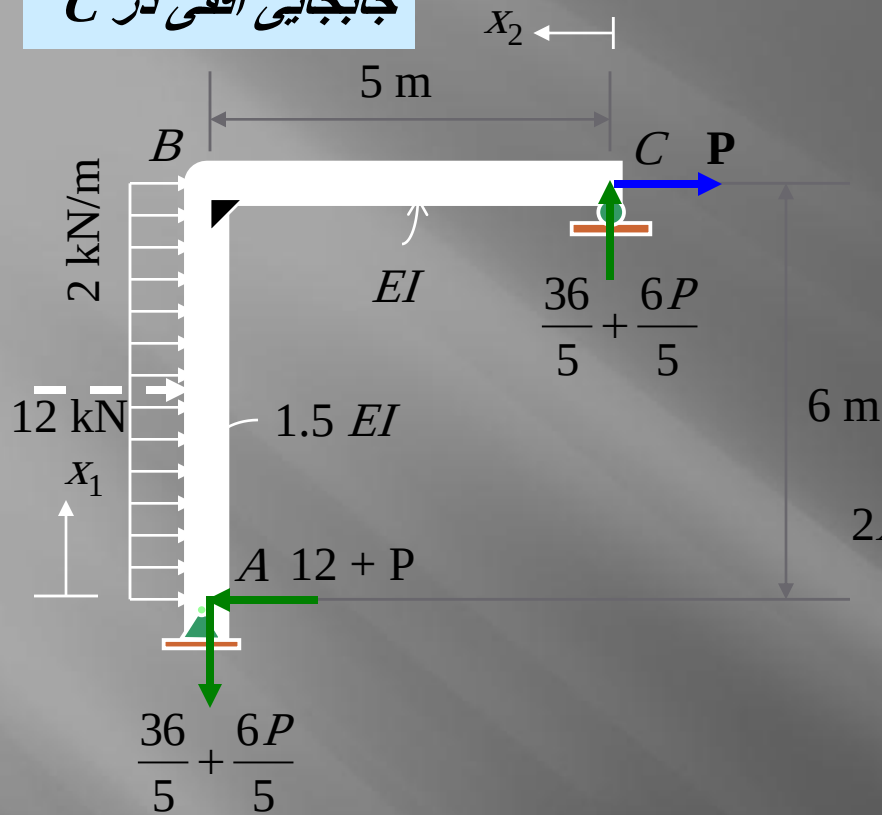
مثال :

