راهنمای کتاب احتمال، متغیرهای تصادفی

و

فرآیندهای اتفاقی

۱و۲

نجمه رحیمی شاندیز

نشر گل‌آفتاب
مشهد

نشر گل‌آفتاب

مشهد - بلوار ملک آباد - خیابان حامد جنوبی - بین حامد ۷ و ۹ - شماره ۲۱ تلفن : ۶۰۹۷۷۷۱ - ۰۵۱۱

راهنمای کتاب احتمال، متغیرهای تصادفی و فرآیندهای اتفاقی

تالیف : آتناسیوس پاپولیس - یو. اس. پیلای

برگردان : نجمه رحیمی شاندیز

لیتوگرافی : مهرنگار ۰۵۱۱-۸۷۹۰۸۴۷

چاپ و صحافی : دقت ۰۵۱۱- ۳۸۱۰۲۲۰

چاپ یکم : زمستان ۱۳۸۷

شمارگان : ۱۰۰۰ نسخه وزیری

بها : ۴۰۰۰۰ ریال

شابک : 964-5599-93-8

رده بندی کنگره	: ۱۳۸۵ ۳۲۲ الف۲پ/ QA ۲۷۳
شماره کتابشناسی ملی	: ۸۵-۴۱۲۵۷م
سرشناسه	: پاپولیس، آتناسیوس، ۱۹۲۱-م. Papoulis,Athanasios
عنوان و نام پدیدآور	: حل‌المسائل احتمال متغیرهای تصادفی و فرآیندهای اتفاقی/آتاناسیوس پاپولیس، [اونی کریشناپیلای]؛ برگردان نجمه رحیمی شاندیز.
وضعیت نشر	: مشهد: گل آفتاب، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری	: ۲۵۶ ص.
شابک	: ۴۰۰۰۰ ریال 964-5599-93-8
یادداشت کلی	: فیپا
یادداشت عنوان و پدیدآور	: عنوان اصلی: Solutions manual to accompany,probability random variables and stochastic process,4thed
یادداشت ویراست و کتـ...	: این کتاب حل‌المسائل کتاب "احتمال متغیرهای تصادفی و فرآیندهای اتفاقی می‌باشد."
موضوع	: احتمالات-- مسائل، تمرین‌ها و غیره.
موضوع	: متغیرهای تصادفی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره.
موضوع	: فراکردهای احتمالی-- مسائل، تمرین‌ها و غیره.
شناسه افزوده	: پیلای، اونی کریشنا، ۱۹۹۵ — م
شناسه افزوده	: Pillai,Unnikrishna
شناسه افزوده	: رحیمی شاندیز، نجمه، ۱۳۵۳ - مترجم.
رده بندی دیویی	: ۵۱۹/۲
یادداشت فهرست نویس	: فهرست نویسی بدون کتاب است.

فهرست مطالب

فصل دوم

۲-۱) با استفاده از قانون دمورگان:

$$(a) \quad \overline{\bar{A}+\bar{B}} + \overline{\bar{A}+B} = AB + A\bar{B} = A(B+\bar{B}) = A$$

$$(b) \quad (A+B)(\overline{AB}) = (A+B)(\bar{A}+\bar{B}) = A\bar{B} + B\bar{A}$$

چون

$$A\bar{A} = \{\emptyset\} \quad B\bar{B} = \{\emptyset\}$$

۲-۲) اگر

$$A = \{2 \leq x \leq 5\} \quad B = \{3 \leq x \leq 6\} \quad S = \{-\infty < x < \infty\}$$

آنگاه

$$A+B = \{2 \leq x \leq 6\} \quad AB = \{3 \leq x \leq 5\}$$

$$(A+B)(\overline{AB}) = \{2 \leq x \leq 6\}\ [\{x < 3\} + \{x > 5\}]$$

$$= \{2 \leq x < 3\} + \{5 < x \leq 6\}$$

۲-۳) اگر

$$AB = \{\emptyset\}$$

آنگاه

$$A \subset \bar{B}$$

پس

$$P(A) \leq P(\bar{B})$$

۲-۴)

الف) اگر

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \qquad P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$$

بنابراین

$$P(A) = P(B) = P(AB)$$

پس

$$P(A\bar{B}) = 0 \qquad P(\bar{A}B) = 0$$

بنابراین

$$P(\bar{A}B + A\bar{B}) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = 0$$

ب) اگر

$$P(A) = P(B) = 1$$

پس

$$1 = P(A) \leq P(A+B)$$

از آن‌جایی که

$$1 = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 2 - P(AB)$$

نتیجه می‌دهد

$$P(AB) = 1$$

۲-۵) چون

$$ABAC = ABC.$$

از (۲-۱۳) نتیجه می‌شود که

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B+C) - P[A(B+C)]$$
$$P(B+C) = P(B) + P(C) - P(BC)$$
$$P[A(B+C)] = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$

از ترکیب این دو نتایج مطلوبی حاصل می‌شود.

با استفاده از استنتاج، به طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم:

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\ &- P(A_1A_2) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) \\ &+ P(A_1A_2A_3) + \cdots + P(A_{n-2}A_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\pm P(A_1A_2 \cdots A_n) \end{aligned}$$

۲-۶) هر زیر مجموعه از S دارای اعضای قابل شمارشی است، بنابراین به صورت اجتماع قابل شمارشی نوشته می‌شود. پس یک پیشامد است.

۲-۷) از شکل همه زیرمجموعه‌ها، اجتماع و اشتراک مجموعه $\{1\}$ و $\{2,3\}$، ما زیرمجموعه‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\{\emptyset\}, \{1\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$$

۲-۸) اگر

$$P(B) = 1/3 \text{ و } A \subset B, P(A) = 1/4$$

آن‌گاه

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 1$$

(۹-۲

$$P(A|BC)P(B|C) = \frac{P(ABC)}{P(BC)}\frac{P(BC)}{P(C)}$$
$$= \frac{P(ABC)}{P(C)} = P(AB|C)$$
$$P(A|BC)P(B|C)P(C) = \frac{P(ABC)}{P(BC)}\frac{P(BC)}{P(C)}P(C)$$
$$= P(ABC)$$

۲-۱۰) از استنتاج استفاده می‌کنیم. معادله برای $n = 2$ درست است، چون
$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1)$$
فرض کنید این برای n درست باشد. از آن‌جایی که
$$P(A_{n+1}A_n \cdots A_1) = P(A_{n+1}|A_n \cdots A_2A_1)P(A_1 \cdots A_n)$$
ما نتیجه می‌گیریم که این برای $n+1$ نیز بایستی درست باشد.

۲-۱۱) راه حل اول: مجموع اعداد از زیرمجموعه عضو m برابراست با $\binom{n}{m}$ (مسئله ۲-۲۶ را ببینید). مجموع اعداد از زیرمجموعه عضو m شامل ζ_o برابر است با $\binom{n-1}{m-1}$. بنابراین
$$p = \binom{n}{m}\Big/\binom{n-1}{m-1} = \frac{m}{n}$$
راه حل دوم: به طور وضوح
$$P\{\zeta_o|A_m\} = m/n$$
احتمالی است که ζ_o در یک A_m مشخص است. بنابراین (مجموع احتمالات)
$$p = \sum P\{\zeta_o|A_m\}p(A_m) = \frac{m}{n}\sum P(A_m) = \frac{m}{n}$$

در جایی که اجتماع بر همه مجموعه A_m است.

(۱۲-۲

(a) $P\{6 \le t \le 8\} = \frac{2}{10}$

(b) $P\{6 \le t \le 8|t > 5\} = \frac{P\{6 \le t \le 8\}}{P\{t > 5\}} = \frac{2}{5}$

۲-۱۳) از (۲-۲۷) نتیجه می‌شود که

$$P\{t_o \le t \le t_o + t_1 | t \ge t_o\} = \int_{t_o}^{t_o+t_1} \alpha(t)dt \Big/ \int_{t_o}^{\infty} \alpha(t)dt$$

$$P\{t \le t_1\} = \int_0^{t_1} \alpha(t)dt$$

از تساوی دو طرف و قرار دادن $t_1 = t_0 + \Delta t$ برای هر t_o به دست می‌آوریم

$$\alpha(t_o) \Big/ \int_{t_o}^{\infty} \alpha(t)dt = \alpha(0)$$

بنابراین

$$-\ln \int_{t_o}^{\infty} \alpha(t)dt = \alpha(0)t_o \qquad \int_{t_o}^{\infty} \alpha(t)dt = e^{-\alpha(0)t_o}$$

تفاضل مجموعه‌ها $c = \alpha(0)$ است. ما نتیجه می‌گیریم که

$$\alpha(t_o) = c\,e^{ct} \qquad P\{t \le t_1\} = 1 - e^{-ct_1}$$

۲-۱۴) اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

اگر آن‌ها ناسازگارند پس

$$P(AB) = 0$$

بنابراین A و B ناسازگارند و مستقل اگرو فقط اگر

$$P(A)P(B) = 0$$

۲-۱۵) واضح است که

$$A_1 = A_1A_2 + A_1\bar{A}_2$$

بنابراین

$$P(A_1) = P(A_1A_2) + P(A_1\bar{A}_2)$$

اگر پیشامدهای A_1 و $\bar{A}_2$ مستقل باشند، آن‌گاه

$$P(A_1\bar{A}_2) = P(A_1) - P(A_1A_2) = P(A_1) - P(A_1)P(A_2)$$
$$= P(A_1)[1-P(A_2)] = P(A_1)P(\bar{A}_2)$$

بنابراین پیشامدهای A_1 و $\bar{A}_2$ مستقل هستند. علاوه بر این S با هر A مستقل است، چون

$$SA = A$$

از این نتیجه می‌شود:

$$P(SA) = P(A) = P(S)P(A)$$

بنابراین، قضیه برای هر $n = 2$ درست است. برای اثبات این مطلب از استنتاج استفاده می‌کنیم: فرض کنید که A_{n+1} از $A_1, \dots, A_n$ مستقل است. واضح است که، A_{n+1} و $\bar{A}_{n+1}$ از $B_1, \dots, B_n$ مستقل هستند. بنابراین

$$P(B_1 \cdots B_n A_{n+1}) = P(B_1 \cdots B_n)P(A_{n+1})$$
$$P(B_1 \cdots B_n \bar{A}_{n+1}) = P(B_1 \cdots B_n)P(\bar{A}_{n+1})$$

۲-۱۶) احتمالات مطلوب داده شده به وسیله

الف) $\dfrac{\binom{m-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$ ب) $\dfrac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$

۲-۱۷) فرض کنید A_1, A_2 و A_3 نماینده پیشامدها باشند:

$A_1 =$" پیشامد عدد روی گوی کمتر یا مساوی m باشد "

$A_2 =$" پیشامد عدد روی گوی مساوی m باشد "

$A_3 =$" پیشامد عدد روی گوی بزرگتر از m باشد "

$$P(A_1\ occurs\ n_1 = k-1, \quad A_2\ occurs\ n_2 = 1\ and\ A_3\ occurs\ n_3 = 0)$$
$$= \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}$$
$$= \frac{k!}{(k-1)!}\left(\frac{m}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{k}{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{k-1}$$

۲-۱۸) همه ماشین‌ها مشابه به نظر می‌رسند، بنابراین اولین ماشین با احتمال $p = 1/3.$ انتخاب می‌شود. این احتمال استنتاج شده را نتیجه می دهد.

$$\binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0.26$$

۲-۱۹)

$$P\{\text{"drawing a white ball "}\} = \frac{m}{m+n}$$

$$\begin{aligned} P(\text{"atleat one white ball in } k \text{ trials "}) &\\ &= 1 - P(\text{"all black balls in } k \text{ trials"}) \\ &= 1 - \frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}} \end{aligned}$$

۲-۲۰) فرض کنید $D = 2r$ نشان‌دهنده قطر سکه باشد. بنابراین طول r به عنوان فاصله مرکز از هر گوشه مربع است، فرض می‌شود که سکه داخل مربع است. در نتیجه احتمال زیر را داریم:

$$\frac{(1-2r)^2}{1} = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

۲-۲۱) با اشاره به مثال ۳-۱۴.

الف)با استفاده از (۳,۳۹) به دست می‌آوریم:

$$P(\text{"all one} - \text{digit numbers"}) = \frac{\binom{9}{6}\binom{42}{0}}{\binom{51}{6}} = 5 \times 10^{-6}$$

ب)

$$P(\text{"two one–digit and four two–digit numbers"}) = \frac{\binom{9}{2}\binom{42}{4}}{\binom{51}{6}} = 0.224.$$

۲-۲۲) تعداد معادله‌های به شکل $P(A_i A_k) = P(A_i) P(A_k)$ برابر است با $\binom{n}{2}$. تعداد معادله‌های درگیر گروه های r برابر است با $\binom{n}{r}$. بنابراین مجموع اعداد N از چنین معادلاتی برابر است با

و از $N = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}$ و $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$
نتیجه می گیریم که

$$N = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - 1 - n$$

۲-۲۳) با B_1 و B_2 به ترتیب توپ های درون جعبه ۱ و ۲ و R مجموع توپ‌های قرمز را نشان می‌دهیم. داریم (فرض)

$$P(B_1) = P(B_2) = 0.5 \qquad P(R|B_1) = 0.999 \qquad P(R|B_2) = 0.001$$

بنابراین (قضیه بیز)

$$P(B_1|R) = \frac{P(R|B_1)P(B_1)}{P(R|B_1)P(B_1) + P(R|B_2)P(B_2)} = \frac{0.999}{0.999 + 0.001} = 0.999$$

۲-۲۴) ما نشان می‌دهیم که B_1 و B_2 به ترتیب توپ های درون جعبه ۱ و ۲ و D همه جفت‌ها از بخش‌های ناقص هستند. ما داریم (فرض)

$$P(B_1) = P(B_2) = 0.5$$

برای به دست آوردن $P(D|B_1)$ مشابه مثال ۲-۱۰ عمل می‌کنیم:

راه حل اول: در جعبه B_1 تعداد 1000×999 جفت وجود دارد. تعداد جفت‌های ناقص برابر 100×99 است. بنابراین

$$P(D|B_1) = \frac{100 \times 99}{1000 \times 999}$$

به طور مشابه به دست می‌آوریم:

$$P(D|B_2) = \frac{100}{2000} \times \frac{99}{1999}$$

$$\text{(a)} \quad P(D) = P(D|B_1)P(B_1) + P(D|B_2)P(B_2) = 0.0062$$

$$\text{(b)} \quad P(B_1|D) = \frac{P(D|B_1)P(B_1)}{P(D)} = 0.80$$

۲-۲۵) مشابه دلیل مثال ۲-۱۳، نتیجه می‌گیریم که احتمال ملاقات اتوبوس و قطار برابر است با

$(10 + x)60 - \frac{10^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ از تساوی با صفر، ما به دست می‌آوریم: $x = 60 - 10\sqrt{11}$

۲-۲۶) نشان می‌دهیم که تعداد $N_n(k)$ از اعضای زیرمجموعه‌های S برابر است با

$$N_n(k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

این برای $k = 1$ درست است. چون تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی برابر n است. با استفاده از استقرا k باید نشان دهیم که

$$N_n(k+1) = N_n(k)\,\frac{n-k}{k+1} \qquad 1 < k < n \qquad (1)$$

به هر زیرمجموعه k عضوی از S یکی از باقی‌مانده $n-k$ عضو از S را اضافه می‌کنیم. پس زیرمجموعه های دارای تعداد عضو به صورت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$N_n(k)(n-k) \quad k+1\text{-element}$$

هر یک از آن‌ها $k+1$ عضو یکسان دارند. پس باید، رابطه را بر $k+1$ تقسیم کنیم.

۲-۲۷) در این آزمایش ما ۸ پیشامد داریم. هر پیشامد انتخابی از یک طرف سکه وتوالی مشخص از شیرها و خط‌ها است: برای مثال *fhh* یک پیشامد است " با پرتاب عادلانه سکه‌ها *hh* را مشاهده می‌کنیم. پیشامد $F = \{$ انتخاب عادلانه سکه $\}$ است که چهار خروجی *fhh, fth, fht, ftt* را نتیجه می‌دهد.مکمل آن $\overline{F}$ انتخاب فقط دو خط *hh* است. واضح است که:

$$P(F) = P(\overline{F}) = \frac{1}{2} \qquad P(HH|F) = \frac{1}{4} \qquad P(HH|\overline{F}) = 1$$

مشکل ما پیدا کردن $P(F|HH)$ است. از (۲-۴۱) و (۲-۴۳) نتیجه می‌شود

$$P(HH) = P(HH|F)P(F) + P(HH|\overline{F})P(\overline{F}) = \frac{5}{8}$$

$$P(F|HH) = \frac{P(HH|F)P(F)}{P(HH)} = \frac{1/4 \times 1/2}{5/8} = \frac{1}{5}$$

۳-۱) الف

$P($ پیشامد A حداقل دو بار در هر n آزمایش رخ دهد $)$

$$= 1 - P(\text{A } never\ occurs\ in\ n\ trials) - P(\text{A } occurs\ once\ in\ n\ trials)$$
$$= 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}$$

ب)

$P($ پیشامد A حداقل سه بار در هر n آزمایش رخ دهد $)$

$$= 1 - P(\text{A never occurs in } n \text{ trials}) - P(\text{A occurs once in } n \text{ trials})$$
$$-P(\text{A occurs twice in } n \text{ trials})$$
$$= 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2}$$

۳-۲)

$$P(doublesix) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$P($" حداقل سه باز جفت شش در n آزمایش "$)$

$$= 1 - \binom{50}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^0\left(\frac{35}{36}\right)^{50} - \binom{50}{1}\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{35}{36}\right)^{49} - \binom{50}{2}\left(\frac{1}{36}\right)^2\left(\frac{35}{36}\right)^{48}$$
$$= 0.162$$

۳-۳) اگر $A = \{seven\}$، آن گاه،

$$P(A) = \frac{6}{36} \qquad\qquad P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$$

اگر تاس ۱۰ مرتبه پرتاب شود، آن‌گاه احتمال $\bar{A}$ در ۱۰ مرتبه برابر با $(5/6)^{10}$ خواهد شد.
بنابراین، احتمال p که {هفت} حداقل یک مرتبه نشان داده شود، برابر است با

$$1 - (5/6)^{10}$$

۳-۴) اگر k تعداد خطاها باشد، پس

$$P\{even\} = P\{k=0\} + P\{k=2\} + \cdots$$
$$= q^n + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \binom{n}{4} p^4 q^{n-4} + \cdots$$

اما

$$1 = (q+q)^n = q^n + \binom{n}{1} p\, q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \cdots$$
$$(p-q)^n = q^n - \binom{n}{1} p\, q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2\, q^{n-2} - \cdots$$

با جمع کردن طرفین، به دست می آوریم:

$$1 + (p-q)^n = 2\,P\{even\}$$

۳-۵) در این آزمایش، مجموع تعداد خروجی عدد $\binom{N}{n}$ از تعداد n انتخاب از N شی است. تعداد راه‌های انتخاب k شی از K عضو خوب برابر $\binom{K}{k}$ است و تعداد راه‌های انتخاب N-K از مولفه های خراب برابر $\binom{N-K}{n-k}$ است. بنابراین، تعداد راه‌های انتخاب k مولفه‌های خوب و n-k مولفه های خراب برابر $\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}$ است. از این و از (۲-۲۵) نتیجه می‌شود که

$$p = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$$

۳-۶)

الف)

$$p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.665$$

ب)

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{12}-\binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11}=0.619$$

ج)

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{18}-\binom{18}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{17}-\binom{18}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{16}=0.597$$

۳-۷) الف) فرض کنید که n نشان دهنده تعداد بردها در ۵۰ بازی باشد. بنابراین برد خالص یا باخت ۱$ وجود ندارد. از این نتیجه می شود که برد خالص عبارت است از

$$-1<n-\frac{50-n}{4}<1$$
$$16<n<17.3$$
$$n=17$$

$$P(\text{net gain } \textit{does not} \text{ exceed } \$1)=\binom{50}{17}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{17}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{33}=0.432$$
$$P(\text{net gain or loss exceeds } \$1)=1-0.432=0.568$$

ب)فرض کنید که n نشان دهنده تعداد بازی لازم باشد، که در آن برد خالص یا باخت بیش از ۵$ نباشد. در نتیجه داریم:

$$-5<n-\frac{(50-n)}{2}<5$$
$$13.3<n<20$$

$$P(\text{net gain } \textit{does not} \text{ exceed } \$5)=\sum_{n=14}^{19}\binom{50}{n}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{50-n}=0.349$$
$$P(\text{net gain or loss exceeds } \$5)=1-0.349=0.651$$

۳-۸) پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A= " r successes in n Bernoulli trials"
B= "success at the i^{th} Bernoulli trial"
C= "$r-1$ successes in the remaining $n-1$ Bernoulli trials excluding
i امین آزمایش

$$P(A) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$
$$P(B) = p$$
$$P(C) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{n-r}$$

ما نیاز داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(BC)}{P(A)} = \frac{P(B)\,P(C)}{P(A)} = \frac{r}{n}.$$

۳-۹) در این‌جا $\binom{52}{13}$ راه انتخاب ۱۳ کارت از ۵۲ کارت وجود دارد. تعداد راه‌های انتخاب ۱۳ کارت به هرترتیبی (از ۱۳ کارت) برابر $1 = \binom{13}{13}$ است. چهارانتخاب {ناسازگار} از مجموع ۱۳ عدد به هر ترتیب دلخواه برابر ۴ است. بنابراین احتمال مطلوب به صورت زیر داده می‌شود:

$$\frac{4}{\binom{52}{13}} = 6.3 \times 10^{-12}$$

۳-۱۰) با استفاده از راهنمایی داریم:

$$p\,(N_{k+1} - N_k) = q\,(N_k - N_{k-1}) - 1$$

فرض کنید

$$M_{k+1} = N_{k+1} - N_k$$

بنابراین تکرار بالا نتیجه می دهد

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= \frac{q}{p}\,M_k - \frac{1}{p} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)\,M_1 - \frac{1}{p-q}\left\{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right\}, & p \neq q \\ M_1 - \frac{k}{p}, & p = q \end{cases} \end{aligned}$$

اگر از $N_o = 0$ استفاده شود، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
N_i &= \sum_{k=0}^{i-1} M_{k+1} \\
&= \begin{cases} \left(M_1 + \frac{1}{p-q}\right) \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k - \frac{i}{p-q}, & p \neq q \\ iM_1 - \frac{i(i-1)}{2p}, & p = q \end{cases}
\end{aligned}
$$

به طور مشابه با قرار دادن $N_{a+b} = 0$ به دست می‌آوریم

$$
M_1 + \frac{1}{p-q} = \frac{a+b}{p-q} \cdot \frac{1-q/p}{1-(q/p)^{a+b}}.
$$

بنابراین

$$
N_i = \begin{cases} \frac{a+b}{p-q} \cdot \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^{a+b}} - \frac{i}{p-q}, & p \neq q \\ i(a+b-i), & p = q \end{cases}
$$

که برای $i = a$ می‌دهد

$$
\begin{aligned}
N_a &= \begin{cases} \frac{a+b}{p-q} \cdot \frac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^{a+b}} - \frac{a}{p-q}, & p \neq q \\ ab, & p = q \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{b}{2p-1} - \frac{a+b}{2p-1} \cdot \frac{1-(q/p)^b}{1-(q/p)^{a+b}} - \frac{a}{p-q}, & p \neq q \\ ab, & p = q \end{cases}
\end{aligned}
$$

۳-۱۱) با بحث به روش (۳-۴۳) رابطه تکراری زیر را داریم:

$$P_n = pP_{n+\alpha} + qP_{n-\beta}$$

و با پیش رفتن به روش مثال ۳-۱۵:

$$P_n = P_{n+\alpha} + qP_{n-\beta}$$

۳-۱۲) شرط اول فرض براین که $k = 1, 2, \ldots, 6$ پس:

$$p_1 = P(k \; appears \; on \; one \; dice) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$p_2 = P(k \; appear \; on \; two \; dice) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$p_3 = P(k \; appear \; on \; all \; the \; tree \; dice) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$p_0 = P(k \; appear \; none) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\text{Net gain} = 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 - p_0 = 0.343.$$

۴-۱) از زوج بودن $f(x)$: $1-F(x)=F(-x)$.

