پاسخ تشریحی توسط: استاد امیر انصاری

31. گزینه 3 درست است.

سوال مربوط به درس آمار است.

32. گزینه 3 درست است.

سوال مربوط به درس آمار است.

33. گزینه 2 درست است.

$$w = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

$$3e^{4t} = \begin{vmatrix} e^{2t} & g(t) \\ 2e^{2t} & g'(t) \end{vmatrix} \Rightarrow 3e^{4t} = 2^{2t} g'(t) - 2e^{2t} g(t)$$

$$\xrightarrow{\div e^{2t}} g'(t) - 2g(t) = 3e^{2t}$$

معادله حاصل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی است.

$$g(t) = e^{-\int p(t)dt}\left\{\int Q(t)e^{\int p(t)dt}dt + c\right\}$$

$$g(t) = e^{-\int -2dt}\left\{\int 3e^{2t} \times e^{\int -2dt}dt + c\right\}$$

$$g(t) = e^{2t}\left\{\int 3e^{2t} \times e^{-2t}dt + c\right\}$$

$$g(t) = e^{2t}\left(\int 3dt + c\right) \Rightarrow g(t) = (3t + c)e^{2t}$$

34. گزینه 1 درست است.

اگر در معادله دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ یک پایه جواب y_1 باشد پایه جواب دیگر به فرم $y_2 = uy_1$ خواهد بود که u از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$u=\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx$$

$$xy''-(x+n)y'+ny=0$$

با در نظر گرفتن $n=1$ و استاندارد کردن معادله داریم:

$$y''-\left(1+\frac{1}{x}\right)y'+\frac{1}{x}y=0 \quad ; \quad y_1=e^x$$

$$u=\int \frac{1}{\left(e^x\right)^2}e^{-\int -\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}dx=\int \frac{1}{e^{2x}}e^{x+\ln x}dx$$

$$u=\int \frac{1}{e^{2x}}e^x\times e^{\ln x}dx=\int xe^{-x}dx$$

مشتق		انتگرال
x	$+$	e^{-x}
1	$-$	$-e^{-x}$
0		e^{-x}

$$u=-xe^{-x}-e^x \Rightarrow y_2=uy_1 \Rightarrow y_2=\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)e^x$$

$$y_2=-x-1=-(x+1)$$

در نتیجه می‌توان پایه جواب دوم را $y_2=x+1$ معرفی کرد، لذا گزینه‌ای درست است که با در نظر گرفتن $n=1$ دارای جواب $y=x+1$ باشد.

گزینه 1) $\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}x^k=\frac{1}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1=1+x$ **P**

گزینه 2) $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k!}x^k=\frac{1}{1!}x^1+\frac{1}{2!}x^2=x+\frac{1}{2}x^2$ غلط

گزینه 3) $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k!}x^k=\frac{1}{1!}x^1=x$ غلط

گزینه 4) $\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!}x^k=\frac{1}{0!}x^0=1$ غلط

35. گزینه 2 درست است.

$$(x+1)^2y''+(x+1)y'+4y=0$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کوشی اویلر است که به جای جمله x جمله $x+1$ قرار دارد، لذا داریم:

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda+4=0$$

$$\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$$

$$y=A\cos\left(2\ln(x+1)\right)+B\sin\left(2\ln(x+1)\right)$$

$$y(0)=1 \Rightarrow 1=A\cos(0)+B\sin(0) \Rightarrow 1=A+0 \Rightarrow A=1$$

$$y=\cos(2\ln(x+1))+B\sin(2\ln(x+1))$$

$$y'=-\frac{2}{x+1}\sin(2\ln(x+1))+\frac{2B}{x+1}\cos(2\ln(x+1))$$

$$y'(0)=2 \Rightarrow 2=-2\sin(0)+2B\cos(0) \Rightarrow 2=0+2B \Rightarrow B=1$$

$$y=\cos(2\ln(x+1))+\sin(2\ln(x+1))$$

$$y=\cos\left(\ln(x+1)^2\right)+\sin\left(\ln(x+1)^2\right)$$

36.گزینه 3 درست است.

$$2x^2y''-xy'+(1+x)y=0$$

$$y''-\frac{1}{2x}y'+\frac{1+x}{2x^2}y=0$$

نقطه تکین تابع $x=0$ می‌باشد که برای یافتن معادله شاخص داریم:

$$A=\lim_{x\to 0} xP(x)=\lim_{x\to 0} x\left(\frac{-1}{2x}\right)=\frac{-1}{2}$$

$$B=\lim_{x\to 0} x^2Q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1+x}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

معادله شاخص : $r^2+(A-1)r+B=0 \Rightarrow r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2r^2-3r+1=0$

$$2r^2-3r+1=0\begin{cases} r=1 \\ r=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \quad , \quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \Rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+1)x^n \Rightarrow y''=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(n+1)nx^{n-1}$$

توابع فوق را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم.

$$2x^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(n+1)nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+1)x^n+(1+x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n(n+1)nx^{n+1}-\left(a_0x+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(n+1)x^{n+1}\right)+\left(a_0x+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+1}=0$$

$$2a_n(n+1)n-a_n(n+1)+a_n+a_{n-1}=0$$

$$\left(2n^2+2n-n-1+1\right)a_n=-a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{-a_{n-1}}{2n^2+n} \Rightarrow a_n=\frac{-a_{n-1}}{n(2n+1)}$$

با توجه به گزینه‌ها احتیاجی به پیدا کردن رابطه بازگشتی نظیر ریشه کوچک‌تر معادله شاخص نداریم زیرا معادله شاخص حاصل و رابطه بازگشتی به دست آمده فقط در گزینه 3 درست است.