شیب و تغییر مکان افقی را در نقطه C از قاب شکل زیر تعیین کنید

$$.(E = 200 \text{ Gpa} , I = 200 \times 10^6 \text{ mm}^4)$$



جابجایی افقی در C

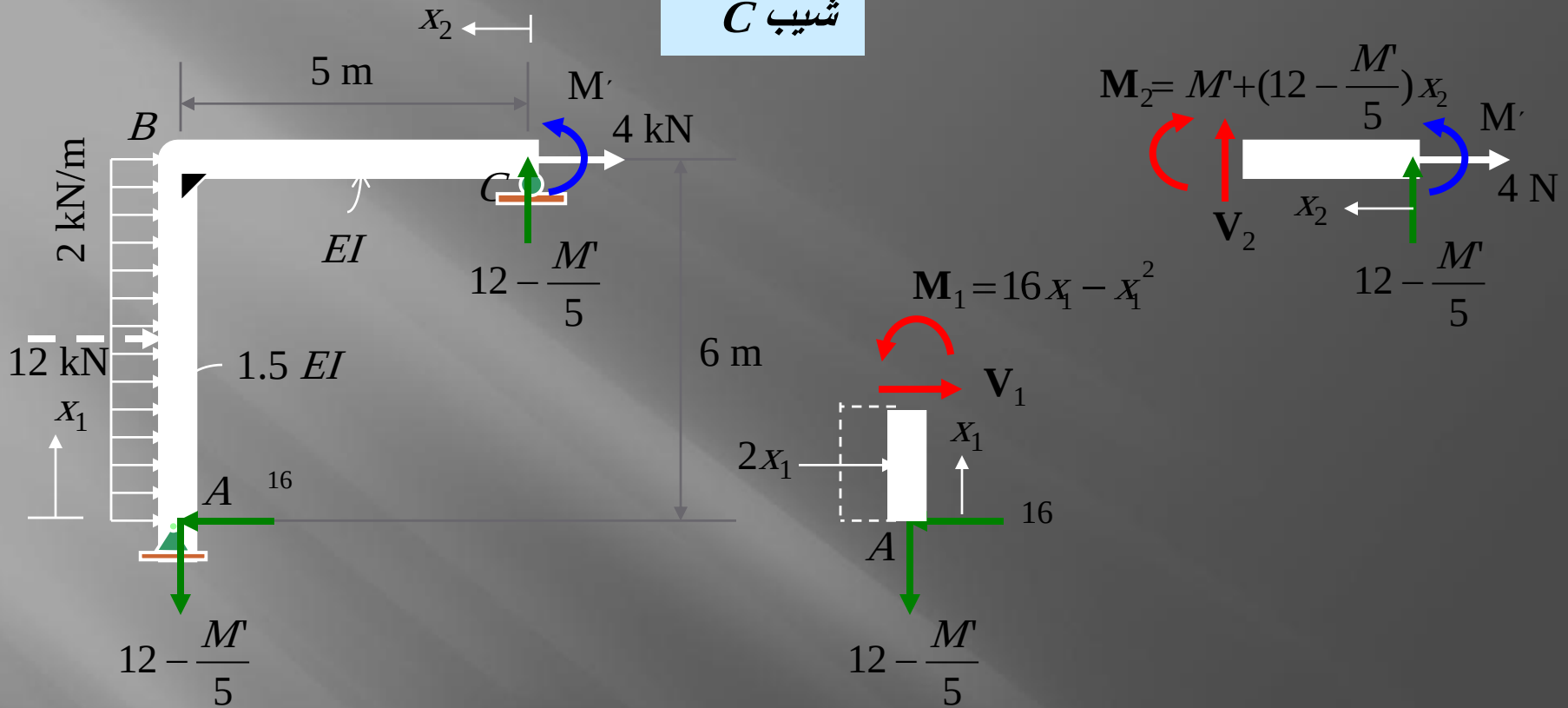


$$\Delta_{CH} = \int_0^L \left(\frac{\partial M_i}{\partial P} \right) \frac{M_i}{EI} dx = \frac{1}{1.5EI} \int_0^6 (x_1) (x_1 P + 12x_1 - x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(\frac{6x_2}{5} \right) \left(\frac{36x_2}{5} + \frac{6Px_2}{5} \right) dx_2$$

$$= \frac{1}{1.5EI} \int_0^6 (16x_1^2 - x_1^3) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (14.4x_2^2) dx_2$$

$$\Delta_{CH} = \frac{1}{1.5EI} \left(\frac{16x_1^3}{3} - \frac{x_1^4}{4} \right) \Big|_0^6 + \frac{1}{EI} \left(\frac{14.4x_2^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \frac{552}{EI} + \frac{600}{EI} = \frac{1152}{(200)(200)} = +28.8 \text{ mm}, \rightarrow$$

شيب C



$$\theta_C = \int_0^L \left(\frac{\partial M_i}{\partial M'} \right) \frac{M_i}{EI} dx = \frac{1}{1.5EI} \int_0^6 (0)(16x_1 - x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(1 - \frac{x_2}{5} \right) \left(M' + 12x_2 - \frac{M'x_2}{5} \right) dx_2$$

$$= 0 + \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(12x_2 - \frac{12x_2^2}{5} \right) dx_2$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left(\frac{12x_2^2}{2} - \frac{12x_2^3}{5 \times 3} \right) \Big|_0^5 = \frac{50}{EI} = \frac{50}{(200)(200)} = +0.00125 \text{ rad}, \quad \triangle$$

موفق باشید

شبکه آموزشی - پژوهشی مادیج
با هدف بهبود پیشرفت علمی
و دسترسی راحت به اطلاعات
برای جامعه بزرگ علمی ایران
ایجاد شده است



madsg.com
مادیج

**IRan Education & Research NETwork
(IRERNET)**