و از تعریف x_u: $u=F(x_u)$ ، $1-u=F(x_{1-u})$ داریم:

$$1 - u = 1 - F(x_u) = F(-x_u) = F(x_{1-u}) \qquad - x_u = x_{1-u}$$

۴-۲) از تقارن داریم:

$$f(x):\ 1 - F(\eta+a) = F(\eta-a)$$

بنابراین {(۴-۸) را ببینید}

$$P\{\eta-a < \underset{\sim}{x} < \eta+a\} = F(\eta+a) - F(\eta-a) = 2F(\eta+a) - 1$$

از این نتیجه می‌شود:

$$1-\alpha = 2F(\eta+a) - 1 \qquad F(\eta+a) = 1 - \alpha/2 \qquad \eta+a = x_{1-\alpha/2}$$

$$F(a-\eta) = \alpha/2 \qquad a-\eta = x_{\alpha/2}$$

۴-۳) الف) در درون‌یابی خطی:

$$x_u \simeq x_a + \frac{x_b-x_a}{u_b-u_a}(u-u_a) \qquad \text{for } x_a < x_u < x_b$$

از جدول ۴-۱

$$z_{0.9} \simeq 1.25 + \frac{0.00565}{0.00885} \times 0.05 = 1.2819$$

با ادامه دادن به طور مشابه، به‌دست می‌آوریم:

$u =$	0.9	0.925	0.95	0.975	0.99
$z_u =$	1.282	1.440	1.645	1.960	2.327

ب) اگر $\underset{\sim}{z}$ چنین باشد $\underset{\sim}{x} = \eta + \sigma \underset{\sim}{z}$ پس $\underset{\sim}{z}$ باید $N(0,1)$ و $G(z) = F_x(\eta+\sigma z)$

بنابراین

$$u = G(z_u) = F_x(\eta+\sigma z_u) = F_x(x_u) \qquad x_u = \eta+\sigma z_u$$

۴-۴)

$$p_k - 2G(k) = 1 = 2\,\mathrm{erf}k$$

الف) از جدول ۴-۱

$k =$	1	2	3
$p_k =$	0.6827	0.9545	0.9973

ب) از جدول ۳-۱ با درون‌یابی خطی:

$p_k =$	0.9	0.99	0.999
$k =$	1.282	2.32	3.090

ج)

$$P(\eta - z_u\sigma < \underset{\sim}{x} < \eta + z_u\sigma) = 2G(z_u) - 1 = \gamma$$

بنابراین

$$G(z_u) = (1+\gamma)/2 \qquad u = (1+\gamma)/2$$

۴-۵) الف)

$$F(x) = x \text{ for } 0 \le x \le 1;\text{ hence, } u = F(x_u) = x_u$$

ب)

$$F(x) = 1-e^{-2x} \text{ for } x \ge 0;\text{ hence, } u = 1-e^{-2x_u}$$

$$x_u = -\frac{1}{2}\ln(1-u)$$

$u =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$x_u =$	0.0527	0.1116	0.1783	0.2554	0.3466	0.4581	0.6020	0.847	1.1513

۴-۶) درصد از واحدها بین ۹۶ و ۱۰۰ اهم برابر $100p$ است در جایی که

$$p = P\{96 < \underset{\sim}{R} < 104\} =$$

$$F(104) - F(96)$$

الف)

$$F(R) = 0.1(R-95) \text{ for } 95 \le R \le 105.$$

بنابراین

$$p = 0.1(104-95) - 0.1(96-95) = 0.8$$

ب)

$$p = G(2.5) - G(-2.5) = 0.9876$$

۴-۷) از (۴-۳۴)، با $\alpha = 2$ و $\beta = 1/\lambda$ به دست می آوریم:

$$f(x) = c^2 xe^{-cx}U(x)$$

$$F(x) = c^2 \int_0^x ye^{-cy}dy = 1 - e^{-cx} - cxe^{-cx}$$

۴-۸)

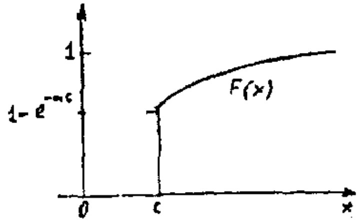
$$\{(\underset{\sim}{x} - 10)^2 < 4\} = \{8 < \underset{\sim}{x} < 12\}$$

$$P\{(\underset{\sim}{x} - 10)^2 < 4\} = G(12 - 10) - G(8 - 10) = 0.954$$

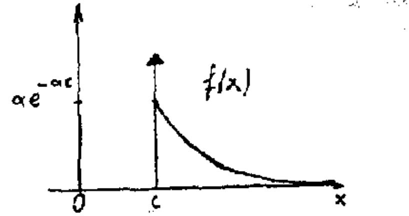
$$f(x|(\underset{\sim}{x} - 10)^2 < 4) = \frac{f(x)}{P\{8 < \underset{\sim}{x} < 12\}} = \frac{1}{0.954\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{2}}$$

برای

$$8 < x < 12 \text{ and zero otherwise}$$



$F(x) = (1 - e^{-\alpha x})U(x-c)$



$f(x) = (1 - e^{-\alpha c})\delta(x-c) + e^{-\alpha x}U(x-c)$

۴-۱۰) الف)

$$P\{1 \le x \le 2\} = G(\tfrac{2}{2}) - G(\tfrac{1}{2}) = 0.1499$$

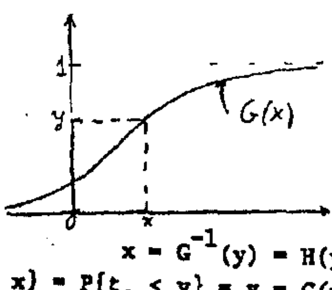
ب.

$$P\{1 \le \underline{x} \le 2 | \underline{x} \ge 1\} = \frac{G(1) - G(0.5)}{1 - G(0.5)} = \frac{0.1499}{0.3085} = 0.4857$$

چون

$$\{1 \le \underline{x} \le 2, \ \underline{x} \ge 1\} = \{1 \le \underline{x} \le 2\}$$

۴-۱۱)



$x = G^{-1}(y) = H(y)$

$P\{\underline{x} \le x\} = P\{t_1 \le y\} = y = G(x)$

If $\underline{x}(t_1) \le x$

then

$t_1 \le y = G(x)$

Hence,

۴-۱۲) الف)

$$P\{\underline{x} < 1024\} = G(\frac{1024 - 1000}{20}) = G(1.2) = 0.8849$$

ب)

$$P\{\underline{x} < 1024 | \underline{x} > 961\} = \frac{P\{961 < \underline{x} < 1024\}}{P\{\underline{x} > 961\}}$$

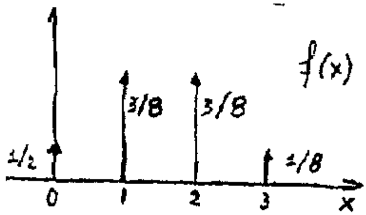
$$= \frac{G(1.2) - G(-1.95)}{1 - G(-1.95)} = 0.8819$$

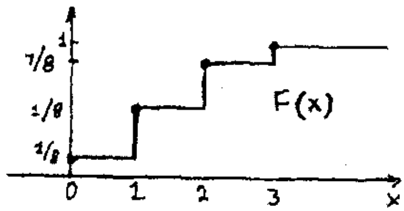
ج)

$$P\{31 < \sqrt{\underline{x}} \leq 32\} = P\{961 < \underline{x} \leq 1024\} = 0.8593$$

۱۳-۴)

$$P\{\underline{x} = 0\} = \frac{1}{8} \qquad P\{\underline{x} = 1\} = \frac{3}{8} \qquad P\{\underline{x} = 2\} = \frac{3}{8} \qquad P\{\underline{x} = 3\} = \frac{1}{8}$$





۱۴-۴) الف)

$$1. \quad f_x(x) = \frac{1}{2^{900}} \sum_{k=0}^{900} \binom{900}{k} \delta(x-k)$$

$$2. \quad f_x(x) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{900} e^{-(k-450)^2/450} \delta(x-k)$$

ب)

$$P\{435 \leq x \leq 460\} = G(\frac{10}{15}) - G(-\frac{15}{15}) = 0.5888$$

۱۵-۴) اگر $x > b$ آن‌گاه $F(x) = 1$ $\quad (\underline{x} \leq x) = S$

اگر $x < a$ آن‌گاه $F(x) = 0$ $\quad \{\underline{x} \le x\} = \{\emptyset\}$

۴-۱۶) اگر $\underline{y}(\zeta_i) \le w$ آن‌گاه $\underline{x}(\zeta_i) \le w$ چون $\underline{x}(\zeta_i) \le \underline{y}(\zeta_i)$ بنابراین

$$\{\underline{y} \le w\} \subset \{\underline{x} \le w\} \qquad P\{\underline{y} \le w\} \le P\{\underline{x} \le w\}$$

پس

$$F_y(w) \le F_x(w)$$

۴-۱۷) از (۴-۸۰)

$$f(x) = kx\, e^{-\int_0^x kt\,dt} = kx\, e^{-kx^2/2}$$

۴-۱۸) از (۲-۴۱) و رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$A_1 = \{\underline{x} \le x\} \qquad A_2 = \{\underline{x} > x\}$$

۴-۱۹) از رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$F_x(x|A) = \frac{P\{\underline{x} \le x, A\}}{P(A)} \qquad P\{A|\underline{x} \le x\} = \frac{P\{\underline{x} \le x, A\}}{P\{\underline{x} \le x\}}$$

۴-۲۰) همه احتمالات در (۴-۸۰) را با احتمالات شرطی با فرض $\{\underline{x} \le x_o\}$ جایگزین می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(A|\underline{x} = x,\ \underline{x} \le x_o) f(x|\underline{x} \le x_o)dx \qquad ,\underline{x} \le x_o)$$

اما

$$f(x|\underline{x} \le x_o) = 0 \quad \text{for} \quad x > x_o$$

و

$$\{\underset{\sim}{x} = x,\ \underset{\sim}{x} \le x_o\} = \{\underset{\sim}{x} = x\} \quad \text{for} \quad x \le x_o$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{x_o} P(A|\underset{\sim}{x} = x) f(x|\underset{\sim}{x} \le x_o) dx = P(A|\underset{\sim}{x} \le x_o)$$

با نوشتن رابطه مشابه برای $P(B|\underset{\sim}{x} \le x_o)$ ما نتیجه می‌گیریم که

$P(A|\underset{\sim}{x} = x) = P(B|\underset{\sim}{x} = x)$ ، برای $x \le x_o$ پس

$$P(A|\underset{\sim}{x} \le x_o) = P(B|\underset{\sim}{x} \le x_o)$$

۴-۲۱) الف) واضح است که $f(p) = 1 \text{ for } 0 \le p \le 1$ و صفر جاهای دیگر است. بنابراین

$$P\{0.3 \le \underset{\sim}{p} \le 0.7\} = \int_{0.3}^{0.7} dp = 0.4$$

ب)می‌خواهیم احتمالات $P\{0.3 \le \underset{\sim}{p} \le 0.7|A\}$ را پیدا کنیم در جایی که {۶ خط در ۱۰ پرتاب است} = A. واضح است که $P\{A|\underset{\sim}{p}=p\} = p^6(1-p)^4$ می‌باشد. پس، {(۴-۸۱) را ببینید}

$$f(p|A) = \frac{p^6(1-p)^4}{\int_0^1 p^6(1-p)^4 dp} = \frac{p^6(1-p)^4}{4329\times10^{-7}}$$

از این نتیجه می‌شود:

$$P\{0.3 \le \underset{\sim}{p} \le 0.7|A\} = \int_{0.3}^{0.7} f(p|A)dp = \frac{10^7}{4329}\int_{0.3}^{0.7} p^6(1-p)^4 dp = 0.768$$

۴-۲۲) الف) در این مساله $f(p) = 5 \text{ for } 0.4 \le \underset{\sim}{p} \le 0.6$ و صفر جاهای دیگر، بنابراین {(۴-۸۲)را ببینید}

$$P(H) = 5\int_{0.4}^{0.6} p\,dp = 0.5$$

ب) با $A = \{60 \text{ heads in } 100 \text{ tosses}\}$ از (۴-۸۲) برای $0.4 \le p \le 0.6$ و جاهای دیگر صفر نتیجه می‌شود که

$$f(p|A) = p^{60}(1-p)^{40} \Big/ \int_{0.4}^{0.6} p^{60}(1-p)^{40}dp$$

جایگزینی $f(p)$ با $f(p|A)$ در (۴-۸۲)، ما خواهیم داشت:

$$P(H|A) = \int_{0.4}^{0.6} pf(p|A)dp = 0.56$$

(۴-۲۳

$$n = 900 \qquad p = q = 0.5 \qquad np = 450 \qquad \sqrt{npq} = 15$$

$$k_1 = 420 \qquad k_2 = 465 \qquad \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = 1 \qquad \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = -2$$

$$P(420 \le k \le 465) = G(1) - [1 - G(-2)] = G(1) + G(2) - 1 = 0.819$$

۴-۲۴) برای پرتاب عادلانه سکه $\sqrt{npq} = \sqrt{n}/2$. اگر

$$k_1 = 0.49n \text{ and } k_2 = 0.52n$$

پس

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0.52n - n/2}{\sqrt{n}/2} = 0.04\sqrt{n} \qquad \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = -0.02\sqrt{n}$$

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} = G(0.04\sqrt{n}) + G(0.02\sqrt{n}) - 1 \ge 0.9$$

از جدول ۴-۱ به دست می‌آوریم که

$$0.02\sqrt{n} > 1.3 \qquad n > 65^2$$

۴-۲۵) الف) با در نظر گرفتن $n = 1,000$ (به تصحیح صورت مساله توجه کنید)

$$P(A) = 0.6 \qquad np = 600 \qquad npq = 240 \qquad k_2 = 650 \qquad k_1 = 550$$

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50}{\sqrt{240}} = 3.23 \qquad \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = -3.23$$

$$P\{550 \le k \le 650\} = 2G(3.23) - 1 = 0.999$$

ب)

$$P\{0.59n \le k \le 0.61n\} = 2G\left(\frac{0.01n}{\sqrt{0.24n}}\right) - 1$$

$$= 2G\left(\sqrt{\frac{n}{2400}}\right) - 1 = 0.476$$

بنابراین،(جدول ۳-۱) $n \cong 9220$

۴-۲۶)با در نظرگرفتن $a = 0$ و $b = T/4$ نتیجه می‌گیریم که

$$1-e^{-1/4} = 0.22 \qquad np = 220 \qquad npq = 171.6 \qquad k_2 = 100$$

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = -9.16 \text{ and (4-100) yields}$$

$$P\{0 \le k \le 100\} = G(-9.16) = 0.$$

۴-۲۷) پیشامد

$A = \{$ امین خط در اولین n پرتاب و نه زودتر رخ دهد k $\}$

رخ می‌دهد اگر و فقط اگر دو پیشامد زیر اتفاق بیفتند:

$B = \{$ $k-1$ خط در اولین $n-1$ پرتاب رخ دهد $\}$

$C = \{$ خط در n امین پرتاب رخ دهد $\}$

و چون این دو پیشامد مستقل هستند و

$$P(B) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \qquad P(C) = p$$

نتیجه می گیریم که

$$P(A) = P(B)P(C) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}e^{-x^2/2}\right) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2} > e^{-x^2/2}$$

با ضرب در $1/\sqrt{2\pi}$ و انتگرال گرفتن از x تا ∞ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\zeta^2/2}\,d\zeta = 1-G(x)$$

چون

$$\frac{1}{x}e^{-x^2/2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

اولین نامساوی به طور مشابه به دنبال می‌آید، چون

$$-\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}\right] = \left(1-\frac{3}{x^4}\right)e^{-x^2/2} < e^{-x^2/2}$$

۴-۲۹) اگر $P(A)=p$ آن‌گاه $P(\overline{A})=1-p$ است. واضح است که $P_1=1-Q_1$ در جایی که Q_1 برابر با احتمال عدم وقوع A است. اگر $pn<<1$ آن‌گاه $P_1=p$ و $Q_1=(1-p)^n\approx 1-np$ است.

۴-۳۰) با $p = 0.02,\ n = 100,\ k = 3$ از (۴-۱۰۷) نتیجه می‌شود که احتمال مجهول برابر است با

$$\binom{100}{3}(0.02)^3(0.98)^{97} \approx \frac{2^3}{3!}e^{-2} = \frac{4}{3}e^{-2}$$

۴-۳۱) با

$$n = 3,\ r = 3,\ k_1 = 2,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1,\ p_1 = p_2 = p_3 = 1/6$$

از (۴-۱۰۲) نتیجه می‌شود که احتمال مجهول برابر است با

$$\frac{5!}{1!2!2!}\frac{1}{6^6} = 0.00386$$

با (۳۲-۴) $r = 2,\ k_1 = k,\ k_2 = n-k,\ p_1 = p,\ p_2 = 1-p = q$ به دست می‌آوریم:

$$k_1 - np_1 = k - np \qquad k_2 - np_2 = n-k-nq = np - k$$

بنابراین پرانتز (۴-۱۰۳) مانند (۴-۹۰) برابر است با

$$\frac{(k_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2-np_2)^2}{np_2} = \frac{(k-np)^2}{n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{(k-np)^2}{npq}$$

۴-۳۳) $P(\overline{M}) = 34/36 \qquad P(M) = 2/36$. زوج های M و $\overline{M}$ حاصل از افراز هستند بنابراین، {(۲-۴۱) را ببینید}

$$P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|\overline{M})P(\overline{M})$$

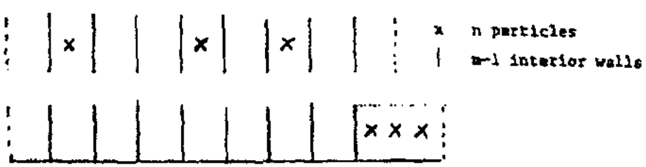
قطعا، $P\left(A/M\right)=1$ است، چون اگر M در در دفعه اول اتفاق افتد، برد با X است. احتمال برد X بعد از دفعه اول برابر $P\left(A/\overline{M}\right)$ است. اما در آزمایشاتی که در دور دوم شروع می شود، بازیکن اول Y است و احتمال برد او برابر $P\left(\overline{A}\right)=1-p$ است. بنابراین، $P\left(A/\overline{M}\right)= P\left(\overline{A}\right)=1-p$ و

از آن‌جایی که $P(M) = 1/18$ و $P(\overline{M}) = 17/18$ نتیجه می‌شود که

$$p = \frac{1}{18} + (1-p)\,\frac{17}{18} \qquad\qquad p = \frac{18}{35}$$

۴-۳۴) الف) هر یک از n ذره می‌تواند در یکی از m جعبه جای گیرد. آن‌ها n ذره هستند بنابراین، تعداد حالات ممکن برابر است با $N = m^n$. در m جعبه از پیش انتخاب شده، ذره‌ها می‌توانند به صورت $N_A = n!$ طریق جای بگیرند. (همه جایگشت‌ها از n شی). بنابراین $P\left(n!/m^n\right)$

ب)



همه حالات ممکن از جایگشت $n+m-1$ شی شامل $m-1$ دیواره داخلی با n ذره حاصل می‌شود. $(m-1)!$ جایگشت دیواره‌ها و $n!$ جایگشت ذرات یک حالت محاسبه می‌شود.

$$N = \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!} \qquad N_A = 1$$

ج) فرض کنید که S مجموعه درنظر گرفته شده از m جعبه است. هر محل از قسمت‌های مخصوص زیرمجموعه‌ای از ترکیب n شی است(جعبه‌ها). تعداد چنین زیرمجموعه‌هایی برابر است با $\binom{m}{n}$ (مساله ۲-۲۶ را ببینید). بنابراین،

$$N = \binom{m}{n} \qquad N_A = 1$$

۴-۳۵) اگر $k_1 + k_2 << n$ آن‌گاه $k_3 \simeq n$ و

$$k_3(p_1 + p_2) = [n-(k_1 + k_2)](p_1 + p_2) \simeq n(p_1 + p_2)$$

$$p_3 = 1 - (p_1 + p_2) \simeq e^{-(p_1+p_2)} \qquad p_3^{k_3} \simeq e^{-n(p_1+p_2)}$$

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k_3+1)}{k_1!k_2!} \simeq \frac{n^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}$$

بنابراین

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \simeq e^{-np_1} \frac{(np_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-np_2} \frac{(np_2)^{k_2}}{k_2!}$$

۴-۳۶) احتمال p که نقطه برخورد در فاصله $(0,2)$ باشد، برابر با $2/100$ است . الف) از (۳-۱۳) نتیجه می شود که احتمال p_1 که تنها یکی از ۲۰۰ نقطه از فاصله $(0,2)$ باشد، برابر است با

$$p_1 = \binom{200}{1} \times 0.02 \times 0.09^{199}$$

ب) با $np = 200 \times 0.02 = 4$ و $k = 1$, (3-41) به دست می‌آوریم:

$$p_1 \simeq e^{-4} \times 4 = 0.073$$

(۱-۵

$$\eta = 2\eta_x+4 = 14 \qquad \sigma_y^2 = 4\sigma_x^2 = 16$$

(۲-۵

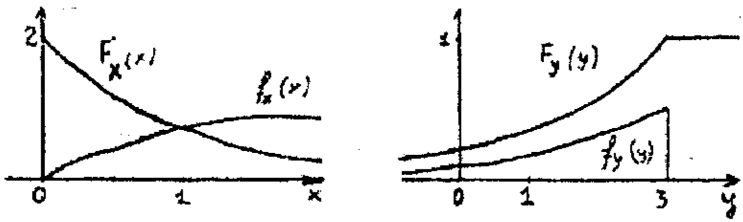
$$\{\underset{\sim}{y} \le y\} = \{-4\underset{\sim}{x} + 3 \le \underset{\sim}{y}\}\ \{\underset{\sim}{x} \le (y-3)/4\}.$$

بنابراین

$$F_y(y) = P\left\{\underset{\sim}{x} \ge \frac{3-y}{4}\right\} = 1 - F_x\left(\frac{3-y}{4}\right) \qquad f_y(y) = \frac{1}{4} f_x\left(\frac{3-y}{4}\right)$$

از آن‌جایی $F_x(x) = (1-e^{-2x})U(x)$ از این نتیجه می‌شود:

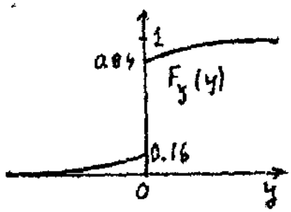
$$F_y(y) = e^{(y-3)/2}U\left(\frac{y-3}{2}\right) \qquad f_y(y) = \frac{1}{2} e^{(y-3)/2}U\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

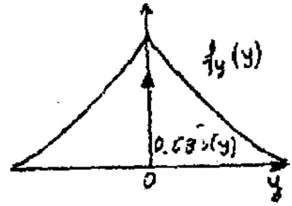


(۳-۵ از مثال ۵-۳ با $F_x = G(x/c)$:

$$f_y(y) = \begin{cases} G(y/c+1) & y\ge 0 \\ G(y/c-1) & y<0 \end{cases}$$

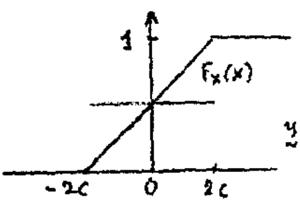
$$f_y(y) = 0\ 0.68\ \delta(y) + \frac{1}{c\sqrt{2\pi}}\left[e^{-(y+c)^2/2c^2}U(y) + e^{-(y-c)^2/2c^2}U(-y)\right]$$

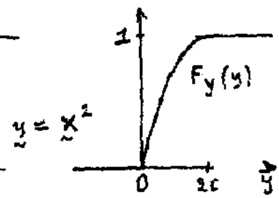


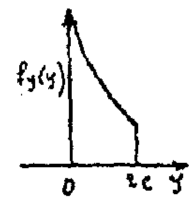


۵-۴) اگر $F_x(x)=(x+2c)/4c$ و $y = x^2$ برای $|x|\le 2c$ ، پس (مثال ۵-۲ را ببینید)

$F_y(y) = \sqrt{y}/2c$, $f_y(y) = 1/4\sqrt{y}$ برای $0 < y < 2c$

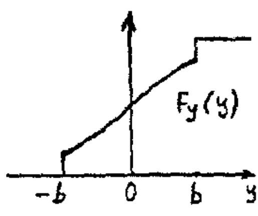


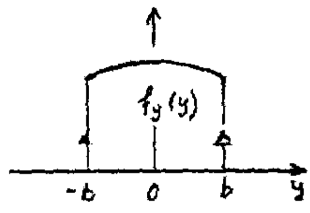




۵-۵) از مثال ۵-۴ و رابطه $F_x(x)=G(x/b)$: برای $|x|\le b$ $F_y(y)=G(y/b)$ و

$$f_y(y) = 0.16\delta(y+b) + \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2b^2} + 0.16\delta(y-b)$$





۵-۶) معادله $y = -\ln x$ تنها جواب $x = e^{-y}$ برای $y > 0$ است و هیچ جوابی برای $y < 0$ نیست.

علاوه بر این $g'(x) = -1/x = -e^{y}$ بنابراین

$$f_y(y) = \frac{f_x(e^{-y})}{e^{y}}\ U(y) = e^{-y}U(y)$$

۵-۷) واضح است که، $\underset{\sim}{z} \le z$ است، اگر و فقط اگر عدد $\underset{\sim}{n}(0,z)$ در فاصله $(0,z)$ حداقل یک باشد.

پس:

$$F_z(z) = P\{\underset{\sim}{z} \le z\} = P\{\underset{\sim}{n}(0,z) > 0\} = 1 - P\{\underset{\sim}{n}(0,z) = 0\}$$

احتمال p که نقطه خاصی در فاصله $(0,z)$ باشد برابر $z/100$ می‌باشد. با $n=200$ و $k=0$ و $p = z/100$ و (۳-۲۱) نتیجه می‌دهد که $P\{\underset{\sim}{n}(0,z)=0\}=(1-p)^{200}$. بنابراین

الف)

$$F_z(z) = 1 - \left(1 - \frac{z}{100}\right)^{100}$$

ب) از (۴-۱۰۷) نتیجه می‌شود که در الف $F_z(z) \cong 1 - e^{-2z}$ برای $z << 100$.

۵-۸)

$$Y = \sqrt{X} \quad \Rightarrow \quad x_1 = y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$$

بنابراین

$$f_Y(y) = \frac{1}{\left|\dfrac{dy}{dx}\right|} f_X(x_1) = 2y f_X(y^2)$$

$$\frac{2y}{\lambda} e^{-y^2/\lambda} = \begin{cases} \dfrac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2}, & y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

۵-۹) برای هر دوحالت $f_y(y) = 0$ برای $y < 0$ است.

الف) اگر $y > 0$ و $|x| = y$ در این صورت $x_1 = y, x_2 = -y$. بنابراین

$$f_y(y) = [f_x(y) + f_x(-y)]U(y)$$

ب) اگر $y > 0$ و $e^{-x}U(x) = y$ پس $x = -\ell ny$ علاوه بر این $P\{\underset{\sim}{y} = 0\} = P\{\underset{\sim}{x} \le 0\} = F_x(0)$

بنابراین

$$f_y(y) = F_x(0)\delta(y) + \frac{1}{y} f_x(-\ell ny)U(y)$$

۵-۱۰)

الف) اگر $y \ge 0$ و $(x-1)U(x-1) = y$ پس $\{\underset{\sim}{y} \le y\} = \{\underset{\sim}{x} \le y + 1\}$

اگر $y < 0$ آن‌گاه $\{\underset{\sim}{y} < y\} = \{\emptyset\}$

$$F_y(y) = F_x(1+y)U(y) = [1 - e^{-2(y+1)}]U(y)$$

$$f_y(y) = (1 - e^{-2})\delta(y) + 2e^{-2(y+1)}U(y)$$

ب) اگر $y > 0$ و $y = x^2$، بنابراین $\{\underline{y} \le y\} = \{-\sqrt{y} \le \underline{x} \le \sqrt{y}\}$

$$F_y(y) = F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y}) = (1 - e^{-2\sqrt{y}})U(y)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\, e^{-2\sqrt{y}}U(y)$$

۵-۱۱) اگر $y = \arc\tan x$ آن‌گاه $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$$f_y(y) = (1+x^2)f_x(\tan y) = \frac{1+x^2}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \qquad \frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

۵-۱۲)

الف) اگر $y = x^3$ آن‌گاه $x = \sqrt[3]{y}$ برای هر y

$$f_y(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\; f_x\left(\sqrt[3]{y}\right) = \frac{1}{12\pi\sqrt[3]{y^2}}$$

برای $|y| < 8\pi^3$ و جاهای دیگر صفر.

ب) اگر $y = x^4$ و $y > 0$ پس، $x_1 = \sqrt[4]{y} \quad x_1 = -\sqrt[4]{y}$

$$f_y(y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}} \left[f_x(\sqrt[4]{y}) + f_x(-\sqrt[4]{y})\right] = \frac{1}{8\pi\sqrt[4]{y^3}}$$

برای $0 < y < 16\pi^4$ وجاهای دیگر صفر است.

ج) اگر $y = 2\sin(3x + 40^\circ)$ و $|y| < 2$ آن‌گاه $x = x_i$ به صورتی که نشان داده شد.

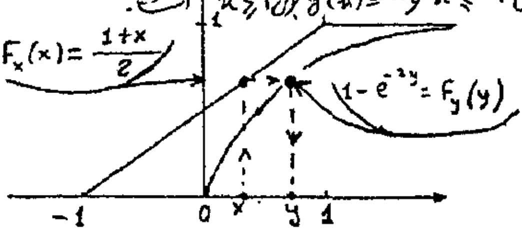
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6\sqrt{1 - y^2/4}}$$

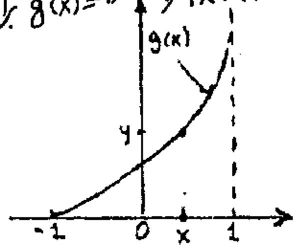
در درون‌یابی $(-2\pi\ ,\ 2\pi)$ دوازده $x_i{}'s$ وجود دارد. بنابراین

$$f_y(y) = \frac{1}{3\sqrt{4-y^2}} \sum_i f_x(x_i) = \frac{12}{12\pi\sqrt{4-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{4-y^2}}$$

برای $|y| < 2$ و جاهای دیگر صفر.

۱۳-۵) $F_y[g(x)] = F_x(x)$ بنابراین $1-e^{-2y} = \frac{1+x}{2}$ در نتیجه $y = g(x) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{2}$ برای $|x|<1$ و $g(x)=0$ برای $x \leq -1$ و $g(x) = \infty$ برای $x \geq 1$ است.



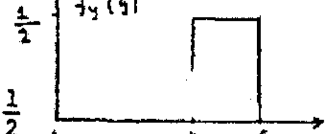


۱۴-۵) الف)

$$g(x) = 2F_x(x) + 4 \qquad g'(x) = 2f_x(x)$$

اگر $4 < y < 6$ آن گاه $y = 2F_x(x) + 4$ دارای یک جواب واحد برای x_1 است و

$$f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{2f_x(x_1)} = \frac{1}{2}$$



ب) به طور مشابه

$$= 2F_x(x) + 8$$

۱۵-۵) الف) متغیر تصادفی $\underline{x}$ دارای مقادیر $k = 0, 1, \ldots, 10$ می‌باشد و

$$P\{x = k\} = p_k = \binom{10}{k}\frac{1}{2^{10}} \qquad 0 \leq k \leq 10$$

و $F_x(x)$ تابع پله ای است با گسستگی در نقاط $x = k$ و مقادیر پرش برابر با احتمال p_k است.

ب) متغیر تصادفی $\underline{y} = (\underline{x} - 3)^2$ مقادیر $y = k^2$ را برای $k = 0, 1, \ldots, 7$ می‌گیرد و

احتمالات برابر $P\{y = k^2\} = q_k$ است.

۵-۲۳) اگر $\underline{x}$ دارای چگالی ریلی است، پس {(۵-۷۶) را ببینید}

$$E\{\underline{x}^2\} = 2\alpha^2 \qquad E\{\underline{x}^4\} = 8\alpha^4$$

اگر $\underline{y} = b + c\underline{x}^2$ باشد آن‌گاه

$$E\{\underline{y}\} = b + 2\alpha^2 c \qquad E\{\underline{y}^2\} = b^2 + 4\alpha^2 bc + 8\alpha^4 c^2$$

$$\sigma_y^2 = E\{\underline{y}^2\} - E^2\{\underline{y}\} = 4\alpha^4 c^2$$

۵-۲۴)

$$\underline{y} = 3\underline{x}^2 \qquad E\{\underline{x}^2\} = \sigma_x^2 = 4 \qquad E\{\underline{x}^4\} = 3\sigma_x^4 = 48$$

$$E\{\underline{y}\} = 12 \quad E\{y^2\} = 9 \times 48 = 432 \quad \sigma_y^2 = 432 - 144 = 288$$

اگر $y > 0$ باشد، آن‌گاه

$$3x^2 = y \text{ for } x = \pm\sqrt{y/3} \qquad y' = 6x$$

$$f_y(y) = \frac{24}{\sqrt{12y}}\, f_x\left(\sqrt{\frac{y}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{24\pi y}} e^{-y/24} U(y)$$

۵-۲۵)

$$X \sim B(n,p) \Rightarrow P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots n.$$

الف)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\, \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, p^{k-1} q^{n-k} \\ &= np\,(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\, \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-}{(k- \quad -k)!}\, p^{k-2} q^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2\,(p+q)^{n-} \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

ج)
$$\begin{aligned} E[X(X-1)(X-2)] &= \textstyle\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k q^{n-k} \\ &= n(n-1)(n-2)\,p^3 \textstyle\sum_{k=3}^{n} \frac{(n-3)!}{(k-3)!\,(n-k)!}\,p^{k-3}\,q^{n-k} \\ &= n(n-1)(n-2)\,p^3\,(p+q)^{n-3} \\ &= n(n-1)(n-2)\,p^3 \end{aligned}$$

$$E(X^2) = E\left(X(X-1)\right) + E(X) = n^2p^2 + npq$$

$$\begin{aligned} E(X^3) &= E\left(X(X-1)(X-2)\right) + 3E(X^2) - 2E(X) \\ &= n(n-1)(n-2)\,p^3 + 3(n^2p^2 + npq) - 2np \\ &= n^3p^3 + 3n^2p^2q + npq(q-p). \end{aligned}$$

۲۶-۵)
$$X \sim P(\lambda) \quad \Rightarrow \quad P(X=k) = e^{\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

الف)
$$E(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \lambda$$

از نامساوی چبی‌چف(۵-۸۸) داریم:

$$P\left(|X-\mu| < \lambda\right) > 1 - \frac{\sigma^2}{\lambda^2} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$
$$|X-\mu| < \lambda = |X-\lambda| < \lambda \quad \Rightarrow \quad 0 < X < 2\lambda$$

که نتیجه می‌دهد:
$$P(0 < X < 2\lambda) > 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

ب)
$$\begin{aligned} E\left[X(X-1)\right] &= \textstyle\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\,\lambda^2 \textstyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda}\,\lambda^2\,e^{\lambda} = \lambda^2. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} E\left[X(X-1)(X-2)\right] &= \textstyle\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\,\lambda^3 \textstyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^{k-3}}{(k-3)!} = \lambda^3. \end{aligned}$$

۲۷-۵) از (۴-۷۴) نتیجه می‌شود:

$$E\{\underset{\sim}{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_i f(x|A_i)P(A_i)\,dx$$

چون

$$E\{\underset{\sim}{x}|A_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|A_i)dx$$

۵-۲۸) از (۵-۸۹) با $\alpha = \sqrt{\eta}$ خواهیم داشت

$$P\{\underset{\sim}{x} \geq \sqrt{\eta}\} \leq \eta/\sqrt{\eta} = \sqrt{\eta}$$

۵-۲۹) از (۵-۸۶) با $g(x) = x^3 \quad g''(x) = 6x$:

$$E\{\underset{\sim}{x}^3\} = \eta^3 + 6\eta\frac{\sigma^2}{2} = 1120$$

۵-۳۰) الف) اگر $y = x^3, \text{ then } x = \sqrt[3]{y} \quad g'(x) = 3x^2 = 3\sqrt[3]{y^2}$

اما $f_x(x)=$ برای $10 < x < 12$ یعنی برای $10^3 < y < 12^3$ و از (۵-۱۶) داریم:

$$f_y(y) = \frac{0.5}{3\sqrt[3]{y^2}} \qquad 10^3 < y < 12^3$$

و جاهای دیگر صفر است. ب)

$E\{\underset{\sim}{x}\}=11,\ \sigma_x^2=1/3 \Rightarrow E\{x^3\} \cong 1342$

۵-۳۱) با $g(x)=1/x,\ g''(x)=2/x^3,\ \eta=100$ و (5-55) ,$\sigma=3$ نتیجه می‌گیریم که

$$E\left\{\frac{1}{\underset{\sim}{x}}\right\} \simeq \frac{1}{100} + \frac{9}{2} \times \frac{2}{100^3} = 0.010009$$

۵-۳۲)

$$\frac{\partial|x-a|}{\partial a} = \begin{cases} 1 & x < a \\ -1 & x > a \end{cases} \qquad \text{If } I(a) = E\{|\underset{\sim}{x}-a|\}$$

آن‌گاه

الف)

$$\frac{dI(a)}{da} = E\,\frac{\partial|\underset{\sim}{x}-a|}{\partial a} = 1\ P\{\underset{\sim}{x} < a\} - 1\ P\{\underset{\sim}{x} > a\} = 2\ F(a) - 1$$

$$I(a) = I(m) + \int_m^a I'(\alpha)d\alpha = I(m) + \int_m^a [2\ F(\alpha) - 1]d\alpha$$

چون

$$= E\{|\underset{\sim}{x} - m|\} - 2\int_m^a x\ f(x)c$$

$$\int_m^a F(\alpha)d\alpha = a\,F(a) - m\,F(m) - \int_m^a x f(x)dx$$

$$F(m) = \frac{1}{2} \qquad \int_m^a f(x)dx = F(a) - F(m)$$

ب) $I(a)=E\{|\underline{x} - a|\}$ حداقل است اگر

$$I'(a) = 2F(a) - 1 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \text{if } F(a) = \frac{1}{2} \quad a = m$$

۵-۳۳)

$$E\{|\underline{x}|\} = \int_0^\infty x f(x)dx - \int_{-\infty}^0 x f(x)dx$$

$$\eta = E\{\underline{x}\} = \int_0^\infty x f(x)dx + \int_{-\infty}^0 x f(x)dx$$

$$\frac{E\{|\underline{x}|+\eta\}}{2} = \int_0^\infty x f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x\, e^{-(x-\eta)^2/2\sigma^2}dx$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (x+\eta)e^{-(x-\eta)^2/2\sigma^2}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\eta^\infty y\, e^{-y^2/2\sigma^2}dy = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\eta^2/2\sigma^2}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(x-\eta)^2/2\sigma^2}dx = G(\frac{\eta}{\sigma})$$

با ضرب کردن آخرین خط در η و تفریق از خط چهارم، داریم:

$$\frac{E\{|x|+\eta\}}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\eta^2/2\sigma^2} + G(\frac{\eta}{\sigma})$$

۵-۳۴) اثبات در فصل (۱۴-۳): {(۱۴-۱۰۰) را ببینید}

۵-۳۵) الف) این از (۵-۸۹) نتیجه می‌شود.

ب) $e^{sx} \geq e^{sA}$ است اگر و فقط اگر $x \geq A$ for $s>0$ و $x \leq A$ for $s < 0$

۵-۳۶) اثبات نامساوی لیاپانوف را ببینید (فصل ۵ معادله (۵-۹۲).)

۵-۳۷) الف) اگر $\Phi(\omega)= e^{-\alpha|\omega|}$ آن‌گاه {(۵-۳۲) را ببینید}

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\omega|}\, e^{j\omega x}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\omega x\, e^{-\alpha\omega}\,d\omega = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}$$

ب) اگر $f(x)= \frac{\alpha}{2}\, e^{-\alpha|x|}$ آن‌گاه {(۵-۹۴) را ببینید.}

$$\Phi(\omega) = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|}\, e^{-j\omega x}\,dx = \alpha\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\,\cos\omega x\,dx = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

۵-۳۸) الف) از مقایسه معادله (۴-۳۴) با (۵-۱۰۶) و مثال ۵-۲۹ نتیجه می‌گیریم که

$$X \sim G(\alpha,\beta) \quad \Rightarrow \quad \phi_X(\omega) = (1-j\beta\omega)^{-\alpha}$$

$$\phi'_X(\omega) = -\alpha(1-j\beta\omega)^{-(\alpha+1)}\,(-j\beta)$$

بنابراین

$$E(X) = \frac{1}{j}\,\phi'_X(0) = \alpha\,\beta.$$

به طور مشابه

$$\phi''_X(\omega) = j\alpha\beta(\alpha+1)\,(1-j\beta\,\omega)^{-(\alpha+2)}\,(j\beta)$$

از آن جایی که

$$E(X^2) = \frac{1}{j^2}\,\phi''_X(0) = \alpha\beta^2\,(\alpha+1).$$

بنابراین

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha\beta^2.$$

ب)

$$X \sim \chi^2(n) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n}{2}, \quad \beta = 2$$

در گامای (α,β) . این نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
\phi_X(\omega) &= (1-j2\omega)^{-n/2}\\
E(X) &= n\\
\mathrm{Var}(X) &= 2n.
\end{aligned}$$

ج)

$$X \sim B(n,p).$$

از قسمت الف و ب مساله ۵-۲۵

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ \mathrm{Var}(X) &= E\left(X(X-1)\right) + E(X) = npq. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \phi_X(\omega) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} e^{jk\omega}\, P(X=k) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p\, e^{j\omega})^k\, q^{n-k} = (pe^{j\omega}+q)^n. \end{aligned}$$

د)

$$X \sim N\ Binomial\,(r,p).$$

از (۴-۶۴) داریم:

$$\begin{aligned} \phi_X(\omega) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{jk\omega}\, P(X=k) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} p^r\, (qe^{j\omega})^k \\ &= p^r \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-qe^{j\omega})^k \\ &= p^r\,(1-qe^{j\omega})^{-r}. \end{aligned}$$

۵-۳۹)

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p\, q^k z^k = \frac{p}{1-qz} \qquad q = 1-p$$

$$\Gamma'(z) = \frac{pq}{(1-qz)^2} \qquad \Gamma'(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} = \eta_x$$

$$\Gamma''(z) = \frac{2pq^2}{(1-qz)^3} \qquad \Gamma''(1) = \frac{2q^2}{p^2} = m_2 - m_1$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = 2\frac{q^2}{p^2} + m_1 - m_1^2 = \frac{q}{p^2}$$

۵-۴۰)

$$\Gamma(z) = p^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-q)^k\, z^k = p^n (1-qz)^{-n}$$

(توزیع دوجمله‌ای با نمای منفی)

$$\Gamma'(z) = \frac{n\,p^n q}{(1-qz)^{n+1}} \qquad \Gamma'(1) = \frac{nq}{p} = \eta_x$$

$$\Gamma''(z) = \frac{n(n+1)p^n q^2}{(1-qz)^{n+2}} \qquad \Gamma''(1) = \frac{n(n+1)q^2}{p^2} = m_2 - m_1$$

$$\sigma_x^2 = \Gamma''(1) + m_1 - m_1^2 = \frac{nq}{p^2}$$

۵-۴۱) داریم:

$$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, \quad k = r, r+1, \cdots$$

اگر $k = n + r$ باشد، آن گاه

$$\begin{aligned}
P(X=n+r) &= \binom{n+r-1}{r-1} p^r q^n, \quad n = 0,1,2,\cdots \\
&= \frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!} p^r (1-p)^n \\
&= \frac{1}{n!} \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots(r)}{r^n} [r(1-p)]^n p^r \\
&= \frac{\lambda^n}{n!} \left\{ \left(1+\frac{n-1}{r}\right)\left(1+\frac{n-2}{r}\right)\cdots \right\} \left(1-\frac{r(1-p)}{r}\right)^r \\
&= \frac{\lambda^n}{n!} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{n-k}{r}\right) \right\} \left(1-\frac{\lambda}{r}\right)^r,
\end{aligned}$$

در جایی که $\lambda = r(1-p)$ است. بنابراین

$$\lim_{r\to\infty} P(X=n+r) = \frac{\lambda^n}{n!} \left\{ \lim_{r\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{n-k}{r}\right) \right\} \lim_{r\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{r}\right)^r$$

$$\to \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \sim P(\lambda).$$

(۴۲-۵

$$E\{e^{s\underline{x}}\} = e^{s\eta}\, E\{e^{s(\underline{x}-\eta)}\} = e^{s\eta}\, E\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}\, (\underline{x}-\eta)^n\right\}$$

$$= e^{s\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}\, \mu_n$$

۵-۴۳) اگر $\Phi(\omega_1) = 0$ آن‌گاه {همچنین (۹-۱۷۶) را ببینید}

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{j\omega_1 x}) f(x)dx = 0, \text{ hence, } f(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty} p_n \delta(x - \frac{2\pi n}{\omega_1})$$

۵-۴۴) الف) اگر $\eta = 0$ باشد، آن‌گاه $\lambda_1 = \eta = 0 \qquad m_n = \mu_n$

$$\Phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} s^n \qquad \Psi(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} s^n$$

$$1 + \frac{\mu_2}{2!}s^2 + \frac{\mu_3}{3!} s^3 + \frac{\mu_4}{4!} s^4 + \cdots = \exp\left\{\frac{\lambda_2}{2!} s^2 + \frac{\lambda_3}{3!} s^3 + \frac{\lambda_4}{4!} s^4 + \cdots\right\}$$

با بسط دادن و مساوی قرار دادن با s به دست می‌آوریم:

$$\mu_2 = \lambda_2 \qquad \mu_3 = \lambda_3 \qquad \frac{\mu_4}{4!} = \frac{\lambda_4}{4!} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda_2}{2!}\right)^2$$

ب) اگر $\underline{y}$ به صورت $N(0;\sigma_y)$ باشد آن‌گاه

$$\Psi_y(s) = \frac{\lambda_2}{2} s^2 \text{ , hence, } \lambda_n = 0 \text{ for } n \geq 3$$

(۴۵-۵

$$P\{\underline{y} = 0\} = P\{\underline{x} \leq 1\} = p_o + p_1$$

$$P\{\underline{y} = k\} = P\{\underline{x} = k + 1\} = p_{k+1} \qquad k \geq 1$$

$$\Gamma_y(z) = p_o + p_1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1} z^k = p_o + z^{-1}[\Gamma_x(z) - p_o]$$

$$\eta_y = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_{k+1} = \sum_{r=1}^{\infty} r\, p_r - \sum_{r=1}^{\infty} p_r = \eta_x - 1 + p_0$$

$$E\{\underline{y}^2\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, p_{k+1} = \sum_{r=1}^{\infty} (r-1)^2\, p_r = E\{\underline{x}^2\} - 2\eta_x + 1 - p_0$$

(۴۶-۵

$$0 \le E\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, e^{j\omega_i \underline{x}}\right|^2\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j^*\, e^{j(\omega_i-\omega_j)\underline{x}}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j^*\, \Phi(\omega_i - \omega_j)$$

۴۷-۵) از فرض نتیجه می‌شود که

$$g'(-x) = -g'(x) \qquad g''(x) \ge 0 \qquad f(x-\eta) = f(\eta-x)$$

بنابراین، اگر $I(a) = E\{g(\underline{x}-a)\}$ باشد آن‌گاه

$$I'(a) = -\int_{-\infty}^{\infty} g'(x-a) f(x)\,dx \qquad I'(\eta) = 0$$

$$I''(a) = \int_{-\infty}^{\infty} g''(x-a) f(x)\,dx \ge 0 \qquad \text{all } a$$

بنابراین، $I(a)$ برای $a = \eta$. حداقل است.

(۴۸-۵

$$f(x,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\, e^{-x^2/2v}$$

$$\sqrt{2\pi}\,\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-1 + x^2/v}{2v\,\sqrt{v}}\, e^{-x^2/2v}$$

$$\sqrt{2\pi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1 + x/.}{v\,\sqrt{v}}\, e^{-x^2/2v}$$

بنابراین(همچنین (۶-۱۹۸)-(۶-۱۹۹) را ببینید)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \qquad (1)$$

الف) از انتگرال‌گیری جزء به جزء و استفاده از (۱) و با فرض این‌که $g^{(k)}(x)f(x) \to 0$

وقتی $|x| \to \infty,\ k = 0,\ 1,\ 2$ نتیجه می گیریم که

$$E\{g''(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 g}{dx^2} f dx = \int_{-\infty}^{\infty} g\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} g\, \frac{\partial f}{\partial v}\, dx$$

$$= 2\,\frac{d}{dv}\int_{-\infty}^{\infty} g\ f dx = 2\,\frac{d}{dv}\, E\{g(\underset{\sim}{x})\}$$

ب) گشتاور $\mu_n(u) = E\{\underset{\sim}{x}^n\}$ از $\underset{\sim}{x}$ وابسته به واریانس v از $\underset{\sim}{x}$ و (۱) به دست می‌آید.

$$\mu'_n(v) = \frac{d}{dv}\, E\{\underset{\sim}{x}^n\} = \frac{1}{2}\, E\{n(n-1)\underset{\sim}{x}^{n-2}\} = \frac{n(n-1)}{2}\, \mu_{n-2}(v)$$

علاوه بر این، $\mu_n(0) = 0$ است. چون اگر $v = 0$ باشد، آن گاه $\underset{\sim}{x} = 0$ خواهد بود.

پس

$$\mu_n(v) = \frac{n(n-1)}{2}\int_0^v \mu_{n-2}(\beta)\, d\beta$$

۵-۴۹) تابع

$$\Gamma(e^{j\omega}) = E\{e^{jx\omega}\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\ e^{jk\omega}$$

دوره ای با دوره تناوب 2π و ضرایب سری فوریه $p_k = E\{\underset{\sim}{x} = k\}$ است.

۵-۵۰) پیشامد $\{X = 1\}$ با اجتماع $“TH \cup HT”$ داده شده است. به طور مشابه،

پیشامد $“X = k”$ با اجتماع از اشتراک پیشامدهای

$$(k \text{ "}T\text{"s followed by "}H\text{" or } k \text{ "}H\text{"s followed by "}T\text{"})$$ داده شده

است.

$$\text{"}TT\cdots TTH\text{"} \cup \text{"}HH\cdots HHT\text{"}, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(\text{"}TT\cdots TH\text{"} \cup \text{"}HH\cdots HT\text{"}) \\ &= P(TT\cdots TH) + P(HH\cdots HT) = q^k p + p^k q, \quad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kq^k p + \sum_{k=1}^{\infty} kp^k q = pq\left\{\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}\right\} \\ &= pq\left\{\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=1}^{\infty} q^k + \frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=1}^{\infty} p^k\right\} = pq\left\{\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{1-q}\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{1-p}\right)\right\} \\ &= pq\left\{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right\} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

۵-۵۱) الف) وقتی نمونه‌ها با جایگذاری باشند، احتمال هر مورد خراب با رابطه

$p = \dfrac{M}{N} < 1 \quad \textbf{(constant)}$ و خراب نبودن با $1 > q = 1 - p = \dfrac{N-M}{M} < 1$ داده می‌شود:

در این مورد (با جایگذاری)، $\dbinom{n}{k}$ راه‌های ممکن از مرتب کردن k مورد خراب میان n مورد انتخاب شده است. و هر مورد چنین مرتب شده دارای احتمال $p^k q^{n-k}$ است. این نتیجه می‌دهد:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots n$$

که تعریف توزیع دوجمله ای است.

ب) اگر نمونه ها بدون جایگزینی کشیده شوند، در این صورت $\dbinom{M}{k}$ راه ممکن از k مورد انتخاب خراب از مجموع M مورد خراب است، و $\dbinom{N-M}{n-k}$ راه ممکن انتخاب $n-k$ مورد" خوب" از $N-M$ مورد" خوب" مستقل است. از این نتیجه می‌شود

$$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$$

برای جمع بودن اعداد راه‌های انتخاب k خراب و $n-k$ مورد "خوب" از زیرنمونه از M و $N-M$ مورد تعریفی (راه‌های دلخواه). اما آن ها مجموع از $\binom{N}{n}$ راه انتخاب شده از n مورد در میان N مورد است. این نتیجه می‌دهد:

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

وقتی $0 \le k \le M$, $n-k \ge 0$, $n-k \le N-M$ یعنی

$0 \le k \le M, k \le n, k \ge n+M-N$

ج) از (ب)

$$P(X=k)=\frac{M!}{k!(M-k)!}\,\frac{(N-M)!}{(n-k)!(N-M-n+k)!}\,\frac{n!(N-n)!}{N!}$$

$$=\binom{n}{k}\frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)}\,\frac{(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+k+1)}{(N-k)(N-k-1)\cdots(N-n+1)}$$

$$\simeq\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots n$$

وقتی $N \to \infty, M \to \infty$ مثل این‌که $M/N \to p$ و $n \ll N$. بنابراین

$$P(X=k)\to \text{Binomial}(n,p=M/N)$$

تحت شرایط ذکر شده در بالا است.

۵-۵۲) الف) با اشاره به بحث موجود در مساله (۵-۵۱) الف) اگر نمونه با جایگزینی انجام شده باشد،

$$p=\frac{n}{n+m}$$

تعریف احتمال انتخاب مهره سفید در هر آزمایش است. احتمال پیشامد "$\mathbf{x}=k$" با $r-1$ مهره سفید در میان اولین $k-1$ آزمایش دارای توزیع دوجمله‌ای است که با $\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{k-r}$ داده می‌شود. بنابراین

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{k-r}p=\binom{k-1}{r-1}p^{r}q^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots$$

که تعریف توزیع دوجمله‌ای منفی است.

ب) اگر نمونه با جایگذاری انجام شده باشد، پس راه‌های مطلوب انتخاب توپ‌های سفید به وسیله رابطه زیر داده می‌شود:

(۱) $\binom{k-1}{r-1}$ راه انتخاب $r-1$ توپ سفید از میان اولین $k-1$ آزمایش

(۲) یک راه انتخاب (r امین) توپ سفید در k امین آزمایش

(۳) $\binom{m+n-k}{n-r}$ راه انتخاب $n-r$ توپ سفید از میان $m+n-k$ توپ است.

از این نتیجه می شود $\binom{k-1}{r-1}\cdot 1\cdot\binom{m-n-k}{n-r}$ مجموع اعداد راه های دلخواه انتخاب توپ های سفید است. چون $n+m$ توپ وجود دارد، انتخاب n توپ سفید به $\binom{n+m}{n}$ طریق انجام می‌شود. در نتیجه داریم:

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}\frac{\binom{m+n-k}{n-r}}{\binom{n+m}{n}},\qquad k=r,r+1,\cdots$$

ج) از (ب) می توان نوشت

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}\frac{(m+n-k)!}{(n-r)!\,(m-k+r)!}\frac{n!m!}{(m+n)!}$$

$$=\binom{k-1}{r-1}\left(\frac{n}{m+n}\right)\left(\frac{n-1}{m+n-1}\right)\cdots\left(\frac{n-r+1}{m+n-r+1}\right)\left(\frac{m!(m+n-k)!}{(m+n-r)!\,(m-k+r)!}\right)$$

$$\simeq\binom{k-1}{r-1}\left(\frac{n}{m+n}\right)^{r}\left(\frac{m}{m+n-r}\right)\left(\frac{m-1}{m+n-r-1}\right)\cdots\left(\frac{m-k+r+1}{m+n-k+1}\right)$$

$$\simeq\binom{k-1}{r-1}\left(\frac{n}{m+n}\right)^{r}\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-r}\text{ as }m+n\to\infty$$

$$=\binom{k-1}{r-1}p^{r}q^{k-r},\qquad k=r,r+1,\cdots,\quad q=1-p$$

$$\sim \mathrm{NB}\left(r,p=n/(n+m)\right).$$

۶-۱) الف) باتوجه به تعریف

$$Z = X + Y$$

مر دو $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ احتمال‌های تصادفی مثبت هستند بنابراین (با استفاده از معادله(۶-۴۵)

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f_{XY}(z-y, y)dy = \int_0^z e^{-(z-y+y)}dy \\ &= z\,e^{-z}U(z). \end{aligned}$$

ب)

$$Z = X - Y$$

دامنه $\mathbf{Z}$ بالای محور تقارن واقعی برای احتمالات تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ است(معادله (۶-۵۵) را ببینید)

$$F_Z(z) = \begin{cases} \int_0^\infty \int_0^{z+y} f_{XY}(x,y)dx\,dy, & z > 0 \\ \int_{-z}^\infty \int_0^{z+y} f_{XY}(x,y)dx\,dy, & z < 0 \end{cases}$$

از تفریق کردن به دست می‌آوریم:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^\infty f_{XY}(z+y,y)\,dy, & z > 0 \\ \int_{-z}^\infty f_{XY}(z+y,y)\,dy, & z < 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-(z+y+y)}\,dy = e^{-z}\int_0^\infty e^{-2y}\,dy = \frac{1}{2}e^{-z}, & z > 0 \\ \int_{-z}^\infty e^{-(z+y+y)}\,dy = e^{-z}\int_{-z}^\infty e^{-2y}\,dy = \frac{1}{2}e^{z}, & z < 0 \end{cases}$$

یا

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}, \qquad -\infty \le z \le \infty.$$

ج)

$$Z = XY.$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{XY \le z\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^{z/y} f_{XY}(x,y)dx\,dy \end{aligned}$$

یا (معادله (۶-۱۴۸)را ببینید)

$$f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{1}{y} f_{XY}(\frac{z}{y}, y) dy = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-((z/y)+y)} dy$$

د)

$$Z = X/Y$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\tfrac{X}{Y} \leq z\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^{yz} f_{XY}(x,y) dx\, dy \end{aligned}$$

(با استفاده از معادله (۶-۶۰)

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty y f_{XY}(yz, y) dy = \int_0^\infty y e^{y(z+1)} dy = \int_0^\infty y e^{(1+z)y} \\ &= \left[y \frac{e^{-(1+z)y}}{-(1+z)}\right]_0^\infty + \left(\frac{1}{1+z}\right) \int_0^\infty e^{(1+z)y} dy \\ &= \left(\frac{1}{1+z}\right) \left[\frac{e^{-(1+z)y}}{-(1+z)}\right]_0^\infty = \frac{1}{(1+z)^2} U(z) \end{aligned}$$

ه)

$$Z = \min\,(X, Y)$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{\min\,(X,Y) \leq z\} \\ &= 1 - P\{Z > z, Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)]\,[1 - F_Y(z)] \\ &= F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)\,F_Y(z) \end{aligned}$$

(معادله (۶-۸۱)را ببینید)

$$f_Z(z) = f_X(z) + f_Y(z) - F_X(z) f_Y(z) - f_X(z) F_Y(z).$$

داریم:

$$f_X(z) = f_Y(z) = e^{-z} U(z)$$

بنابراین

$$F_X(z) = \int_0^z e^{-x}dx = (1-e^{-z})\,U(z) = F_Y(z)$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= [e^{-z} + e^{-z} - 2(1-e^{-z})\,e^{-z}]U(z) \\ &= 2e^{-z}\,[1 - 1 + e^{-z}]\,U(z) \\ &= 2e^{-2z}\,U(z) \sim \text{Exponential (2).} \end{aligned}$$

$$Z = \max(X, Y)$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{\max(X,Y) \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} \\ &= P\{X \le z\}\,P\{Y \le z\} = F_X(z)\,F_Y(z) \\ f_Z(z) &= F_X(z)\,f_Y(z) + f_X(z)\,F_Y(z) \\ &= e^{-z}\,(1-e^{-z}) + e^{-z}\,(1-e^{-z}) \\ &= 2e^{-z}\,(1-e^{-z})\,U(z) \end{aligned}$$

ن)

$$Z = \frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}, \quad 0 < z < 1$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\left\{\left(\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)} \le z\right) \cap ((X \le Y) \cup (X > Y))\right\} \\ &= P\left\{\left(\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)} \le z\right) \cap (X \le Y)\right\} + P\left\{\left(\frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)} \le z\right) \cap (X > Y)\right\} \\ &= P\{\frac{X}{Y} \le z, X \le Y\} + P\{\frac{Y}{X} \le z, X > Y\} \\ &= P\{X \le Yz, X \le Y\} + P\{Y \le Xz, X > Y\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^{yz} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + \int_0^\infty \int_0^{xz} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx \quad lx \\ f_Z(z) &= \int_0^\infty y\,f_{XY}(yz,y)dy + \int_0^\infty x f_{XY}(x,xz)dx \\ &= \int_0^\infty y\,f_{XY}(yz,y)dy + \int_0^\infty y\,f_{XY}(y,yz)dy \\ &= \int_0^\infty y\left(e^{-(yz+y)} + e^{-(y+yz)}\right)dy \\ &= 2\int_0^\infty ye^{-y(1+z)}dz = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+z)^2}, & 0 \le z \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

۲-۶)

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{a^2}, \qquad 0 < x \le a, \quad 0 < y \le a$$

الف)

$$F_Z(z) = P\left\{\frac{X}{Y} \le z\right\} = P\{X \le zY\}$$

(۱) $z < 1$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X \le zY\} \\ &= \int_0^a \int_0^{zy} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}\, dx\, dy = \frac{z}{2}, \quad z \le 1 \end{aligned}$$

(۲) $z \ge 1$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X \le zY\} \\ &= 1 - \int_0^a \int_0^{x/z} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}\, dy\, dx \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{x}{z}\, dx = 1 - \frac{1}{2z} \quad z > 1 \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z \le 1 \\ \frac{1}{2z^2}, & z > 1 \end{cases}$$

ب)

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \le z) = P\left\{\frac{Y}{X+Y} \le z\right\} \\ &= P\left\{\frac{X}{Y} \ge \frac{1}{z} - 1\right\} = 1 - P\left(\frac{X}{Y} \le \frac{1-z}{z}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}\right), & 0 < z \le 1/2 \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{z}\right), & 1/2 < z < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-z)^2}, & 0 < z \le 1/2 \\ \frac{1}{2z^2}, & 1/2 < z < 1 \end{cases}$$

ج)

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{|X-Y| \le z\} \\
&= P\{\{|X-Y| \le z\} \cap (X \ge Y)\} + P\{\{|X-Y| \le z\} \cap (X < Y)\} \\
&= P\{X - Y \le z, X \ge Y\} + P\{Y - X \le z, X < Y\} \\
&= \int_0^\infty \int_y^{y+z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + \int_0^\infty \int_x^{x+z} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^\infty \int_y^{y+z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + \int_0^\infty \int_y^{y+z} f_{XY}(y,x)\,dx\,dy \\
&= \int_0^\infty \int_y^{y+z} \{f_{XY}(x,y) + f_{XY}(y,x)\}\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

به طور کلی

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty \frac{d}{dz} \int_y^{y+z} f_{XY}(x,y) + f_{XY}(y,x)\,dx\,dy \\
&= \int_0^\infty \{f_{XY}(y+z,y) + f_{XY}(y,y+z)\}\,dy.
\end{aligned}$$

این‌جا

$$X \sim U(0,a), \qquad Y \sim U(0,a)$$

$$F_Z(z) = 1 - \frac{1}{a^2} \cdot 2 \cdot \frac{(a-z)^2}{2} = 1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^2$$

و

$$f_Z(z) = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{z}{a}\right) \qquad 0 \le z \le a.$$

۳-۶)

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\} \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{z^2}{2}, \quad -1 < z < 0,
\end{aligned}$$

(که معرف ناحیه زیر خط $X + Y = z$ است)

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\} \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{z^2}{2}, \quad 0 \le z < 1
\end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} -z, & -1 \le z < 0 \\ z, & 0 \le z < 1 \end{cases}$$

۶-۴)

$$Z = X - Y$$

برای $z < 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\ &= \int_0^{(1+z)/2} \int_{x-z}^{1-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{(1+z)/2} \int_{x-z}^{1-x} 6x\,dy\,dx \\ &= \int_0^{(1+z)/2} 6x\,[y]_{x-z}^{1-x}\,dx = \int_0^{(1+z)/2} 6x(1-x-x+z)\,dx \\ &= 6\left[(1+z)\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{(1+z)/2} = 6\left[\frac{(1+z)^3}{8} - \frac{(1+z)^3}{12}\right] \\ &= \frac{(1+z)^3}{4}, \quad z \le 0. \end{aligned}$$

برای $z > 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = 1 - P\{Z > z\} \\ &= 1 - \int_0^{(1-z)/2} \int_{z+y}^{1-y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 - \int_0^{(1-z)/2} \int_{z+y}^{1-y} 6x\,dy \\ &= 1 - \int_0^{(1-z)/2} \left[\frac{6x^2}{2}\right]_{z+y}^{1-y} dy = 1 - 3\int_0^{(1-z)/2} \left[(1-y)^2 - (z-y)^2\right] dy \\ &= 1 - 3\,(1+z)\left[\frac{(1-z)^2}{2} - \frac{(1-z)^2}{4}\right] = 1 - \frac{3}{4}\,(1+z)(1-z)^2 \quad z \le 0. \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{4}\,(1-z)(1+3z), & 0 \le z \le 1 \\ \frac{3}{4}\,(1+z)^2, & -1 < z < 0 \end{cases}$$

۶-۵) الف) برای جواب مثال ۶-۱۵ را ببینید.

ب) برای جواب مثال ۶-۱۴ را ببینید.

ج)

$$U = X - Y \sim N(0, 2\sigma^2)$$

چون ترکیب خطی متغیرهای تصادفی مشترک گوسی، متغیاهای تصادفی گوسی هستند (متن معادله (۶-۱۲۰) را ببینید). این‌جا

$$Var(U) = Var(X) + Var(Y) = 2\sigma^2.$$

۶-۶)

$$Z = XY$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(XY \le z) = 1 - P(XY > z) \\ &= 1 - \int_z^1 \int_{z/y}^1 f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \\ f_Z(z) &= 1 + \int_z^1 \frac{1}{y} f_{XY}(z/y, y)\,dy = 1 + \int_z^1 \left\{ \frac{2}{y} - \frac{2z}{y^2} \right\} dy \\ &= 1 - 2\ln z + 2z, \quad 0 \le z \le 1 \end{aligned}$$

۶-۷) الف)

$$Z_1 = X + Y$$

$$F_{Z_1}(z) = P(X+Y \le z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z \int_0^{z-y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy, & 0 < z < 1 \\ \displaystyle 1 - \int_{z-1}^1 \int_{z-y}^1 f_{XY}(x,y)\,dx\,dy, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z f_{XY}(z-y, y)\,dy, & 0 < z < 1 \\ \displaystyle\int_{z-1}^1 f_{XY}(z-y, y)\,dy, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} z^2, & 0 < z < 1 \\ z(2-z), & 1 < z < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ب)

$$Z_2 = XY$$

$$F_{Z_2}(z) = P(XY \le z) = 1 - \int_z^1 \int_{z/y}^1 f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\begin{aligned} f_{Z_2}(z) &= \int_z^1 \frac{1}{y} f_{XY}(z/y, y)\,dy = \int_z^1 \frac{1}{y}\left(\frac{z}{y} + y\right)\,dy \\ &= 2(1-z), \quad 0 < z < 1 \end{aligned}$$

ج)

$$Z_3 = \frac{Y}{X}$$

$$F_{Z_3}(z) = P(Y/X \le z) = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{zx} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx, & 0 < z < 1 \\ 1 - \int_0^1 \int_0^{y/z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy, & z > 1 \end{cases}$$

$$f_{Z_3}(z) = \begin{cases} \int_0^1 x\, f_{XY}(x, zx)\,dx, & 0 < z < 1 \\ \int_0^1 \frac{y}{z^2} f_{XY}(y/z, y)\,dy, & z > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1+z}{3}, & 0 < z < 1 \\ \frac{1+z}{3z^3}, & z > 1 \end{cases}$$

ج)

$$Z_4 = Y - X$$

$$F_{Z_4}(z) = P(Y - X \le z) = \begin{cases} 1 - \int_z^1 \int_0^{y-z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy & 0 < z < 1 \\ \int_0^{z+1} \int_{y-z}^1 f_{XY}(x,y)\,dx\,dy, & -1 < z < 0 \end{cases}$$

$$
f_{Z_4}(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_z^1 f_{XY}(y-z,y)\,dy, & 0<z<1 \\ \displaystyle\int_0^{z+1} f_{XY}(y-z,y)\,dy, & -1<z<0 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 1-z, & 0<z<1 \\ 1+z, & -1<z<0 \end{cases} = 1-|z|, \quad |z|<1
$$

۶-۸)

$$
F_Z(z) = P(X+Y \le z)
$$

$$
= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{z/3}\int_{2y}^{z-y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \frac{z^2}{6}, & 0<z<2 \\ \displaystyle 1-\int_{2z/3}^{2}\int_{z-x}^{x/2} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = 2z-\frac{z^2}{3}-2, & 2<z<3 \end{cases}
$$

بنابراین

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{z/3} f_{XY}(z-y,y)\,dy & 0<z<2 \\ \displaystyle\int_{2z/3}^{2} f_{XY}(x,z-x)\,dx & 2<z<3 \end{cases}
$$

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}z, & 0<z<2 \\ 2-\frac{2z}{3}, & 2<z<3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

۶-۹)الف)

$$
Z = \frac{X}{Y}, \qquad z \ge 1
$$

$$F_Z(z) = P(X \leq Yz) = \int_0^1 \int_{x/z}^{x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$$

$$f_Z(z) = \int_0^1 \frac{x}{z^2} f_{XY}(x, x/z)\, dx = \frac{1}{z^2}, \quad z \geq 1$$

ب)

$$W = XY$$

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) = P(XY \leq w) = 1 - P(XY > w) \\ &= 1 - \int_{\sqrt{w}}^1 \int_{w/x}^{x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \int_{\sqrt{w}}^1 \frac{1}{x} f_{XY}(x, w/x)\, dx = \int_{\sqrt{w}}^1 \frac{2}{x}\, dx \\ &= \ln(1/w), \quad 0 < w \leq 1 \end{aligned}$$

۶-۱۰) الف)

$$Z = X + Y$$

$$F_Z(z) = \int_0^{z/2} \int_x^{2-x} f_{XY}(x,y)\, dx = \frac{z^2}{4}, \quad 0 < z < 2$$

$$f_Z(z) = \frac{z}{2}, \qquad 0 < z < 2$$

ب)

$$W = X - Y$$

$$F_W(w) = \frac{1}{2}(2+w)(1+\frac{w}{2}) = \left(1 + \frac{w}{2}\right)^2$$

$$f_W(w) = \begin{cases} 1 + \frac{w}{2}, & -2 < w < 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

۶-۱۱) الف)

تابع مشخصه $X + Y$ به وسیله رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(\omega) &= \phi_X(\omega)\, \phi_Y(\omega) = \frac{1}{(1-j\omega\beta)^\alpha} \cdot \frac{1}{(1-j\omega\beta)^\alpha} \\ &= \frac{1}{(1-j\omega\beta)^{2\alpha}} \sim \text{Gamma}\,(2\alpha, \beta) \end{aligned}$$

ب)

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{(xy)^{(\alpha-1)}}{(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha})^2}\, e^{(x+y)/\beta}, \quad x>0,\, y>0$$

بیایید

$$Z = \frac{X}{Y}$$

با استفاده (معادله ۶–۶۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^{\infty} y\, \frac{(y^2 z)^{(\alpha-1)}}{(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha})^2}\, e^{-(1+z)y/\beta}\, dy \\
&= \frac{z^{(\alpha-1)}}{(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha})^2} \int_0^{\infty} y^{(2\alpha-1)}\, e^{-(1+z)y/\beta}\, dy \\
&= \frac{z^{(\alpha-1)}}{(\Gamma(\alpha))^2\, \beta^{2\alpha}}\, \frac{\beta^{(2\alpha-1)}}{(1+z)^{2\alpha-1}}\, \frac{\beta}{(1+z)} \int_0^{\infty} u^{2\alpha-1}\, e^{-u}\, du \\
&= \frac{(\Gamma(2\alpha))\; z^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))^2\,(1+z)^{2\alpha}}, \quad z>0
\end{aligned}$$

(همچنین مثال ۶–۲۷ را برای جواب ببینید)

ج)

$$W = \frac{X}{X+Y} = \frac{X/Y}{X/Y+1} = \frac{Z}{Z+1}$$

$$F_W(w) = P\left(\frac{Z}{Z+1} \le w\right) = P\left(Z \le \frac{w}{1-w}\right) = F_Z\left(\frac{w}{1-w}\right)$$

این نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= \frac{1}{(1-w)^2}\, f_Z\left(\frac{w}{1-w}\right) \\
&= \frac{\Gamma(2\alpha)}{(\Gamma(\alpha))^2}\, w^{\alpha-1}\,(1-w)^{\alpha-1} \\
&\sim\; Beta\,(\alpha,\alpha)
\end{aligned}$$

در جایی که ما از نتایج (ب) در بالا استفاده کنیم.

۶–۱۲)

$X \sim U(0,1), Y \sim U(0,1), \quad X, Y$ مستقل هستند و

$$U = X + Y, \qquad V = X - Y \;\Rightarrow\; |v| < u < 2.$$

U و V یکی از قسمت‌های جواب داده شده به وسیله رابطه زیر را دارند

$$x_1 = \frac{u+v}{2}, y_1 = \frac{u-v}{2}.$$

هم چنین ژاکوبین با رابطه زیر داده شده است:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

از آن جا که

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{|J|} f_{XY}(x_1, y_1) = \frac{1}{2}, \quad 0 < |v| < u < 2$$

(۱۳-۶

$$f_{XY}(x,y) = \frac{xy}{\sigma^4} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}, \quad x, y \geq 0$$

$$Z = \frac{X}{Y}$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X/Y \leq z) = \int_0^\infty \int_0^{zy} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy.$$

از این به دست می‌آوریم که تابع چگالی از z عبارت است از

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty y\, f_{XY}(zy, y)\, dy = \int_0^\infty \frac{zy^3}{\sigma^4} e^{-(z^2y^2+y^2)/2\sigma^2}\, dy \\ &= \frac{z}{\sigma^4}\int_0^\infty y^3 e^{-y^2(z^2+1)/2\sigma^2}\, dy \quad \text{Let, } t = y^2(z^2+1)/2\sigma^2 \\ &= \frac{2z}{(z^2+1)^2}\int_0^\infty t\, e^{-t}\, dt = \frac{2z}{(z^2+1)^2}, \quad 0 \leq z \leq \infty. \end{aligned}$$

(۱۴-۶

$$\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y} \qquad\qquad f_z(z) = f_x(z) * f_y(z)$$

برای $z > 0$

$$c^2 z\, e^{-cz} = \int_0^z c\, e^{-c(z-y)}\, f_y(y)\,dy$$

$$c\,z = \int_0^z e^{cy}\, f_y(y)\,dy \qquad c = e^{c\,z}\, f_y(z)$$

(تفاضل). بنابراین، $f_y(z) = c\, e^{-cz}$ و صفر برای $z < 0$

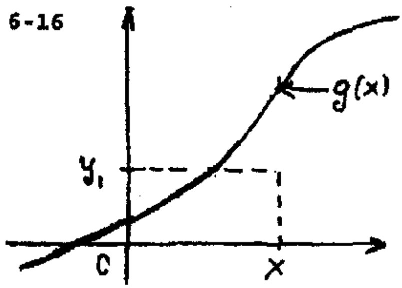
(۱۵-۶

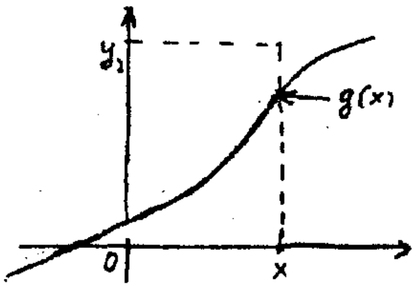
$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z-x)\,dx = \int_{z-1}^{z} f_x(x)\,dx = F_x(z) - F_x(z-1)$$

چون $f_y(z-x) = 1 \text{ for } z-1 < x < z$ وجاهای دیگر صفر است.

(۱۶-۶

6-16





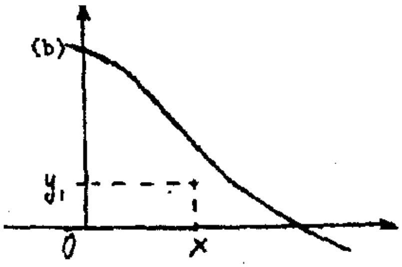
همه احتمالات اجرام بر روی خط $y = g(x)$[1] هستند.

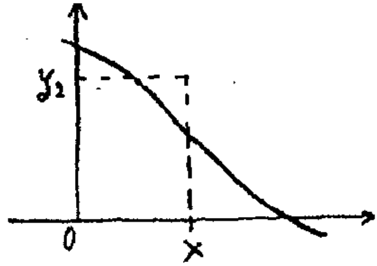
الف) اگر $y = y_1 < g(x)$ آن‌گاه

$$F(x,y) = P\{\underline{x} \le x,\ \underline{y} \le y_1\} = P\{\underline{y} \le y_1\} = F_y(y_1)$$

اگر $y = y_2 > g(x)$ آن‌گاه

$$F(x,y) = P\{\underset{\sim}{x} \le x,\ \underset{\sim}{y} \le y_2\} = P\{\underset{\sim}{x} \le x\} = F_x(x)$$





اگر $y = y_1 < g(x)$ آن گاه

$$F(x,y) = P\{\underset{\sim}{x} \le x,\ \underset{\sim}{y} \le y_1\} = 0$$

اگر $y = y_2 > g(x)$ آن‌گاه

$$F(x,y) = P\{\underset{\sim}{x} \le x,\ \underset{\sim}{y} \le y_2\} = P\{\underset{\sim}{x} \le x\} - P\{\underset{\sim}{y} > y_2\}$$

$$= F_x(x) - [1 - F_y(y_2)]$$

۶-۱۷) الف) اگر

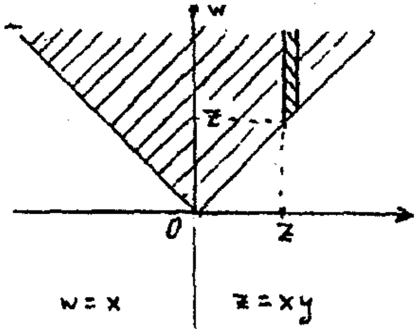
$$\underset{\sim}{z} = 2\underset{\sim}{x} + 3\underset{\sim}{y} \text{ then } E\{\underset{\sim}{z}\} = 0 \qquad \sigma_z^2 = 4\sigma_x^2 + 9\sigma_y^2 = 5^2$$

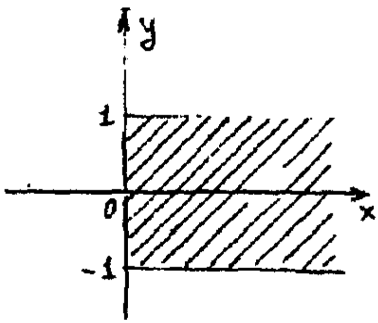
بنابراین $\underset{\sim}{z}$ عبارت است از $N(0;\sqrt{52})$

ب) اگر $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x}/\underset{\sim}{y}$ آن‌گاه از (۶-۶۳) با $\sigma_1 = \sigma_2 = 2,\ r = 0$

$$F_z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan z \qquad f_z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$$

۶-۱۸)





$$f_{zw}(z,w) = \frac{1}{|x|} f_{xy}(x,y) \qquad x = w \qquad y = z/w$$

تابع $f_{zw}(z,w)$ در تیزترین نقطه نشان داده شده متفاوت از صفر است. بنابراین، با $w^2 - z^2 = s^2$

$$f_z(z) = \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_{|z|}^{\infty} e^{-w^2/2\alpha^2} \frac{dw}{\sqrt{1 - z^2/w^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-(z^2 + s^2)/2\alpha^2} ds = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2\alpha^2}$$

۶-۱۹) الف)

$$\underline{z} = \underline{x}/\underline{y} \qquad \underline{w} = \underline{y} \qquad J = 1/y$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| f_x(zw) f_y(w) dw \qquad z > 0$$

$$= \frac{z}{\alpha^2\beta^2} \int_0^{\infty} w^3 e^{-cw^2} dw = \frac{z}{2\alpha^2\beta^2 c^2} \qquad c = \frac{z^2}{2\alpha^2} + \frac{1}{2\beta^2}$$

$$= \frac{2\alpha^2}{\beta^2} \frac{z}{(z^2 + \alpha^2/\beta^2)^2} \qquad \text{for } z > 0 \text{ and zero otherwise}$$

ب)

$$F_z(z) = \int_0^z \frac{2\alpha^2 z\, dz}{\beta^2 (z^2 + \alpha^2/\beta^2)^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int_{\alpha^2/\beta^2}^{z^2 + \alpha^2/\beta^2} \frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{z^2}{z^2 + \alpha^2/\beta^2} = P\{\underset{\sim}{z} \le z\} = P\{\underset{\sim}{x} \le zy\}$$

۶-۲۰) ۱- چگالی $2\underset{\sim}{x}$ برابر است با $\frac{1}{2} f_x(\frac{x}{2})$. بنابراین، اگر $\underset{\sim}{z} = 2\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}$ آن‌گاه

$$f_z(z) = \int_0^z \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x/2} \beta e^{-\beta(z-x)} dx = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 2\beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z/2}) U(z)$$

۲- چگالی $\underset{\sim}{y}$ برابر است با $f_y(-y)$. بنابراین، اگر $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}$ آن گاه

$$f_z(z) = f_x(z) * f_y(-z)$$

$$= \alpha\beta \begin{cases} \displaystyle\int_z^\infty e^{-\alpha x} e^{-\beta(x-z)} dx = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha z} & z > 0 \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} e^{-\beta(x-z)} dx = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{\beta z} & z < 0 \end{cases}$$

-۳

$$\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x}/\underset{\sim}{y} \qquad \underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{y} \qquad J = 1/y$$

$$f_z(z) = \alpha\beta \int_0^\infty w\, e^{-\alpha z w}\, e^{-\beta w} dw = \frac{\alpha\beta}{(\alpha z + \beta)^2} U(z)$$

۴-

$$\underset{\sim}{z} = \max(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \qquad F_z(z) = F_{xy}(z,z) = F_x(z)F_y(z)$$

$$f_z(z) = f_x(z)F_y(z) + f_y(z)F_x(z)$$

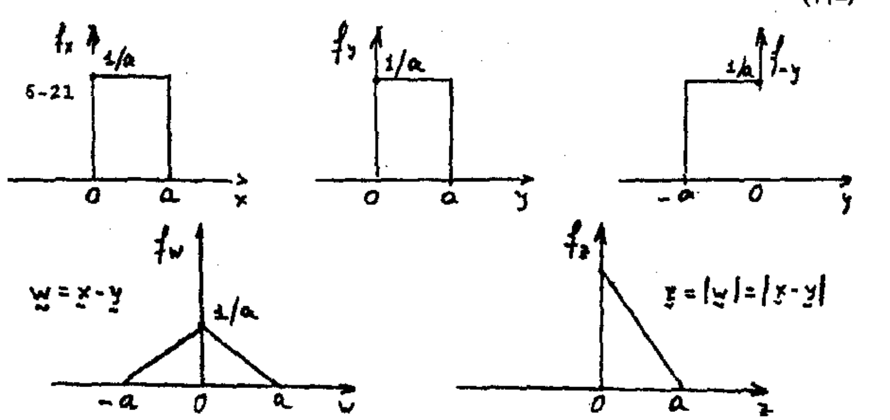
$$= \left[\alpha e^{-\alpha z}(1 - e^{-\beta z}) + \beta e^{-\beta z}(1 - e^{-\alpha z})\right] U(z)$$

۵-

$$\underset{\sim}{z} = \min(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \qquad F_z(z) = F_x(z) + F_y(z) - F_x(z)F_y(z)$$

$$f_z(z) = f_x(z)[1 - F_y(z)] + f_y(z)[1 - F_x(z)] = (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z} U(z)$$

۶-۲۱)



۶-۲۲ (الف)

$$\alpha y^2 + \beta(x-y)^2 = (\alpha+\beta)\left(y - \frac{\beta x}{\alpha+\beta}\right)^2 + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^2$$

$$e^{-\alpha x^2} * e^{-\beta x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2 - \beta(x-y)^2} dy$$

$$= e^{-\alpha\beta x^2/(\alpha+\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)\left(y - \frac{\beta x}{\alpha+\beta}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}\, e^{-\frac{\alpha\beta x^2}{\alpha+\beta}}$$

ب)

$$\frac{\alpha/\pi}{x^2+\alpha^2} * \frac{\beta/\pi}{x^2+\beta^2} = \frac{\alpha\beta}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(y^2+\alpha^2)[(x-y)^2+\beta^2]} = \frac{(\alpha+\beta)/-}{x^2+(\alpha+\beta)^2}$$

تابع مشخصه منجر به بیان ساده‌تر در بالا می‌شود {(۶-۱۹۲) را ببینید}

۶-۲۳) ما متغیر کمکی $w=y$ را معرفی می کنیم. ژاکوبین تبدیل $z=nx/my$ ، $w=y$ برابر n/my است.

وقتی $x = mzw/n$ و $y = w$ و متغیر تصادفی جمع x و y مستقل هستند ، از (۶-۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$f_{zw}(z,w) = \frac{mw}{n} f_x\left(\frac{m}{n}zw\right) f_y(w) \sim w(zw)^{m/2-1}e^{-mzw/2}w^{n/2-1}e^{-w/2}$$

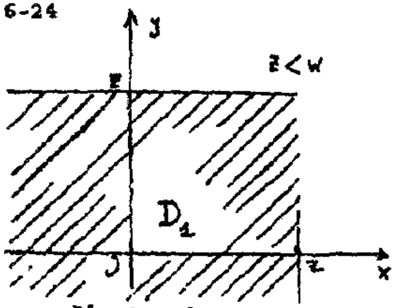
برای $z>0, w>0$ و همچنین صفر. با انتگرالگیری نسبت به w خواهیم داشت:

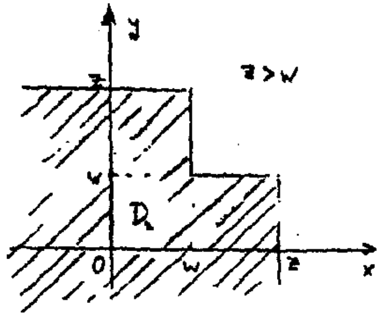
$$f_z(z) \sim z^{m/2-1}\int_0^{\infty} w^{(m+n)/2-1}\exp\left\{-\frac{w}{2}\left(1+\frac{m}{n}z\right)\right\}dw$$

$$\sim \frac{z^{m/2-1}}{(1+mz/n)^{(m+n/2)}} \int_0^{\infty} q^{(m+n)/2}e^{-q}dq$$

۶-۲۴)

6-24





If $z \leq w$ then

$$P\{z \leq z,\ w \leq w\} = P\{z \leq z\} = P\{(x,y) \in D_1\} = F_{xy}(z,z)$$

اگر $z > w$ آن‌گاه

$$P\{z \leq z,\ w \leq w\} = P\{(x,y) \in D_2\}$$
$$= F_{xy}(z,w) + F_{xy}(w,z) - F_{xy}(w,w)$$

(۲۵-۶

$$X \sim \text{Exponential}(\lambda), \quad Y \sim \text{Exponential}(\lambda)$$

X و Y مستقل هستند بنابراین

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{\lambda^2}\, e^{-(x+y)/\lambda}\, U(x)\, U(y)$$

$$Z = X + Y$$

$$\phi_Z(\omega) = \phi_X(\omega)\, \phi_Y(\omega) \frac{1}{(1 - j\omega\lambda)^2}$$

$$Z \sim \ \text{Gamma}\ (2, \lambda)$$

از این نتیجه می‌شود

$$f_Z(z) = \frac{z}{\lambda^2}\, e^{-z/\lambda} U(z)$$

$$P(Z > 2\lambda) = \int_{2\lambda}^{\infty} \frac{z}{\lambda^2}\, e^{-z/\lambda}\, dz = \int_{2}^{\infty} x e^{-x}\, dx = 3e^{-2} = 0.406$$

اگر

$$W = Y - X$$

آن‌گاه

$$P(Y-X>\lambda)=P(W>\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty} f_W(w)dw$$

توجه کنید که $F_W(\omega)$ به وسیله (۶-۵۵) داده شده است.

برای $\omega > 0$، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} e^{-(w+2y)/\lambda} dy = \frac{1}{\lambda^2} e^{-w/\lambda} \int_0^{\infty} e^{-2y/\lambda} dy \\ &= \frac{1}{2\lambda} e^{-w/\lambda}, \quad w>0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$P(Y-X>\lambda)=P(W>\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{2\lambda} e^{-w/\lambda} dw = \frac{1}{2e}$$

۶-۲۶) الف)

$$\begin{aligned} R &= W-Z \\ &= \max(\mathrm{X},\mathrm{Y}) - \min(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \\ &= \begin{cases} X-Y, & X \ge Y \\ Y-X, & X<Y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P\{R \le r\} \\ &= P\{R \le r, X \ge Y\} + P\{R \le r, X<Y\} \\ &= P\{X-Y \le r, X \ge Y\} + P\{Y-X \le r, X<Y\} \\ &= 1-2\frac{(1-r)^2}{2} = 1-(1-r)^2, \quad 0 \le r \le 1 \end{aligned}$$

$$f_R(r) = \begin{cases} 2(1-r), & 0 \le r \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{aligned} S &= W+Z \\ &= \max(\mathrm{X},\mathrm{Y}) + \min(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = X+Y \end{aligned}$$

مورد ۱: $0<s<1$

$$F_S(s)=P\{S \le s\} = P\{X+Y \le s\} = \frac{s^2}{2}, \quad 0<s<1$$

مورد ۲:

$$F_S(s) = P\{S \le s\} = P\{X + Y \le s\} = 1 - \frac{(2-s)^2}{2}, \quad 1 \le s \le 2$$

$$F_S(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le 1 \\ (2-s), & 1 \le s \le 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

۶-۲۷) الف) X و Y مستقل و متغیرهای تصادفی به طور یکسان تقسیم شده نمایی هستند.

$$Z = \frac{Y}{\max(X,Y)} = \begin{cases} \frac{Y}{X}, & X \ge Y \\ 1, & X < Y \end{cases} \Rightarrow 0 < z \le 1.$$

$0 < z < 1$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left\{\tfrac{Y}{X} \le z, X > Y\right\}$$
$$= P\{Y \le Xz, X > Y\} = \int_0^\infty \int_0^{xz} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

$$f_Z(z) = \int_0^\infty x\,f_{XY}(x,xz)\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{\lambda^2}\,e^{-(1+z)x/\lambda}\,dx = \frac{1}{(1+z)^2}, \quad 0 < z < 1.$$

همچنین

$$P(Z=1) = P(X<Y) = \int_0^\infty \int_0^y \frac{1}{\lambda^2}\,e^{-(x+y)/\lambda}\,dx\,dy = \frac{1}{2}$$

ب)

$$W = \frac{X}{\min(X,2Y)} = \begin{cases} \frac{X}{2Y}, & X \ge 2Y \\ 1, & X < 2Y \end{cases} \Rightarrow 1 \le w < \infty$$

$$F_W(w) = P(X \le 2Yw, X > 2Y) = \int_0^\infty \int_{2y}^{2wy} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

این نتیجه می دهد:

$$f_W(w) = \int_0^\infty 2y\,f_{XY}(2wy,y)dy = \int_0^\infty \frac{2y}{\lambda^2}\,e^{-(1+2w)y/\lambda}dy$$
$$= \frac{2}{(1+2w)^2}, \quad w > 1$$

همچنین

$$P(W=1) = P(X<2Y) = \int_0^\infty \int_0^{2y} \frac{1}{\lambda^2}\,e^{-(x+y)/\lambda}\,dx\,dy = \frac{2}{3}$$

توجه کنید که تابع چگالی احتمال Z مانند W به ترتیب $z=1$ و $w=1$ ضربه است.

۶-۲۸) X و Y مستقل و متغیرهای تصادفی به طور یکسان تقسیم شده نمایی هستند.

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\left(\frac{X}{X+Y} \le z\right) = P\left(\frac{X}{Y} \le \frac{z}{1-z}\right) \\
&= P\left\{X \le \frac{zY}{1-z}\right\} = \int_0^\infty \int_0^{(zy)/(1-z)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \\
f_Z(z) &= \int_0^\infty \frac{y}{(1-z)^2} f_{XY}(zy/(1-z), y)\,dy \\
&= \frac{1}{(1-z)^2} \int_0^\infty y \frac{1}{\lambda^2} e^{-(z/(1-z)+1)(y/\lambda)}\,dy \\
&= \frac{1}{(1-z)^2} \int_0^\infty \frac{y}{\lambda^2} e^{-[y/(1-z)\lambda]}\,dy \\
&= \int_0^\infty u\,e^{-u}\,du = 1, \quad 0 < z < 1 \\
&\quad \Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim U(0,1)
\end{aligned}$$

۶-۲۹)فرض کنید:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} U(x), \quad f_Y(y) = \frac{1}{\lambda} e^{-y/\lambda} U(y).$$

$$Z = \min(X,Y)$$

$$W = \max(X,Y) - \min(X,Y)$$

$$Z = \begin{cases} Y, & X \ge Y \\ X, & X < Y \end{cases}$$

$$W = \begin{cases} X-Y, & X \ge Y \\ Y-X, & X < Y \end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$. برای حل مثال ۶-۱۸ و معادله (۶-۸۲) را ببینید. از آنجا (با جایگزینی λ با $1/\lambda$ در (۶-۸۲)) خواهیم داشت:

$$f_Z(z) = \frac{2}{\lambda} e^{-2z/\lambda} U(z).$$

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= P(X-Y \le w, X \ge Y) + P(Y-X \le w, X < Y) \\
&= \int_0^\infty \int_y^{y+w} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \\
&+ \int_0^\infty \int_x^{x+w} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx, \quad w > 0
\end{aligned}
$$

این نتیجه می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= \int_0^\infty f_{XY}(y+w,y)\,dy + \int_0^\infty f_{XY}(x,x+w)\,dx \\
&= 2\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} e^{(2y+w)/\lambda}\,dy \\
&= \frac{2}{\lambda^2} e^{-w/\lambda} \left.\frac{e^{-2y/\lambda}}{-2/\lambda}\right|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} e^{-w/\lambda}, \quad w > 0
\end{aligned}
$$

همچنین:

$$
\begin{aligned}
F_{ZW}(z,w) &= P\{Z \le z, W \le w\} \\
&= P\{Y \le z, X-Y \le w, X \ge Y\} \\
&+ P\{X \le z, Y-X \le w, X < Y\} \\
&= \int_0^z \int_y^{y+w} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + \int_0^z \int_x^{x+w} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx
\end{aligned}
$$

با تکرار استفاده از (۶-۳۹)-(۶-۴۰) نتیجه می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
f_{ZW}(z,w) &= f_{XY}(z+w,z) + f_{XY}(z,z+w) \\
&= \frac{2}{\lambda^2} e^{-(2z+w)/\lambda} = \frac{2}{\lambda} e^{-2z/\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{-w/\lambda} \\
&= f_Z(z)\, f_W(w)
\end{aligned}
$$

بنابراین Z و W و متغیرهای تصادفی به طور یکسان تقسیم شده نمایی هستند.

۶-۳۰) الف) فرض کنید:

$$U = X+Y, \qquad 0 < u < 2\beta.$$

تابع چگالی احتمال از U می تواند از (۶-۴۸)-(۶-۵۰) محاسبه شود. با استفاده از شکل ۶-۱۱، برای $0 < u \le 2\beta$، داریم:

$$F_U(u) = \int_0^u \int_0^{u-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

که این نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^u f_{XY}(x, u-x)dx = \alpha^2\beta^{-2\alpha}\int_0^u x^{\alpha-1}(u-x)^{\alpha-1}dx \\ &= \alpha^2\beta^{-2\alpha}u^{2\alpha-1}\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1}dy \\ &= B(\alpha,\alpha)\,\alpha^2\beta^{-2\alpha}u^{2\alpha-1} \quad 0 < u \le \beta \end{aligned}$$

در جایی که جای گذاری $y = ux$ و استفاده از تابع بتای تعریف شده در (۴-۴۹)-(۴-۵۱) انجام گیرد.به طور مشابه برای $\beta < u \le 2\beta$ نتیجه میگیریم ((۶-۴۹) را ببینید)که

$$F_U(u) = 1 - \int_{u-\beta}^{\beta}\int_{u-x}^{\beta} f_{XY}(x,y)\,dydx$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{u-\beta}^{\beta} f_{XY}(x, u-x)dx = \alpha^2\beta^{-2\alpha}\int_{u-\beta}^{\beta} x^{\alpha-1}(u-x)^{\alpha-1}dx \\ &= \alpha^2\beta^{-2\alpha}u^{2\alpha-1}\int_{1-\beta/u}^{\beta/u} y^{\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1}dy, \quad \beta < u \le 2\beta \end{aligned}$$

ب)

$$Z = \min(X,Y), \qquad W = \max(X,Y)$$

با جلو رفته است مثال ۶-۲۱ برای کامل کردن این مسئله. از (۶-۲۹) و (۶-۹۳) خواهیم داشت:

$$F_{ZW}(z,w) = \begin{cases} F_{XY}(z,w) + F_{XY}(w,z) - F_{XY}(z,z), & w \ge z \\ F_{XY}(w,w), & w < z \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$f_{ZW}(z,w) = f_X(z)f_Y(w) + f_X(w)f_Y(z), \quad 0 < z \le w < \beta$$

$$f_{ZW}(z,w) = \begin{cases} 2\alpha^2\beta^{-2\alpha}z^{\alpha-1}w^{\alpha-1}, & 0 < z \le w < \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

کنترل:

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta}\int_0^{w} f_{ZW}(z,w)dzdw &= 2\alpha^2\beta^{-2\alpha}\int_0^{\beta} w^{\alpha-1}\left(\frac{z^\alpha}{\alpha}\bigg|_0^w\right)dw \\ &= 2\alpha\beta^{-2\alpha}\int_0^{\beta} w^{2\alpha-1}dw = 1 \end{aligned}$$

نکته: Z و W متغیرهای مستقل تصادفی نیستند بنابراین

$$f_Z(z) = 2\alpha\beta^{-2\alpha} z^{\alpha-1} (\beta^{\alpha} - z^{\alpha}), \quad 0 < z < \beta$$

و

$$f_W(w) = 2\alpha\beta^{-2\alpha} w^{2\alpha-1}, \quad 0 < w < \beta$$

ج) فرض کنید

$$V = \frac{Z}{W} = \frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)} = \begin{cases} \frac{Y}{X}, & X \geq Y \\ \frac{X}{Y}, & X < Y \end{cases}$$

و

$$W = \max(X,Y) = \begin{cases} X, & X \geq Y \\ Y, & X < Y \end{cases}$$

برای $0 < \upsilon < 1, 0 < \omega < \beta$

$$\begin{aligned} F_{VW}(v,w) &= P(V \leq v, W \leq w) \\ &= P\{V \leq v, W \leq w, (X \geq Y) \cup (X < Y)\} \\ &= P\{Y \leq Xv, X \leq w, X \geq Y\} \\ &+ P\{X < Yv, Y \leq w, X < Y\} \\ &= \int_0^w \int_0^{xv} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx + \int_0^w \int_0^{yv} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned} f_{VW}(v,w) &= \frac{\partial^2 F_{VW}(v,w)}{\partial v\, \partial w} \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \int_0^{vw} f_{XY}(w,y)\, dy + \int_0^{vw} f_{XY}(x,w)\, dx \right\} \\ &= w\{f_{XY}(w,vw) + f_{XY}(vw,w)\} \\ &= 2\alpha^2 \beta^{-2\alpha} w^{2\alpha-1} v^{\alpha-1}, \qquad 0 < v < 1,\ 0 < w < \beta \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_V(v) = \int_0^{\beta} f_{VW}(v,w) dw = \alpha v^{\alpha-1}, \quad 0 < v < 1$$

$$f_W(w) = \int_0^1 f_{VW}(v,w)dv = 2\alpha\,\beta^{-2\alpha}\,w^{2\alpha-1}, \quad 0 < w < \beta$$

و

$$f_{VW}(v,w) = f_V(v)\,f_W(w).$$

بنابراین V و W متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

۶-۳۱) الف) در مثال‌های ۶-۲۷ و ۶-۱۲ حل شده است.

ب) در مثال ۶-۲۷ حل شده است.

ج)

$$Z = X + Y, \qquad W = \frac{X}{X+Y}$$

$$x_1 = zw, \qquad y_1 = z - x_1 = z(1-w)$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & -\dfrac{x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{z}$$

$$\begin{aligned} f_{ZW}(z,w) &= \frac{z}{\alpha^{m+n}\Gamma(m)\Gamma(n)}\,(zw)^{m-1}\,\{z(1-w)\}^{n-1} \\ &= \left(\frac{z^{m+n-1}}{\alpha^{m+n}\Gamma(\alpha+\beta)}\,e^{-z/\alpha}\right)\left(\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\,w^{m-1}\,(1-w)^{n-1}\right) \\ &= f_Z(z)\,f_W(w) \end{aligned}$$

بنابراین Z و W متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

۶-۳۲) الف)

$$Z = \frac{X}{|Y|}, \qquad W = \frac{|X|}{|Y|} = |Z|$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(X \le |Y|z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{|y|z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \\ &= 2\int_0^{\infty} |y| f_{XY}(|y|z, y)dy = \frac{2}{2\pi\sigma^2}\int_0^{\infty} y e^{-(z^2+1)y^2/2\sigma^2}\,dy \\ &= \frac{1/\pi}{1+z^2}, \qquad -\infty < z < \infty \end{aligned}$$

بنابرین Z متغیر تصادفی کوشی است. جالب این که، متغیر تصادفی $X/_Y$ نیز هم‌چنین متغیر تصادفی کوشی است(مثال ۶-۱۱) را ببینید).

$$W = |Z|$$

بنابراین

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) = P(|Z| \leq w) \\ &= P(-w < Z < w) = F_Z(w) - F_Z(-w) \end{aligned}$$

پس

$$f_W(w) = f_Z(w) + f_Z(-w) = \frac{2/\pi}{1+w^2}, \quad w > 0.$$

ب)

$$\begin{aligned} U &= X + Y \sim N(0,2) \\ V &= X^2 + Y^2 \sim \text{Exponential } (2) \end{aligned}$$

(مثال ۶-۱۴ را ببینید). در این‌جا U, V مستقل نیستند، بنابراین

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = -2(x-y) = 2\sqrt{2v-u^2}$$

و

$$\begin{aligned} f_{UV}(u,v) &= \frac{1}{2\sqrt{2v-u^2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-v/2\sigma^2} \\ &\neq f_U(u)\, f_V(v), \qquad -\infty < u < \infty, \;\; v > 0. \end{aligned}$$

۶-۲۳)

$$Z = X + Y, \qquad W = X - Y$$

متغیرهای تصادفی مشترک نرمال هستند. بنابراین اگر آن‌ها ناهم بسته باشند پس آن‌ها همچنین مستقل هستند.

$$\begin{aligned} Cov(Z,W) &= E[(Z-\mu_Z)(W-\mu_W)] \\ &= E\left[\{(X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\}\{(X-\mu_X)-(Y-\mu_Y)\}\right] \\ &= \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = \sigma_X^2 - \sigma_Y^2. \end{aligned}$$

نا هم‌بسته بودن متغیرهای تصادفی Z و W به همراه دارد که $Cov(Z,W)=0$. بنابراین $\delta_X^2 = \delta_Y^2$ شرط لازم و کافی برای وابسته بودن $X+Y$ و $X-Y$ است.

۶-۳۴) الف)–ب) فرض کنید:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

از مثال ۶-۲۲، R و θ متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال مشترک مانند (۶-۱۲۸) هستند. (مثال(۶-۱۳۱) را ببینید). در جمله R و θ، $X = R\cos\theta$ و $Y = R\sin\theta$ می‌باشد پس خواهیم داشت:

$$U = \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = R\cos 2\theta$$

$$V = \frac{2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = R\sin 2\theta$$

این نتیجه می‌دهد:

$$J = \begin{vmatrix} \cos 2\theta & -2r\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2r\cos 2\theta \end{vmatrix} = 2r = 2\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right), \quad 2\theta_2 = \pi + 2\theta_1.$$

در این جا دو مجموعه جواب (r,θ_1) و (r,θ_2) وجود دارد. با جای‌گذاری در (۶-۱۲۸) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} f_{UV}(u,v) &= \frac{1}{|J|}\{f_{r,\theta}(r,\theta_1) + f_{r,\theta}(r,\theta_2)\} = \frac{2}{|J|} f_{r,\theta}(r,\theta_1) \\ &= \frac{2}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2\pi\sigma^2}\, e^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-u^2/2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-v^2/2\sigma^2} \\ &= f_U(u) f_V(v) \end{aligned}$$

بنابراین U و V متغیرهای تصادفی نرمال مستقل هستند. پس از این نتیجه می‌شود که $U = \dfrac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ و $V/2 = \dfrac{XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

ج)

$$Z = \frac{(X - Y)^2 - 2Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{(X^2 - Y^2) - 2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$= \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}} - \frac{2XY}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$
$$= U - V \sim N(0, 2\sigma^2).$$

۶-۳۵) الف) $Z \approx F(m,n)$ از فرمول (۶-۱۵۷) نتیجه می‌شود فرض کنید

$$Y = \frac{1}{Z}$$

پس

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{1}{|dy/dz|} f_Z(1/y) \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{(m/n)^{m/2}}{\beta(m/2,n/2)} \frac{1}{y^{m/2-1}} \frac{1}{(1+m/ny)^{m+n/2}} \\ &= \frac{(n/m)^{n/2}}{\beta(n/2,m/2)} y^{n/2-1} \left(1+\frac{n}{my}\right)^{-(m+n)/2} \\ &\sim F(n,m). \end{aligned}$$

ب)

$$W = \frac{Zm}{Zm+n}$$

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \le w) = P\left(\frac{Zm}{Zm+n} \le w\right) \\ &= P\left(Z \le \frac{nw}{m(1-w)}\right) = F_Z\left(\frac{nw}{m(1-w)}\right) \end{aligned}$$

که از این نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{n}{m(1-w)^2} f_Z\left(\frac{nw}{m(1-w)}\right) \\ &= \frac{n}{m(1-w)^2} \frac{(m/n)^{m/2}}{\beta(m/2,n/2)} \left(\frac{nw}{m(1-w)}\right)^{m/2-1} \left(1+\frac{w}{(1-w)}\right)^{-(m+n)/2} \\ &= \frac{1}{\beta(m/2,n/2)} w^{m/2-1}(1-w)^{n/2-1}, \quad 0 < w < 1. \end{aligned}$$

بنابراین W دارای توزیع بتا است.

۶-۳۶)

$$Z = X + Y > 0, \qquad W = X - Y > 0$$
$$x_1 = \frac{z+w}{2}, \qquad y_1 = \frac{z-w}{2}$$

این تنها جواب است. بعلاوه

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

بنابراین

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{|J|} f_{XY}(x_1, y_1) = \frac{1}{2} e^{-(z+w)/2}, \quad 0 < w < z < \infty$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^z f_{ZW}(z,w)\, dw = \tfrac{1}{2} e^{-z/2} \left. \frac{e^{-w/2}}{(-1/2)} \right|_0^z \\ &= \tfrac{1}{2} e^{-z/2} \left. \frac{e^{-w/2}}{(-1/2)} \right|_0^z = e^{-z/2}(1 - e^{-z/2}), \quad z > 0 \end{aligned}$$

۶-۳۷)

$$Z = X + Y > 0, \qquad W = \frac{Y}{X} > 1$$
$$y = xw, \quad x(1+w) = z, \quad x_1 = \frac{z}{1+w}, \quad y_1 = \frac{zw}{1+w}$$

این تنها جواب است. همچنین

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x+y}{x^2} = \frac{(1+w)^2}{z}$$

این نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} f_{ZW}(z,w) &= \tfrac{1}{|J|} f_{XY}(x_1, y_1) \\ &= \frac{z}{(1+w)^2}\, 2\, e^{-z}, \quad z > 0,\ w > 1 \\ &= z\, e^{-z} \frac{2}{(1+w)^2} = f_Z(z)\, f_W(w) \end{aligned}$$

پس

$$f_Z(z) = \int_1^\infty f_{ZW}(z,w)\,dw$$
$$= 2ze^{-z}\int_1^\infty \frac{1}{(1+w)^2}\,dw = z\,e^{-z}, \quad z>0$$

و

$$f_w(w) = \int_0^\infty f_{ZW}(z,w)\,dz$$
$$= \frac{2}{(1+w)^2}\int_0^\infty ze^{-z}\,dz = \frac{2}{(1+w)^2}, \quad w>1.$$

بنابراین $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{W}$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

(۳۸-۶

$$z = xy \qquad y = \cos(\omega t + \theta)$$

$$w = y \qquad J = |y| \qquad f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & |y| < 1 \\ 0 & |y| > 1 \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی x و y مستقل هستند. بنابراین

$$f_{zw}(z,w) = \frac{1}{|w|} f_x\left(\frac{z}{w}\right) f_y(w)$$

$$f_z(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f_x(z/w)}{|w|\sqrt{1-w^2}}\,dw = \frac{1}{\pi}\int_{|x|>z} \frac{f_x(x)}{\sqrt{x^2-z^2}}\,dx$$

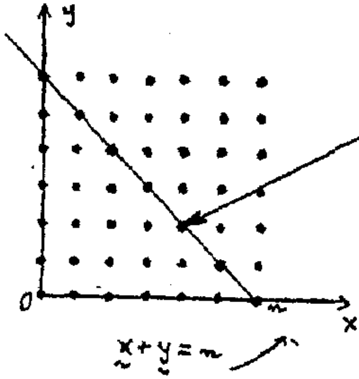
(۳۹-۶

$$z = x + s \qquad s = a\cos y$$

$$f_z(z) = f_x(z) * f_s(z) \qquad f_s(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-s^2}} & |s| < a \\ 0 & |s| > a \end{cases}$$

$$f_z(z) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} \frac{e^{-(z-s)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{a^2-s^2}}\,ds = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(z-a\cos y)^2/2\sigma^2}\,dy$$

(۴۰-۶



Point masses

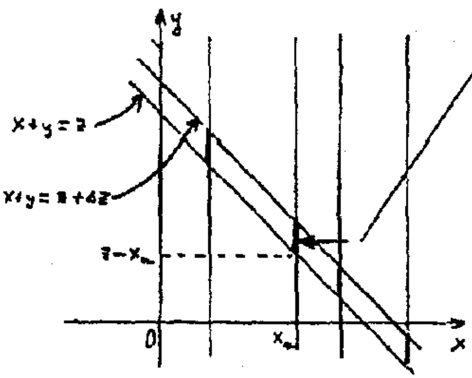
$$P\{\underline{x}=k,\ \underline{y}=n-k\}=a_k b_{n-k}$$

$$\{\underline{z}=n\}=\sum_{k=0}^{n}\{\underline{x}=k,\ \underline{y}=n-k\}$$

$$P\{\underline{z}=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{\underline{x}=k,\ \underline{y}=n-k\}$$

۶-۴۱) الف)

6-41 (a)



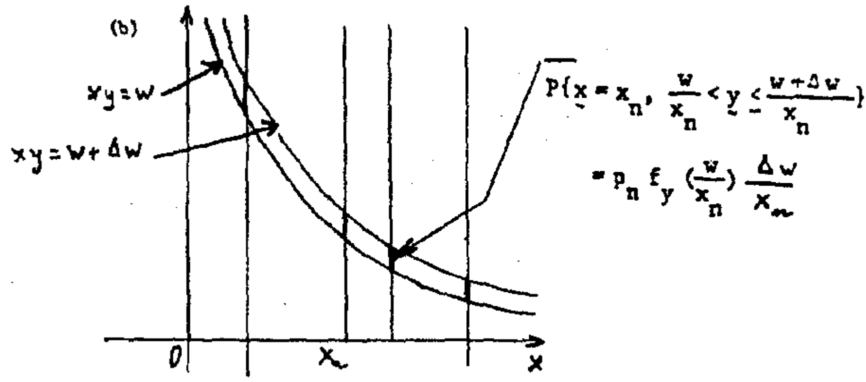
Line masses

$$P\{\underline{x}=x_n,\ z-x_n<\underline{y}\le z-x_n+\Delta z\}$$
$$=p_n f_y(z-x_n)\Delta z$$

$$\{z<\underline{z}\le z+\Delta z\}=\sum_n\{\underline{x}=x_n,\ z-x_n<\underline{y}\le z-x_n+\Delta z\}$$

$$f_z(z)\Delta z=\sum_n p_n f_y(z-x_n)\Delta z$$

ب)



$$\{w < \underline{w} \le w + \Delta w\} = \sum_n \{\underline{x} = x_n,\ \frac{w}{x_n} < \underline{y} \le \frac{w+\Delta w}{x_n}\}$$

$$f_w(w)\Delta w = \sum_n p_n\, f_y\left(\frac{w}{x_n}\right)\Delta w$$

۶-۴۲) $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ متغیرهای تصادفی هندسی مستقل هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} P\{X = k, Y = m\} &= P\{X = k\}\, P\{Y = m\} \\ &= (pq^k)\,(pq^m) = p^2 q^{k+m}, \qquad k, m = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

الف) فرض کنید:

$$Z = X + Y$$

$$\begin{aligned} P\{Z = n\} &= P\{X + Y = n\} = \textstyle\sum_k P\{X = k, Y = n - k\} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} P\{X = k, Y = n - k\} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} P\{X = k\}\, P\{Y = n - k\} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} pq^k\, pq^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} p^2\, q^n \\ &= (n+1)\, p^2\, q^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

ب) فرض کنید:

$$W = X - Y$$

حالت اول: $W < 0 \Rightarrow X \ge Y$. بنابراین برای $m \ge 0$

$$\begin{aligned}P\{W=m\} &= P\{X-Y=m\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=m+k,Y=k\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=m+k,Y=k\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=m+k\}\,P\{Y=k\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(pq^{m+k})\,(pq^{k})=p^2q^m\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}\\&=p^2q^m\,(1+q^2+q^4+\cdots)=\frac{p^2q^m}{(1-q^2)}\\&=\frac{pq^m}{1+q},\qquad m=0,1,2,\cdots \qquad (1)\end{aligned}$$

ب) حالت دوم: $W<0\Rightarrow X<Y$. بنابراین برای $m<0$

$$\begin{aligned}P\{W=m\} &= P\{X-Y=m\}=\sum_{k}P\{X=k,Y=k-m\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k,Y=k-m\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}\,P\{Y=k-m\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(pq^{k})\,(pq^{k-m})=p^2q^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}\\&=\frac{p^2q^{-m}}{(1-q^2)}=\frac{pq^{-m}}{1+q},\quad m=-1,-2,\cdots \qquad (2)\end{aligned}$$

بنابراین از ترکیب (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$P\{W=m\}=\frac{pq^{|m|}}{1+q},\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

۶-۴۳) می‌دانیم که $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ مستقل هستند و $P(X=k)=P(Y=k)=p_k$. همچنین

$$\begin{aligned}P(X=k|X+Y=k) &= \frac{P(X=k,Y=0)}{P(X+Y=k)}\\&=\frac{p_kp_0}{\sum_{i=0}^{k}p_ip_{k-i}}=\frac{1}{k+1}. \qquad (1)\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}&P(X=k-1|X+Y=k)\\&=\frac{P(X=k-1,Y=1)}{P(X+Y=k)}\frac{p_{k-1}p_1}{\sum_{i=0}^{k}p_ip_{k-i}}=\frac{1}{k+1}. \qquad (2)\end{aligned}$$

از (۱) و (۲):

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow p_k = \lambda p_{k-1} = \lambda^k p_0$$

در جایی که $\lambda \stackrel{\Delta}{=} p_1/p_0$. وقتی $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$، باید $\lambda < 1$ قرار دهیم و این نتیجه می‌دهد

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \frac{p_0}{1-\lambda} = 1 \rightarrow p_0 = 1 - \lambda.$$

بنابراین

$$p_k = p_0\,\lambda^k = (1-\lambda)\lambda^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \ 0 < \lambda < 1$$

که تعریف توزیع هندسی است. بنابراین X و Y متغیرهای تصادفی هندسی هستند.

۶-۴۴) تابع مولد گشتاور از X و Y داده شده است ((۵-۱۱۷) را ببینید)

$$\Gamma_X(z) = (pz+q)^n, \qquad \Gamma_Y(z) = (pz+q)^n$$

همچنین

$$\Gamma_{X+Y}(z) = E[z^{X+Y}] = \Gamma_X(z)\Gamma_Y(z) = (pz+q)^{2n} \sim \text{Binomial}\,(2n, p)$$

۶-۴۵) الف) فرض کنید:

$$Z = \min(X, Y), \qquad W = X - Y$$

$$\begin{aligned}
&P\{Z = k, W = m\} \\
&= P\{\min(X, Y) = k, X - Y = m\} \\
&= P\{(\min(X, Y) = k, X - Y = m) \cap (X \ge Y \cup X < Y)\} \\
&= P\{Y = k, X - Y = m, X \ge Y\} + P\{X = k, X - Y = m, X < Y\} \\
&= P\{X = m + k, Y = k, X \ge Y\} + P\{X = k, Y = k - m, X < Y\}
\end{aligned}$$

توجه کنید که $k \ge 0$ و m مقادیر صفر، مثبت و منفی را می‌گیرد. بنابراین

$$P\{Z = k, W = m\} = \begin{cases} P\{X = k + m, Y = k, X \ge Y\}, & k \ge 0,\ m \ge 0 \\ P\{X = k, Y = k - m, X < Y\}, & k \ge 0,\ m < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} pq^{k+m}\,pq^k, & k \ge 0,\ m \ge 0 \\ pq^k\,pq^{k-m}, & k \ge 0,\ m < 0 \end{cases}$$

$$P\{Z=k, W=m\} = p^2 q^{2k+|m|}, \qquad k=0,1,2,\cdots, \quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

همچنین

$$\begin{aligned} P\{Z=k\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\{Z=k, W=m\} \\ &= p^2 q^{2k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{|m|} = p^2 q^{2k} \left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right) \\ &= p^2 q^{2k} \left(1 + \frac{2q}{p}\right) = p(1+q)q^{2k}, \qquad k=0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P\{W=m\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z=k, W=m\} \\ &= p^2 q^{|m|} \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} \\ &= \frac{p}{1+q} q^{|m|}, \qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \end{aligned}$$

توجه کنید که

$$P\{Z=k, W=m\} = P\{Z=k\}\, P\{W=m\}$$

و از آن‌جایی که Z و W در این موردنیز متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

ب) فرض کنید:

$$Z = \min(X,Y), \quad W = \max(X,Y) - \min(X,Y)$$

بااقدام مانند (الف)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &P\{Z=k, W=m\} \\ &= P(Y=k, X-Y=m, X \geq Y) + P(X=k, Y-X=m, X<Y) \\ &= P(X=k+m, Y=k, X \geq Y) + P(X=k, Y=k+m, X<Y) \\ &= \begin{cases} pq^{k+m}\, pq^k + pq^k\, pq^{k+m}, & k=0,1,2,\cdots,\ m=1,2,\cdots \\ pq^{k+m}\, pq^k, & k=0,1,2,\cdots,\ m=0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2p^2 q^{2k+m}, & k=0,1,2,\cdots,\ m=1,2,\cdots \\ p^2 q^{2k}, & k=0,1,2,\cdots,\ m=0 \end{cases} \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} P\{Z=k\} &= \sum_{m=0}^{\infty} P\{Z=k, W=m\} \\ &= p^2q^{2k}\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right) = p^2q^{2k}\left(1+\frac{2q}{p}\right) \\ &= p(1+q)q^{2k}, \quad k=0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

همچنین

$$P\{W=m\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z=k, W=m\} = \begin{cases} \dfrac{p}{1+q}, & m=0 \\ \dfrac{2p}{1+q}q^m, & m=1,2,\cdots \end{cases}$$

توجه کنید که

$$P\{Z=k, W=m\} = P\{Z=k\}\,P\{W=m\}$$

و بنابراین Z و W

نیز در این مورد متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

۶-۴۶) تابع مولد گشتاور از X و Y داده شده است ((۵-۱۱۹) را ببینید)

$$\Gamma_X(z) = e^{\lambda_1(z-1)}, \qquad \Gamma_Y(z) = e^{\lambda_2(z-1)}$$

همچنین

$$\Gamma_{X+Y}(z) = \Gamma_X(z)\Gamma_Y(z) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)}$$

بنابراین

$$Z \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

پس

$$P(X+Y=k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

و

$$\begin{aligned} &P(X=k|X+Y=n) \\ &= \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1}(\lambda_1^k/k!)\,e^{-\lambda_2}(\lambda_2^{n-k}/(n-k)!)}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n/n!} \end{aligned}$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots n$$
$$\sim \text{Binomial}(n,p), \text{ where } p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

همچنین (۶-۲۲۲) را ببینید. از آن‌نتیجه می‌گیریم که عکس آن نیز صحیح است (مانند مثال ۶-۴۳ جلو رفته است).

(۶-۴۷

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \qquad \Delta = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1-r^2)\sigma_1^2} & \dfrac{r}{(1-r^2)\sigma_1\sigma_2} \\ \dfrac{r}{(1-r^2)\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{(1-r^2)\sigma^2} \end{bmatrix}$$

$$XC^{-1}X^t = \frac{1}{(1-r^2)}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2r\,\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)$$

(۶-۴۸

$$\{\underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{y} < 0\} = \{\underset{\sim}{x} < 0,\ \underset{\sim}{y} > 0\} + \{\underset{\sim}{x} > 0,\ \underset{\sim}{y} < 0\}$$

$$P\{\underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{y} < 0\} = F_x(0)[1 - F_y(0)] + [1 - F_x(0)]F_y(0)$$

$$F_x(0) = 1 - G\left(\frac{\eta_x}{\sigma_x}\right) \qquad F_y(0) = 1 - G\left(\frac{\eta_y}{\sigma_y}\right)$$

(۶-۴۹ اگر $w = x - y$ ، پس

$$E\{\underset{\sim}{w}\} = 0 \qquad \sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 2\sigma^2$$

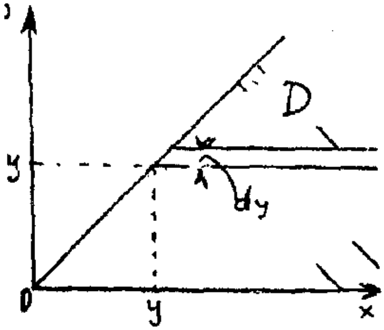
بنابراین

$$\underline{w} = 1,\ N(0;\ \sigma\sqrt{2})$$

و [(۵-۷۴)را ببینید]

$$E\{\underline{z}\} = E\{|\underline{w}|\} = \sqrt{2}\,\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad E\{\underline{z}^2\} = E\{\underline{w}^2\} = 2\sigma^2$$

(۶-۵۰



$$E\{\underline{z}\} = \iint_D (x-y)f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^\infty\int_y^\infty (x-y)e^{-x}\,e^{-y}\,dxdy = \frac{1}{2}$$

۶-۵۱) وقتی $\left|E\{x\,y\}\right| \le E\{|x||y|\}$ می‌توانیم فرض کنیم که متغیرهای تصادفی x و y حقیقی هستند.

الف)

$$0 \le E\{[z\,\underline{x} - \underline{y}]^2\} = z^2\,E\{\underline{x}^2\} - 2z\,E\{\underline{x}\,\underline{y}\} + E\{\underline{y}^2\}$$

در بالادرجه دو در z برای همه z هاست. بنابراین مبین غیرمنفی است.

ب) با استفاده از (الف)، نتیجه می‌گیریم:

$$E\{\underline{x}^2\} + E\{\underline{y}^2\} + 2\sqrt{E\{\underline{x}^2\}E\{\underline{y}^2\}}$$

$$\ge E\{\underline{x}^2\} + E\{\underline{y}^2\} + 2\,E\{\underline{x}\,\underline{y}\} = E\{(\underline{x} + \underline{y})^2\}$$

۶-۵۲) اگر $r_{xy} = 1$ باشد آن‌گاه:

$$E^2\{(\underline{x} - \eta_x)(\underline{y} - \eta_y)\} = E\{(\underline{x} - \eta_x)^2\}E\{(\underline{y} - \eta_y)^2\}$$

یعنی، جداکننده درجه دوم.

$$E\{[z(\underline{x} - \eta_x) - (\underline{y} - \eta_y)]^2\}$$

صفر است. این تنها وقتی ممکن است که جداکننده برای تعدادی $z = z_0$ صفر است. این نشان می‌دهد که

$$z(\underline{x} - \eta_x) - (\underline{y} - \eta_y) = 0$$

۶-۵۳) اگر

$$E\{\underline{x}\} = E\{\underline{y}^2\} = E\{\underline{x}\ \underline{y}\}$$

آن‌گاه:

$$E\{(\underline{x} - \underline{y})^2\} = E\{\underline{x}^2\} + E\{\underline{y}^2\} - 2\ E\{\underline{x}\ \underline{y}\} = 0.$$

بنابراین $x = y$ از دید حداقل مربعات است.

۶-۵۴) اگر x چگالی کوشی دارد پس(مسئله ۵-۳۱)

$$E\{e^{j\omega\underline{x}}\} = e^{-\alpha|\omega|} \qquad E\{e^{j\omega k\underline{x}}\} = e^{-\alpha k|\omega|}$$

بنابراین [(۶-۲۴۰) را ببینید].

$$\Phi_z(\omega) = E\{e^{j\omega\underline{n}\underline{x}}\} = E\{E\{e^{j\omega\underline{n}\underline{x}}|\underline{n}\}\} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{e^{j\omega k\underline{x}}\}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k|\omega|}\frac{k}{k!} = e^{-\lambda}e^{-\lambda e^{-\alpha|\omega|}}$$

۶-۵۵) اگر $X = k$ آن‌گاه:

$$Y = n - k$$

و

$$Z = X - Y = 2X - n,$$

در جایی که Z مقادیر $-n, -(n-2), \cdots n-2, n$ را می گیرد.

$$P\{Z = z\} = P\{2X - n = z\}P\{X = \tfrac{n+z}{2}\}$$

$$= \binom{n}{n + z/2} p^{(n+z)/2}\, q^{(n-z)/2}.$$

همچنین

$$E(Z) = E[2X - n] = 2np - n = n(2p - 1).$$

$$\mathrm{Var}(Z) = E[(z - \mu_z)^2] = 4E[(X - np)^2] = 4\mathrm{Var}(X) = 4npq$$

۶-۵۶) الف)

$$\begin{aligned}\phi_Z(\omega) &= E[e^{j\omega Z}] = E[e^{j\omega(aX+bY+c)}] \\ &= \phi_X(a\omega)\,\phi_Y(b\omega)e^{j\omega c} = e^{j\omega c-(a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)\omega^2/2}\end{aligned}$$

((۵-۱۰۰) را ببینید).

ب) در مقایسه با (۵-۱۰۰) به دست می‌آوریم:

$$Z \sim \mathrm{N}(c, a^2\,\sigma_1^2 + b^2\,\sigma_2^2)$$

ج)

$$E[Z] = c, \qquad \mathrm{Var}(Z) = a^2\,\sigma_1^2 + b^2\,\sigma_2^2$$

۶-۵۷)

$$P(X=k|Y=n) = \binom{n}{k} p_1^k\, q_1^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots n$$

$$E[e^{j\omega X}|Y=n] = \sum_{k=0}^{n} e^{j\omega k}\, P(X=k|Y=n) = \left(p_1 e^{j\omega} + q_1\right)^n$$

از (۵-۱۱۷) استفاده کنید. همچنین

$$\begin{aligned}\phi_X(\omega) &= E[e^{j\omega X}] = E\left\{E[e^{j\omega X}|Y=n]\right\} \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{M} E[e^{j\omega X}|Y=n]\,P(Y=n) \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (p_1 e^{j\omega}+q_1)^n \binom{M}{n} p_2^n\, q_2^{M-n} \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{M} \binom{M}{n} [p_2(p_1\, e^{j\omega}+q_1)]^n\, q_2^{M-n} \\ &= \left(p_2 p_1 e^{j\omega} + q_1 p_2 + q_2\right)^M\end{aligned}$$

اما

$$1 - p_1 p_2 = 1 - (1-q_1)(1-q_2) = q_1 p_2 + q_2$$

بنابراین

$$\phi_X(\omega) = \left(p e^{j\omega} + q\right)^M$$

در جایی که $p = p_1 p_2$. بنابراین

$$X \sim \text{Binomial}(M, p_1 p_2).$$

۶-۵۸)

$$\int\int f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_x^1 kx\,dy\,dx = k\int_0^1 x(1-x)\,dx$$

$$\frac{k}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 6.$$

$$f_X(x) = \int_x^1 6x\,dy = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 6x\,dy = 3y^2, \quad 0 < y < 1.$$

$$E[X] = \int_0^1 x\,f_X(x)\,dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\,f_X(x)\,dx = 6\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{10}.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

$$E[Y] = \int_0^1 y\,f_Y(y)\,dy = 3\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2\,f_Y(y)\,dy = 3\left.\frac{y^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int\int xy\,f_{XY}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1\int_x^1 xy\,6x\,dy\,dx = \int_0^1 3x^2(1-x^2)\,dx \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 3\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{40} \end{aligned}$$

۶-۵۹) الف)

$$\begin{aligned}\phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) &= E[e^{j(\omega_1 X+\omega_2 Y)}] \\ &= E[e^{j\omega_1 X}]\ E[e^{j\omega_2 Y}] = \phi_X(\omega_1)\,\phi_Y(\omega_2) \\ &= e^{\lambda(e^{j\omega_1}-1)}\ e^{(j\mu\omega_2-\sigma^2\omega_2^2/2)}\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}\phi_Z(\omega) &= E[e^{j\omega Z}] \\ &= E[e^{j\omega(X+Y)}] = \phi_{X,Y}(\omega,\omega) \\ &= e^{\{\lambda(e^{j\omega}-1)+(j\mu\omega-\sigma^2\omega^2/2)\}}\end{aligned}$$

۶-۶۰) الف)

$$Z=\min(X,Y)$$

از مثال ۶-۱۸، داریم:

$$f_Z(z)=2\lambda\,e^{-2\lambda z},\qquad z\geq 0$$

و بنابراین

$$E[Z]=E[\min(X,Y)]=\frac{1}{2\lambda}$$

ب)

$$\begin{aligned}E[\max(2X,Y)] &= \int\int \max(2x,y)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int\int_{2x\geq y} 2x\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy+\int\int_{2x<y} y\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty\int_0^{2x} 2x\,\lambda^2\,e^{-\lambda x}\,e^{-\lambda y}\ dy\,dx+\int_0^\infty\int_0^{y/2} y\,\lambda^2\,e^{-\lambda x}\,e^{-\lambda y}\ dx\,dy \\ &= \lambda\int_0^\infty 2x\,e^{-\lambda x}(1-e^{-2\lambda x})\,dx+\lambda\int_0^\infty y\,e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y/2})\,dy \\ &= 2\lambda\int_0^\infty \left(xe^{-\lambda x}+2xe^{-2\lambda x}-3xe^{-3\lambda x}\right)\,dx \\ &= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \left(ue^{-u}+2ue^{-2u}-3ue^{-3u}\right)\,du \\ &= \frac{2}{\lambda}\left(1+\frac{2}{4}-\frac{3}{9}\right)=\frac{7}{3\lambda}.\end{aligned}$$

۶-۶۱) الف)

$$Z=X-Y\quad\rightarrow\quad -1<z<1.$$

$z > 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X - Y \le z) = 1 - P(X - Y > z) \\ &= 1 - \int_0^{(1-z)/2} \int_{y+z}^{1-y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \\ &= 1 - \int_0^{(1-z)/2} \left(\int_{y+z}^{1-y} 6x dx \right) dy \\ &= 1 - 3\int_0^{(1-z)/2} \{(1-z^2) - 2(1+z)y\}\,dy \\ &= 1 - \frac{3}{4}(1+z)(1-z)^2, \quad z \ge 0. \end{aligned}$$

$z < 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X - Y \le z) \\ &= \int_0^{(1+z)/2} \int_{x-z}^{1-x} 6x\,dy\,dx = \int_0^{(1+z)/2} 6x\,(1 + z - 2x)\,dx \\ &= \frac{(1+z)^3}{4}, \quad z < 0. \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-z)(1+3z), & 0 < z < 1 \\ \frac{3(1+z)^2}{4}, & -1 < z < 0 \end{cases}$$

ب)

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 6x\,dy = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{F_X(x)} = \frac{1}{1-x}, \quad 0 < y \le 1 - x$$

ج)

$$W = X + Y$$

داریم:

$$F_W(w) = P(X + Y \le w) = \int_0^w \left(\int_0^{w-x} 6x\,dy \right) dx = w^3,$$

و

$$f_W(w) = \int_0^w 6x dx = 3w^2, \quad 0 < w < 1$$

$$E[W] = \frac{3}{4}$$

$$E[W^2] = \frac{3}{5}$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

(۶۲-۶

$$X = \frac{1}{Z}.$$

در جایی که $\mathbf{Z}$ متغیر تصادفی مربع-کی است. بنابراین ((۴-۳۹) را ببینید)

$$f_Z(z) = \frac{z^{-1/2}}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)} e^{-z/2} = \frac{z^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2}$$

یا

$$f_X(x) = \frac{1}{\left|\frac{dx}{dz}\right|} f_Z(1/x) = \frac{1}{x^2} \frac{x^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x^{3/2}} e^{-1/2x}, \quad x > 0$$

همچنین این نتیجه می‌دهد که

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-y^2/2x}$$

پس بنابراین

$$f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x) = \frac{1}{2\pi x^2} e^{-(1+y^2)/2x}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{XY}(x,y)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{-(1+y^2)/2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+y^2} \int_0^\infty e^{-u}\, du = \frac{1/\pi}{1+y^2}, \quad -\infty < y < \infty. \end{aligned}$$

پس $\mathbf{Y}$ یک تعریف از متغیر تصادفی کوشی است.

۶-۶۳) الف)برای هردو متغیرهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_{X+Y}^2 &= \operatorname{Var}(X+Y) = E[\{(X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\}^2] \\ &= \operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y) = \sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} \\ &\le (\sigma_X+\sigma_Y)^2\end{aligned}$$

بنابراین $\left|\rho_{XY}\right| \le 1$. پس

$$\sigma_{X+Y} \le \sigma_X + \sigma_Y,$$

و این به سادگی به دنبال دارد که

$$\frac{\sigma_{X+Y}}{\sigma_X+\sigma_Y} \le 1.$$

(به هر حال، (ب) به این آسانی نیست!)

ب) باید استفاده از نامساوی هولدر در سه بخش اثبات را انجام می‌دهیم.

(۱)**نامساوی هولدر**: تابع $\log x$ برای $0<\alpha<1$ محدب است، و بنابراین داریم:

$$\log[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2] \ge \alpha\log x_1 + (1-\alpha)\log x_2$$

یا

$$x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \le \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \quad 0<\alpha<1. \qquad (6.63-1)$$

فرض کنید

$$x_1 = |x|^p, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \text{ so that } 1-\alpha = 1-\frac{1}{p} \triangleq \frac{1}{q}, \quad x_2 = |y|^q \ (6.63-2)$$

پس از (۶-۶۳ -۱) نتیجه می‌شود

$$|xy| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}, \quad p>1, \qquad (6.63-3)$$

که نامساوی هولدر است. با توجه به (۶،۶۳-۲)

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \quad p>1, \quad q>1 \qquad (6.63-4)$$

(۲) تعریف می‌کنیم که

$$x = X\left(E\{|X|^p\}\right)^{-1/p}, \quad y = Y\left(E\{|Y|^q\}\right)^{-1/q}$$

در جایی که p و q مانند (۶،۶۳-۴) هستند. با جایگزینی این رابطه در نامساوی هولدر در (۶،۶۳-۳) داریم:

$$|XY| \le p^{-1}\,|X|^p\,(E\{|X|^p\})^{1/p-1}\,(E\{|Y|\})^{1/q}$$
$$+q^{-1}\,|Y|^q\,(E\{|Y|^q\})^{1/q-1}\,(E\{|X|^p\})^{1/p}. \qquad (6.63-5)$$

با گرفتن مقادیر قابل انتظار در دوطرف (۶٫۶۳-۵) داریم:

$$E\{|XY|\} \le (E\{|X|^p\})^{1/p}\,(E\{|Y|^q\})^{1/q} \qquad (6.63-6)$$

که تعریف عمومی از نامساوی کوشی-اسکوارتز است. (توجه کنید که $p = q = 2$ برابر با نامساوی کوشی-اسکوارتز است)

(۳) برای اثبات نامساوی مطلوب، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}|X+Y|^p &= |X+Y||X+Y|^{p-1}\\ &\le |X||X+Y|^{p-1} + |Y||X+Y|^{p-1}, \quad p>1\end{aligned}$$

با گرفتن مقادیر قابل انتظار در دوطرف (۶٫۶۳-۵) داریم:

$$E\{|X+Y|^p\} \le E\{|X||X+Y|^{p-1}\} + E\{|Y||X+Y|^{p-1}\}. \quad (6.63-7)$$

با اعمال (۶٫۶۳-۶) در هر جمله طرف راست (۶٫۶۳-۷) خواهیم داشت:

$$E\{|X||X+Y|^{p-1}\} \le (E\{|X|^p\})^{1/p}\left(E\{|X+Y|^{(p-1)q}\}\right)^{1/q} \quad (6.63-8)$$

و

$$E\{|Y||X+Y|^{p-1}\} \le (E\{|Y|^p\})^{1/p}\left(E\{|X+Y|^{(p-1)q}\}\right)^{1/q} \quad (6.63-9)$$

استفاده (۶٫۶۳-۸) و (۶٫۶۳-۹) با هم با $(p-1)q = p$ در (۶٫۶۳-۷) داریم:

$$E\{|X+Y|^p\} \le \left[(E\{|X|^p\})^{1/p} + (E\{|Y|^p\})^{1/p}\right]\cdot(E\{|X+Y|^p\})^{1/q}$$

یا برای $p > 1$

$$(E\{|X+Y|^p\})^{1/p} \le (E\{|X|^p\})^{1/p} + (E\{|Y|^p\})^{1/p}.$$

که نامساوی مطلوب است. از آن جایی که $p = 1$ به طور بدیهی حاصل می شود، داریم:

$$\frac{(E\{|X+Y|^p\})^{1/p}}{(E\{|X|^p\})^{1/p} + (E\{|Y|^p\})^{1/p}} \le 1, \quad p \ge 1.$$

۶-۶۴) الف) مثال ۶-۴۱ را ببینید. از آن جا

$$E(Y|X=x) = \mu_Y + \frac{\rho_{XY}\sigma_Y(x-\mu_X)}{\sigma_X}$$

ب) به طورمشابه

$$f_{X|Y}(X|Y=y) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

درجایی که

$$\mu = \mu_X + \frac{\rho_{XY}\sigma_X(y-\mu_Y)}{\sigma_Y}$$

و

$$\sigma^2 = \sigma_X^2(1-\rho_{XY}^2).$$

از آن جایی که

$$E(X^2|Y=y) = \mathrm{Var}(X|Y=y) + (E[X|Y=y])^2$$

نتیجه می‌گیریم:

$$E(X^2|Y=y) = \sigma^2 + \mu^2$$

۶-۶۵) الف) نکته پاورقی ۴ فصل را ببینید. از آن جا (یا به طور مستقیم) داریم

$$\mathrm{Var}(X|Y) \triangleq E(X^2|Y) - (E\{X|Y\})^2$$
$$\mathrm{Var}\,(E\{X|Y\}) \triangleq E\,[E\{X|Y\}]^2 - (E[E\{X|Y\}])^2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}\,(E\{X|Y\}) &= E\,[E\{X^2|Y\}] - (E[E\{X|Y\}])^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \mathrm{Var}(X) \qquad (1) \end{aligned}$$

یا

$$\mathrm{Var}(X) \geq E[\mathrm{Var}\{X|Y\}]$$

همچنین

$$\mathrm{Var}(X) \geq \mathrm{Var}[E\{X|Y\}]$$

ب) (۱) را ببینید.

۶-۶۶)

$$Z = aX + (1-a)Y, \qquad 0 < a < 1$$
$$\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}(Z) = a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2$$
$$\frac{\partial\sigma_Z^2}{\partial a} = 2a\sigma_1^2 + 2(1-a)(-1)\sigma_2^2 = 0$$

یا

$$a(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \sigma_2^2$$

$$a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < 1$$

$Var(Z)$ را حداقل می‌کند.

۶-۶۷) از (۶-۲۴۰)

$$E\{g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})\} = E\{E\{g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})|\underset{\sim}{y}\}\} = E\{g(x_n,\underset{\sim}{y})P\{\underset{\sim}{x} = x_n\}\}$$

از (۴-۷۴) با $A_n = \{x = x_n\}$

$$f_z(z) = \sum_n f_z(z|\underset{\sim}{x} = x_n)P\{\underset{\sim}{x} = x_n\}$$

۶-۶۸) الف) چگالی شرطی $f(y|x)$ به صورت $N\left(rx;\delta\sqrt{1-r^2}\right)$ می‌باشد [(۷-۴۲) را ببینید].

بنابراین

$$E\{f_y(\underset{\sim}{y}|x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y|x)f_y(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-(y-rx)^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right\}\exp\left\{\frac{-y^2}{2\sigma^2}\right\}dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(2-r^2)}}\exp\left\{\frac{-r^2x^2}{2\sigma^2(2-r^2)}\right\}$$

ب) از (۶-۲۴۱) نتیجه می‌شود که:

$$E\{f_x(\underset{\sim}{x})f_y(\underset{\sim}{y})\} = E\{f_x(\underset{\sim}{x})E\{f_y(\underset{\sim}{y}|\underset{\sim}{x})\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\ E\{f_y(y|x)\}f_x(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^3\sqrt{2\pi(2-r^2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{\sigma^2}\right\}\exp\left\{\frac{-r^2x^2}{2\sigma^2(2-r^2)}\right\}dx = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{4-r^2}}$$

۶-۶۹) با استفاده از (۶-۶۴) و قضیه پرایس (۱۰-۹۴):

$$\frac{\partial E\{|\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{y}|\}}{\partial\mu} = E\left\{\frac{d|\underset{\sim}{x}|}{d\underset{\sim}{x}}\ \frac{d|\underset{\sim}{y}|}{\partial\underset{\sim}{y}}\right\} = E\{\operatorname{sgn}\underset{\sim}{x}\operatorname{sgn}\underset{\sim}{y}\}$$

$$= P\{\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{y} > 0\} - P\{\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{y} < 0\} = \frac{2\alpha}{\pi} = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\mu}{\sigma_1\sigma_2}$$

اگر $\mu = 0$ آن‌گاه تابع متغیرهای تصادفی x و y مستقل هستند، و بنابراین

$$E\{|\underline{x}\,\underline{y}|\}\Big|_{\mu=0} = E\{|\underline{x}|\}E\{|\underline{y}|\} = \frac{2}{\pi}\sigma_1\sigma_2$$

[(۵-۷۴) را ببینید]. با انتگرال گیری از (۱) و ب استفاده از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$E\{|\underline{x}\,\underline{y}|\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\mu} \arcsin\frac{C}{\sigma_1\sigma_2}\,dC + \frac{2}{\pi}\sigma_1\sigma_2 = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha)$$

۶-۷۰) از مثال ۶-۴۱

$$f(y|x) : N(\eta_2 + \frac{r\sigma_2}{\sigma_1}x ; \sigma_2\sqrt{1-r^2}) = N(4+x ; \sqrt{3})$$

$$f(x|y) : N(\eta_1 + \frac{r\sigma_1}{\sigma_2}y ; \sigma_1\sqrt{1-r^2}) = N(3+\frac{y}{4} ; \sqrt{3}/2)$$

۶-۷۱) چگالی جرم مربع $|x| \le 1, |y| \le 1$ از صفحه xy برابر است با $1/4$. بنابراین

$P\{r \le 1\} = \pi/4$ و $P\{r \le r\} = \pi r^2/4$ برای $r < 1$. این نتیجه می‌دهد:

$$P\{r \le r, r \le 1\} = \begin{cases} P\{r \le r\} = \pi r^2/4 & r \le 1 \\ P\{r \le 1\} = \pi/4 & r > 1 \end{cases}$$

$$F_r(r|M) = \frac{P\{r \le r, M\}}{P(M)} = \begin{cases} r^2 & r \le 1 \\ 1 & r > 1 \end{cases} \qquad f_r(r|m) = \begin{cases} 2r, & r < +1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۹-۷۲)

$$\underline{z} = \underline{x} + \underline{y} \qquad \underline{w} = \underline{x} \qquad f_{xz}(x,z) = f_{xy}(x, z-x)$$

اگر

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)f_y(y)$$

آن گاه

$$f_z(z|x) = \frac{f_{xz}(x,z)}{f_x(x)} = f_y(z-x)$$

۶-۷۳) دستگاه

$$z = F_x(x) \qquad w = F_y(y|x)$$

تنها دارای جواب $0 \le w \le 1$ و $z \le z \le 1$ است. به علاوه

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$J = f_x(x) f_y(y|x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = f_y(y|x)$$

$$f_{zw}(z,w) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x) f_y(y|x)} = 1 \quad \text{for} \quad 0 \le z,w \le 1$$

۶-۷۴) تابع‌های $\{r$ مین سکه را انتخاب کرده ایم$\} = C_r$ و $\{$خطها با ترتیب مشخص$\} = A_k$. از فرض نتیجه می‌شود که

$$P(C_r) = \frac{1}{m} \qquad P(A_k|C_r) = p_r^k(1-p_r)^{n-k}$$

امیدواریم که احتمال $P\left(C_r|A_k\right)$ را پیدا کنیم. توابع C_r از یک افراز بنابراین

$$P(C_r|A_k) = \frac{\frac{1}{m}P(A_k|C_r)}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(A_k|C_i)}$$

۶-۷۵) امیدواریم که نشان دهیم که

$$E(\underset{\sim}{x}^2) = \frac{n}{n-1}$$

از صفحه ۲۰۷: $x^2 = ny^2/z$ در جایی که y عبارت است از $N(0,1)$ و z عبارت است از $x^2(n)$. بنابراین $E\{y^2\} = 1$ و (همچنین (۴-۳۵) و (۴-۳۹))

$$E\left\{\frac{1}{\underset{\sim}{z}}\right\} = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} z^{n/2-2} e^{-z/2} dz = \frac{2^{m/2-1}\Gamma(n/2-1)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$$

از این رابطه و از رابطه مستقل y و z این نتیجه می‌شود که:

$$E(\underset{\sim}{x}^2) = n\, E(\underset{\sim}{y}^2)\, E\left\{\frac{1}{\underset{\sim}{z}}\right\} = \frac{n}{n-2}$$

۶-۷۶) از (۶-۲۲۲):

$$R_x(x) = \exp\left\{-\int_0^x \beta_x(t)dt\right\} = \exp\left\{-k\int_0^x \beta_y(t)dt\right\} = R_y^k(t)$$

۶-۷۷) از (۵-۸۹) و $x = |z|^2$ و $\alpha = \varepsilon^2$ نتیجه می‌شود که

$$E\{|z|^2 > \varepsilon^2\} \le \frac{E\{|z|^2\}}{\varepsilon^2}$$

برای هر z. و این نتیجه را به دنبال دارد که $z = x - y$.

۶-۷۸)

$$E\{U(a-x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U(a-x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F_x(a)$$

$$E\{U(b-y)\} = F_y(b)$$

$$E\{U(a-x)U(b-y) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x,y)dxdy = F_{xy}(a,b)$$

پس

$$F_{xy}(a,b) = F_x(a)F_y(b)$$

۶-۷۹) از مثال ۶-۳۸

$$E\{y|x \le 0\} = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_y(y|x \le 0)dy = \frac{1}{F_x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} y\ \frac{\partial F(0,y)}{\partial y}\ dy$$

از (۷-۴۱) و (۷-۵۷) داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\{y|x\}f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} y\,\frac{\partial F(0,y)}{\partial y}dy$$

فصل هفتم

(۱-۷

$$0 \le P\{x_1 < \underline{x} \le x_2,\ y_1 < \underline{y} \le y_2,\ z_1 < \underline{z} \le z_2\} =$$

$$= P\{\underline{x} \le x_2,\ y_1 < \underline{y} \le y_2,\ z_1 < \underline{z} \le z_2\} - P\{\underline{x} \le x_1,\ y_1 < \underline{y} \le y_2,\ z_1 < \underline{z} \le z_2\} =$$

$$= P\{\underline{x} \le x_2,\ \underline{y} \le y_2,\ z_1 < \underline{z} \le z_2\} - P\{\underline{x} \le x_2,\ \underline{y} \le y_1,\ z_1 < \underline{z} \le z_2\}$$

$$- P\{\underline{x} \le x_1,\ \underline{y} \le y_2,\ z_1 < \underline{z} \le z_2\} + P\{\underline{x} \le x_1,\ \underline{y} \le y_1,\ z_1 < \underline{z} \le z_2\} =$$

$$= P\{\underline{x} \le x_2,\ \underline{y} \le y_2,\ \underline{z} \le z_2\} - P\{\underline{x} \le x_2,\ \underline{y} \le y_2,\ \underline{z} \le z_1\}$$

$$- P\{\underline{x} \le x_2,\ \underline{y} \le y_1,\ \underline{z} \le z_2\} + P\{\underline{x} \le x_2,\ \underline{y} \le y_1,\ \underline{z} \le z_1\}$$

$$- P\{\underline{x} \le x_1,\ \underline{y} \le y_2,\ \underline{z} \le z_2\} + P\{\underline{x} \le x_1,\ \underline{y} \le y_2,\ \underline{z} \le z_1\}$$

$$+ P\{\underline{x} \le x_1,\ \underline{y} \le y_1,\ \underline{z} \le z_2\} - P\{\underline{x} \le x_1,\ \underline{y} \le y_1,\ \underline{z} \le z_1\}$$

(۲-۷

$$P\{\underline{x}_A = 1,\ \underline{x}_B = 1,\ \underline{x}_C = 1\} = P(ABC) = 1/4$$

$$P\{\underline{x}_A = 1\} = P(A) = 1/2 \qquad P\{\underline{x}_B = 1\} = P(B) = 1/2$$

$$P\{\underline{x}_C = 1\} = P(C) = 1/2$$

بنابراین

$$P\{x_A = 1,\ \underline{x}_B = 1,\ \underline{x}_C = 1\} \ne P\{\underline{x}_A = 1\}P\{\underline{x}_B = 1\}P\{\underline{x}_C = 1\}$$

پس x_A, x_B, x_C مستقل نیستند، اما

$$P\{\underline{x}_A = 1,\ \underline{x}_B = 1\} = P(AB) = 1/4 = P\{\underline{x}_A = 1\}P\{\underline{x}_B = 1\}$$

به طور مشابه برای بقیه ترکیبها، به این معنی که وقتی

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

نتیجه می‌گیریم که

$$P(A\bar{B}) = 1/2 - 1/4 = 1/4 \qquad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1/2$$
$$P\{\underline{x}_A = 1, \underline{x}_B = 0\} = P(A\bar{B}) = 1/4$$
$$P\{\underline{x}_B = 0\} = P(\bar{B}) = 1/2$$

پس

$$P\{\underline{x}_A = 1, \underline{x}_B = 0\} = P\{\underline{x}_A = 1\}P\{\underline{x}_B = 0\}$$

۷-۳) اگر x, y, z جفت جفت مستقل باشند، آن‌گاه

$$r_{xy} = r_{xz} = r_{yz} = 0$$

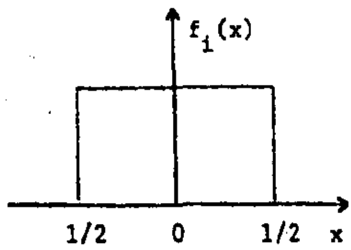
واز (۷-۶۰) نتیجه می‌شود (با فرض $\eta_x = \eta_y = \eta_z = 0$)

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2\omega_1^2 + \sigma_2^2\omega_2^2 + \sigma_3^2\omega_3^2\right)\right\}$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)$$

۷-۴)

$$\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3.$$

برای تعیین کردن $E\{x^4\}$ از توابع مشخصه استفاده می‌کنیم.



$$\Phi_f(\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j\omega x}dx = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

$$\Phi(\omega) = \left[\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}\right]^3 = \left(1 - \frac{\omega^2}{24} + \frac{\omega^4}{1920} - \cdots\right)^3$$

ضریب ω^4 در این بسط برابر با $\frac{13}{1920}$ است. بنابراین

$$\frac{1}{4!}\ \frac{d^4\Phi(0)}{d\omega^4} = \frac{13}{1920}$$

و [(۵-۱۰۳) را ببینید]

$$E\{x^4\} = m_4 = \frac{13\times 4!}{1920} = \frac{13}{80}$$

۵-۷) الف)چگالی مشترک $f(x,y)$ دارای تقارن دایره‌ای است، چون

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dz$$

فقط به x^2+y^2 وابسته است. به طور مشابه برای $f(x,z)$ و $f(y,z)$ برقرار است. و از آن جایی که تابع متغیر تصادفی x و y و z مستقل هستند، آن‌ها باید نرمال باشند[(۶-۲۹) را ببینید].

ب) از (الف) نتیجه می‌شود که تابع متغیرهای تصادفی v_x ، v_y ، v_z عبارتست از $N(0;\sqrt{KT/m})$.

با $\delta^2 = KT/m$ و $n=3$ این از (۷-۶۲)-(۷-۶۳) و (۵-۲۵) نتیجه می‌شود.

$$f_v(v) = \sqrt{\frac{2m^3}{\pi k^3T^3}}\ v^2\ e^{-mv^2/2kT}\ U(v)$$

$$E\{v\} = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \qquad E\{v^{2n}\} = 1\times 3\cdots(2n+1)\left(\frac{kT}{m}\right)^n$$

۷-۶) از مسئله ۶-۲۵ داریم:

$$y = ax + b, \quad z = cy + d,$$

بنابراین

$$z = Ax + B \qquad \eta_z = A\eta_x + B \qquad \sigma_z = A\sigma_x$$

$$E\{(z - \eta_z)(x - \eta_x)\} = E\{A(x - \eta_x)(x - \eta_x)\} = A\sigma_x^2 = \sigma_x\sigma_z$$

۷-۷) این از (۶-۲۲۱) با

$$g_1(x) = x, \quad g_2(y) = y$$

نتیجه می‌شود، اگر همه چگالی ها را با چگالی شرطی با فرض x_z جایگزین کنیم.

۷-۸) دلیل مانند (۷-۸۲) است، نتیجه می گیریم که

$$E\{[y - (a_1x_1 + a_2x_1)]^2\} \text{ is minimum if}$$

$$E\{[y - (a_1x_1 + a_2x_2)]x_i\} = 0 \qquad i = 1,2$$

با درنظر گرفتن

$$R_{0i} = E\{y x_i\} \quad , \quad R_{ij} = E\{x_i x_j\}$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که:

$$R_{01} = a_1R_{11} + a_2R_{12} \qquad R_{02} = a_1R_{12} + a_2R_{22}$$

اما

$$\hat{E}\{y|x_1\} = Ax_1 \qquad A = R_{01}/R_{11} = a_1 + a_2R_{12}/R_{11}$$

$$\hat{E}\{\hat{E}\{\underline{y}|\underline{x}_1,\underline{x}_2\}|\underline{x}_1\} = \hat{E}\{a_1\underline{x}_1 + a_2\underline{x}_2|\underline{x}_1\}$$
$$= a_1\underline{x}_1 + a_2\hat{E}\{\underline{x}_2|\underline{x}_1\} = \left(a_1 + a_2\frac{R_{12}}{R_{11}}\right)\underline{x}_1 = A\,\underline{x}_1$$

۷-۹) مانند مسئله ۶-۵۱:

$$E^2\{\underline{x}_i\underline{x}_j\} \le E^2\{\underline{x}_i\}E^2\{\underline{x}_j\} = M^2 \qquad |E\{\underline{x}_i\underline{x}_j\}| \le M$$

$$E\{\underline{s}^2|\underline{n} = n\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{x}_i\underline{x}_j\right\} \le Mn^2$$

بنابراین [(۶-۲۴۰) را ببینید]

$$E\{\underline{s}^2\} = E\{E\{\underline{s}^2|\underline{n}\}\} < E\{M\underline{n}^2\}$$

۷-۱۰) همان‌گونه که می‌دانیم:

$$1 + x + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

با تفریق، خواهیم داشت:

$$1 + 2x + \cdots + n\,x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (i)$$

متغیر تصادفی x_1 برابر است با تعداد پرتاب‌ها تا نمایش خط برای اولین بار است، بنابراین x_1 مقادیر $1,2,\cdots$ را با احتمال $P\{x_1 = k\} = pq^{k-1}$ می‌گیرد. در نتیجه [(۳-۱۲) و (i) را ببینید]

$$E\{\underline{x}_1\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P\{\underline{x}_1 = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p\,q^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

شروع شماره بعد از آمدن اولین خط را نشان می‌دهد، پس نتیجه می‌گیریم که متغیر تصادفی $x_2 - x_1$ دارای آمار مشابه با متغیر تصادفی x_1 است. بنابراین،

$$E\{\underline{x}_2 - \underline{x}_1\} = E\{\underline{x}_1\} \qquad E\{\underline{x}_2\} = 2E\{\underline{x}_1\} = \frac{2}{p}$$

به دلیل مشابه نتیجه می‌گیریم که:

$$E\{\underline{x}_n - \underline{x}_{n-1}\} = E\{\underline{x}_1\},$$

بنابراین

$$E\{\underline{x}_n\} = E\{\underline{x}_{n-1}\} + E\{\underline{x}_1\} = \frac{n-1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{n}{p}$$

۷-۱۱) اگر n حادثه در روز رخ دهد، احتمال m مصیبت از آن‌ها برابر $\binom{n}{m} p^m q^{n-m}$ برای $m \le n$ و صفر برای $m > n$ است. بنابراین،

$$P\{\underline{m} = m \mid \underline{n} = n\} = \begin{cases} 0 & m > n \\ \binom{n}{m} p^m q^{n-m} & m \le n \end{cases}$$

از این نتیجه می‌شود:

$$E\{e^{j\omega \underline{m}} \mid \underline{n} = n\} = \sum_{m=0}^{n} e^{j\omega m} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = (p\, e^{j\omega} + q)^n$$

اما

$$P\{\underline{n} = n\} = e^{-a} \frac{a^n}{n!} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

پس

$$E\{e^{j\omega \underline{m}}\} = E\{E\{e^{j\omega \underline{m}} \mid \underline{n}\}\} = E\{(p\, e^{j\omega} + q)^{\underline{n}}\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (p\, e^{j\omega} + q)^n e^{-a} \frac{a^n}{n!} = e^{a(p\, e^{j\omega} + q)} e^{-a} = e^{a p (e^{j\omega} - 1)}$$

این نشان می‌دهد که متغیر تصادفی m یک توزیع پواسون با پارامتر p است [(۵-۱۱۹) را ببینید].

۷-۱۲) ابتدا باید توزیع شرطی را مشخص کنیم

$$F_s(s \mid \underline{n} = n) = \frac{P\{\underline{s} \le s,\ \underline{n} = n\}}{P\{\underline{n} = n\}}$$

توابع $\{s < s, n = n\}$ شامل همه خروجی ها مانند $n = n$ و $\sum_{k=1}^{n} x_k \le s$ می باشد. وقتی متغیر تصادفی n مستقل از تابع متغیر تصادفی x_k است، نتیجه می‌شود که:

$$F_{s}(s|n=n) = P\{\sum_{k=1}^{n} x_k \le s\}P\{n=n\}/P\{n=n\}$$

از رابطه بالا و استقلال متغیر تصادفی x_k، نتیجه می‌شود [(۷-۵۱) را ببینید] :

$$f_s(s|n=n) = f_1(s) * f_2(s) * \cdots * f_n(s)$$

با جایگزینی $A_k = \{n=k\}$ در (۴-۷۴)، داریم:

$$f_s(s) = \sum_k p_k \ [f_1(s) * \cdots * f_k(s)]$$

۷-۱۳) از مستقل بودن تابع متغیر تصادفی n و x_i نتیجه می‌شود که

$$E\{e^{sy}|n=k\} = E\{e^{s(x_1+\cdots+x_k)}\}$$

$$= E\{e^{sx_1}\} \cdots E\{e^{sx_k}\} = \Phi_x^k(s)$$

پس

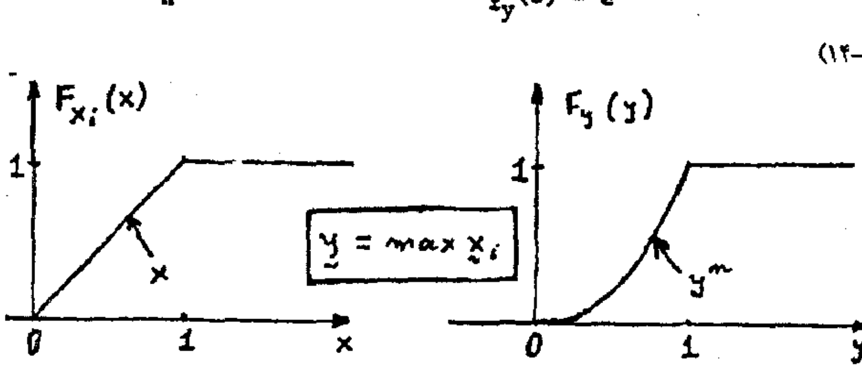
$$\Phi_y(s) = E\{e^{sy}\} = E\{E\{e^{sy}|n\}\} = E\{\Phi_x^n(s)\}$$

$$= \Gamma_n[\Phi_x(s)] \text{ because } E\{z^n\} = \Gamma_n(z)$$

مورد خاص: اگر n دارای توزیع پواسون با پارامتر a باشد، آن گاه [(۵-۱۱۹) را ببینید]

$$\Gamma_n(z) = e^{az-a} \qquad \Phi_y(s) = e^{a\Phi_x(s)-a}$$

۷-۱۴)



$$\{\underset{\sim}{y} \le y\} = \{\underset{\sim}{x}_1 \le y,\ \underset{\sim}{x}_2 \le y,\ \cdots,\ \underset{\sim}{x}_n \le y\}$$

از مستقل بودن x_i و نمودار بالا نتیجه می‌شود که:

$$F_y(y) = P\{\underset{\sim}{y} \le y\} = P\{\underset{\sim}{x}_1 \le y\}\cdots P\{\underset{\sim}{x}_n \le y\}$$
$$= F_1(y)\ \cdots\ F_n(y)$$

در جایی که $F_i(y) = y$ برای $0 \le y \le 1$ است.

۷-۱۵) متغیر تصادفی x در فضای صفحه S تعریف شده است. مجموعه

$$C = \{z < \underset{\sim}{z} \le z + dz,\ w < \underset{\sim}{w} \le w + dz) \qquad z > w$$

یک پیشامد در فضای صفحه S_n است که آزمایشات تکرار شده با احتمال زیر است:

$$P(C) = f_{zw}(z,w)dzdw$$

توابع زیر را معرفی می کنیم:

$$D_1 = (\underset{\sim}{x} \le w) \qquad D_2 = \{w < \underset{\sim}{x} \le w + dw) \qquad D_3 = \{w + dw < \underset{\sim}{x} \le z)$$
$$D_4 = (z < \underset{\sim}{x} \le z + dz) \qquad D_5 = \{z + dz < \underset{\sim}{x}\}$$

این پیشامدها افرازی از S و با احتمالات $p_i = P(D_i)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنند:

$$F_x(w) \qquad f_x(w)dw \qquad F_x(z)-F_x(w+dw) \qquad f_x(z)dz \qquad 1-F_x(z+dz)$$

پیشامد C انفاق می‌افتد، اگر و فقط اگر کوچک‌ترین تابع متغیر تصادفی x_i در فاصله $(w, w+dw)$ باشد، بزرگ‌ترین این فاصله $(z, z+dz)$ و متعاقبا بقیه در فاصله بین $w+dw$ و z هستند. در این مورد اگر و فقط اگر D_1 اصلا اتفاق نیفتد، D_2 یک مرتبه اتفاق می افتد و D_3، $n-2$ دفعه ، D_4 یک بار اتفاق می افتد و D_6 اصلا رخ نمی‌دهد. با

$$k_1=0 \qquad k_2=1 \qquad k_3=n-2 \qquad k_4=1 \qquad k_5=0$$

از (۴-۱۰۲) نتیجه می‌شود که:

$$P(C) = \frac{n!}{(n-2)!}p_2\, p_3^{n-2}\, p_4 = n(n-1)f_x(w)dw\ [f_x(z)-F_x(w+dw)]^{n-1}f_x(z)dz$$

برای $z > w$ و جاهای دیگر صفر است.

۷-۱۶) اگر z به صورت $N(\eta,1)$ باشد، آن‌گاه:

$$E(e^{s\underline{z}^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{sz}e^{-(z-\eta)^2/2}dz$$

$$sz^2 - \frac{(z-\eta)^2}{2} = \left(s - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{\eta}{1-2s}\right)^2 + \frac{\eta^2 s}{1-1s}$$

وقتی

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\eta}^{\infty} e^{-a(z-b)^2}dz = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که:

$$E(e^{s\underline{z}^2}) = \frac{1}{\sqrt{2(1/2-S)}}\exp\left\{\frac{\eta^2 S}{1-2S}\right\}$$

$$\Phi_w(s) = \frac{1}{\sqrt{1-2s}}\exp\left\{\frac{\eta_1 s}{1-2s}\right\}\cdots\frac{1}{\sqrt{1-2s}}\exp\left\{\frac{\eta_n s}{1-2s}\right\}$$

۱۷-۷) می خواهیم نشان دهیم که متغیر تصادفی

$$\bar{\underline{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{x}_i \qquad \underline{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i-\bar{\underline{x}})^2$$

مستقل است. از آن جایی که s^2 یک تابع از متغیر تصادفی نرمال $x_i - \bar{x}$ است، کافی است نشان دهیم که هر یک از متغیرهای تصادفی مستقل از $\bar{x}$ هستند. برای ساده‌ترشدن مطلب فرض می‌کنیم که $E\{x_i\} = 0$ است. بنابراین

$$E(\underline{x}_i\bar{\underline{x}}) = \frac{1}{n}E(\underline{x}_i^2) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad E(\bar{\underline{x}}\bar{\underline{x}}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\underline{x}_i^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

چون $E\{x_i\, x_j\} = 0$ برای $i \neq i$ می باشد. پس

$$E((\underline{x}_i-\bar{\underline{x}})\bar{\underline{x}}) = 0$$

بنابراین، متغیر تصادفی $\bar{x}$ – x_iو $\bar{x}$ متعامد هستند، و از آن جایی که آن ها دارای توزیع مشترک نرمال هستند، پس مستقل می باشند.

۱۸-۷) وقتی

$$\eta_s = a_0 + a_1\eta_1 + a_2\eta_2$$

[(۷-۸۷) را ببینید]، این به این معنی است که خطا در رابطه زیر صفر است.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{s} - (a_0 + a_1\underline{x}_1 + a_2\underline{x}_2) = (\underline{s} - \eta_s) - [a_1(x_1 - \eta_1) + a_2(\underline{x}_2 - \eta_2)]$$

به علاوه ε عمود بر x_i است، در نتیجه عمود بر $x_i - \eta_i$ می‌باشد.

۷-۱۹) از اصل تعامد:

$$\hat{E}\{\underline{y}|\underline{x}_1, \underline{x}_2\} = a_1\underline{x}_1 + a_2\underline{x}_2 \qquad \underline{y} - \{a_1x_1 + a_2\underline{x}_2\} \perp \underline{x}_1, x_2$$

$$\hat{E}\{y|x_1\} = A\,\underline{x}_1 \qquad y - A\,\underline{x}_1 \perp \underline{x}_1$$

بنابراین

$$\underline{y} - (a_1\underline{x}_1 + a_2\underline{x}_2) - (\underline{y} - A\,x_1) = a_1\underline{x}_1 + a_2\,\underline{x}_2 - A\,\underline{x}_1 \perp \underline{x}_1$$

از این نتیجه می‌شود که:

$$\hat{E}\{a_1x_1 + a_2\underline{x}_2|\underline{x}_1\} = A\,\underline{x}_1$$

$$\hat{E}\{\hat{E}\{\underline{y}|\underline{x}_1, \underline{x}_2\}|\underline{x}_1\} = \hat{E}\{\underline{y}|\underline{x}_1\}$$

۷-۲۰) پیشامد $\{\underline{x} \le x\}$ اتفاق می‌افتد، اگر حداقل یک نقطه در فاصله $(0,x)$ باشد، پیشامد $\{\underline{y} \le y\}$ اتفاق می‌افتد، اگر همه نقاط در فاصله $(0,y)$ باشند:

$$A_x = \{\text{at least one point in } (0,x)\} = \{\underline{x} \le x\}$$

$$B_y = \{\text{no points in } (y,1)\}$$

$$= \{\text{all points in } (0,y)\} = \{\underline{y} \le y\}$$

بنابراین برای $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ داریم:

$$F_x(x) = P(A_x) = 1 - P(\bar{A}_x) = 1 - (1 - x)^n$$

$$F_y(y) = P(B_y) = y^n$$

به علاوه:

$$\{\underline{x} \le x,\ \underline{y} \le y\} = A_x B_y \qquad A_x B_y + \bar{A}_x B_y = B_y$$

اگر $x \le y$ باشد، آن‌گاه:

$$\bar{A}_x B_y = \{\text{all points in } (x,y)\}$$

$$P(\bar{A}_x B_y) = (y - x)^n$$

اگر $x > y$ باشد، آن‌گاه

$$\bar{A}_x B_y = \{\emptyset\}$$

پس:

$$F_{xy}(x,y) = P(A_x B_y) = \begin{cases} y^n - (y-x)^n & x \le y \\ y^n & x > y \end{cases}$$

۷-۲۱) فرض کنید که

$$E\{\underline{x}_i\} = 0,\ E\{\underline{x}_i^2\} = \sigma^2,\ E\{\underline{x}_i^4\} = \mu_4$$

اگر

$$\text{If } \underline{A} = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i^2, \text{ then } E\{\underline{A}\} = n\sigma^2$$

$$E\{\underline{A}^2\} = \sum_{i,j=1}^{n} E\{\underline{x}_i^2 \underline{x}_j^2\} = n\mu_4 + (n^2 - n)\sigma^4$$

چون

$$E\{\underline{x}_i^2 \underline{x}_j^2\} = \begin{cases} \mu_4 & i = j \\ \sigma^4 & i \ne j \end{cases}$$

به علاوه

$$E\{\bar{x}^2 x_j^2\} = \frac{1}{n^2} E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 x_j^2\right\} = \frac{1}{n^2}[\mu_4 + (n-1)\sigma^4]$$

$$E\{\bar{x}^2 A\} = \frac{1}{n}[\mu_4 + (n-1)\sigma^4]$$

$$E\{\bar{x}^4\} = \frac{1}{n^4} E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4\right\} = \frac{1}{n^4}[n\mu_4 + 3n(n-1)\sigma^4]$$

چون

$$E\{x_i x_j x_k x_r\} = \begin{cases} \mu_4 & i = j = k = r \quad [\text{n such terms}] \\ \sigma^4 & i = j \neq k = r \quad [\text{3n(n-1) such terms}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

واضح است که،

$$(n-1)\bar{V} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = A - n\bar{x}^2, \quad E\{\bar{V}\} = \sigma^2$$

بنابراین

$$(n-1)^2 E\{V^2\} = E\{A^2\} - 2nE\{\bar{x}^2 A\} + n^2 E\{\bar{x}^4\}$$

$$= n\mu_4 + (n^2 - n)\sigma^4 - 2[\mu_4 + (n-1)\sigma^4] + \frac{1}{n}[\mu_4 + 3(n-1)\sigma^4]$$

از این نتیجه می‌شود:

$$E\{\bar{V}^2\} = \frac{\mu_4}{n} + \frac{n^2 - 2n + 3}{n(n-1)}\sigma^4 = \sigma^4 + \sigma_{\bar{V}}^2$$

نکته: اگر تابع متغیر تصادفی x_i برابر $N(0,\delta^2)$ باشد، آن گاه $\mu_4 = 3\delta^4$ است.

$$\sigma_{\bar{V}}^2 = \frac{1}{n}\left(3\sigma^4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right) = \frac{2}{n-1}\sigma^4$$

۷-۲۲) از مسئله ۶-۴۹:

$$E\{|\underset{\sim}{x}_{2i} - \underset{\sim}{x}_{2i-1}|\} = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \qquad E\{|\underset{\sim}{x}_{2i} - \underset{\sim}{x}_{2i-1}|^2\} = 2\sigma^2$$

بنابراین

$$E\{|\underset{\sim}{x}_{2i} - \underset{\sim}{x}_{2i-1}||\underset{\sim}{x}_{2j} - \underset{\sim}{x}_{2j-1}|\} = \begin{cases} 2\sigma^2 & i = j \\ 4\sigma^2/\pi & i \neq j \end{cases}$$

$$E\{\underset{\sim}{z}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2n}\ \frac{2\sigma n}{\sqrt{\pi}} = \sigma$$

$$E\{\underset{\sim}{z}^2\} = \frac{\pi}{4n^2}\left[2n\sigma^2 + \frac{4\sigma^2}{\pi}(n^2 - n)\right]$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\pi}{2n}\sigma^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2 - \sigma^2 = \frac{\pi - 2}{2n}\ \sigma^2$$

۷-۲۳) اگر

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

آن‌گاه:

$$\sum_j a_{ij}R_{ji} = 1$$

پس

$$E\{\underset{\sim}{X}R^{-1}\underset{\sim}{X}^t\} = E\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{x}_i a_{ij}\underset{\sim}{x}_j\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}R_{ji} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

۷-۲۴) چگالی $f_z(z)$ از مجموع $z = x_1 + \cdots + x_n$ به سمت منحنی با واریانس $\delta_1^2 + \cdots + \delta_n^2 \to \infty$ وقتی $n \to \infty$ میل می‌کند(در نظر می گیریم که $\delta_i > c > 0$). بنابراین، $f_z(z)$ به سمت مقدار ثابت در طول 2π میل می‌کند. نتیجه مانند (۵-۳۰) و مسئله ۵-۲۰ می‌باشد.

۷-۲۵) وقتی $a_n - a \to 0$ ، نتیجه می گیریم که

$$E\{(\underset{\sim}{x}_n - a)^2\} = E\{[(\underset{\sim}{x}_n - a_n) + (a_n - a)]^2\}$$

$$= E\{(\underset{\sim}{x}_n - a_n)^2\} + 2(a_n - a)E\{\underset{\sim}{x}_n - a_n\} + (a_n - a)^2 \to 0$$

وقتی $n \to \infty$.

۷-۲۶) اگر $E\{x_n x_m\} \to a$ وقتی که $n, m \to \infty$ آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\varepsilon > 0$، پس می‌توان n_0 پیدا کرد به طوری که

$$E\{\underset{\sim}{x}_n \underset{\sim}{x}_n\} = a + \theta(n,m) \qquad |\theta| < \varepsilon \qquad \text{if } n,m > 0$$

پس

$$E\{(\underset{\sim}{x}_n - \underset{\sim}{x}_m)^2\} = E\{\underset{\sim}{x}_n^2\} + E\{\underset{\sim}{x}_m^2\} - 2E\{\underset{\sim}{x}_n \underset{\sim}{x}_m\}$$

$$= a + \theta_1 + a + \theta_2 - 2(a + \theta_3) = \theta_1 + \theta - 2\theta_3$$

و چون $|\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3| < 4\varepsilon$ به ازای تمام ε هاست، از این نتیجه می‌شود که $E\{(x_n - x_m)^2\} \to 0$ وقتی که (کوشی) x_n به سمت حد میل می کند.

بالعکس اگر $x_n \to x$ از دید حداقل مربعات باشد، پس: $E\{(x_n - x_m)^2\} \to 0$ است. به علاوه

$$E\{\underset{\sim}{x}_n^2\} \to E\{\underset{\sim}{x}^2\} \qquad E\{\underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{x}_n\} \to E\{\underset{\sim}{x}^2\}$$

چون (مسئله ۶-۵۱) را ببینید)

$$E^2\{\underset{\sim}{x}_n^2 - \underset{\sim}{x}^2\} = E^2\{(\underset{\sim}{x}_n - \underset{\sim}{x})(\underset{\sim}{x}_n + \underset{\sim}{x})\}$$

$$\le E\{(\underset{\sim}{x}_n - \underset{\sim}{x})^2\}E\{(\underset{\sim}{x}_n + \underset{\sim}{x})^2\} \to 0$$

$$E^2\{\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{x}_n - \underset{\sim}{x})\} \le E\{\underset{\sim}{x}^2\}E\{(\underset{\sim}{x}_n - \underset{\sim}{x})^2\} \to 0$$

به طور مشابه $E\{(x_n - x)(x_m - x)\} \to 0$. بنابراین

$$E\{x_n x_m\} + E\{x^2\} - E\{x\, x_n\} - E\{x\, x_m\} \to 0$$

از ترکیب روابط نتیجه می گیریم که $E\{(x_n x_m)\} \to E\{x^2\}$.

(۲۷-۶

$$E\{x_k\} = 0 \qquad E\{x_k^2\} = \sigma_k^2$$

$$E\left\{\left(\sum_{k=n_1}^{n_2} x_k\right)^2\right\} = \sum_{k=n_1}^{n_2} E\{x_k^2\}$$

اگر $\sum_{K=1}^{\infty} \delta_k^2 < \infty$، از این نتیجه می‌شود که $\varepsilon > 0$ است. بنابراین می‌توانیم n_0 را طوری پیدا کنیم که $\sum_{K=n+1}^{n+m} \delta_k^2 < \varepsilon$ برای همه mها و $n > n_0$ باشد. در نتیجه

$$E\{(y_{n+m} - y_n)^2\} = E\left\{\left(\sum_{k=n+1}^{n+m} x_k\right)^2\right\} = \sum_{k=n+1}^{n+m} \sigma_k^2 < \varepsilon$$

این نشان می‌دهد که (کوشی)، y_k از دید حداقل مربعات همگراست. برای اثبات عکس این مطلب بحث به طور مشابه می‌باشد.

(۲۸-۷ اگر $f_i(x) = ce^{-cx}U(x)$ آن‌گاه

$$\Phi_1(s) = \frac{c}{c-s}$$

$$\Phi(s) = \Phi_1(s) \cdots \Phi_n(s) = \frac{c^n}{(c-s)^n}$$

بنابراین۱مثال (۵-۲۹) را ببینید)

$$f(x) = \frac{c^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-cx}\, U(x)$$

۷-۲۹) از مسئله ۷-۲۸ نتیجه می‌شود که $f(x)$ چگالی مجموع $x = x_1 + \cdots + x_n$ می‌باشد. علاوه بر این،

$$E\{x\} = \frac{n}{c} \qquad \sigma_x^2 = \frac{n}{c^2}$$

از قضیه حد مرکزی نتیجه می‌شود که برای n بزرگ چگالی به منحنی نرمال با میانگین n/c و واریانس n/c^2 میل می‌کند.

۷-۳۰)

$$E\{r_i\} = 500 \qquad \sigma_i^2 = 50^2/3$$

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \qquad E\{r\} = 2,000 \qquad \sigma_r^2 = 10^4/3$$

بنابراین، r به طور تقریبی عبارتست از $N\left(2000;10/\sqrt{3}\right)$.

$$P\{1900 \le r \le 2100\} = 2\ G\left(\frac{100\sqrt{3}}{100}\right) - 1 = 0.9169.$$

۷-۳۱) تابع متغیر تصادفی x_i مستقل است با (مسئله ۵-۳۷ را ببینید)

$$f_i(x) = \frac{c_i}{\pi(c_i^2 + x^2)} \qquad \Phi_i(\omega) = e^{-c_i|\omega|}$$

در حقیقت چگالی $x = x_1 + \cdots + x_n$ کوشی با پارامتر $c = c_1 + \cdots + c_n$ است، چون

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha}\ f(x)dx = \frac{c_i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{c_i^2 + x^2}\ dx = \infty \qquad \alpha > 2$$

۷-۳۲) در این مسئله $\delta_k^2 = E\left\{|z|^2\right\} = E\left\{x^2 + y^2\right\} = 2\delta^2$

$$f_z(x) = f_x(x)f_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} = \frac{1}{2\pi\sigma_z^2}e^{-|z|^2/\sigma_z^2}$$

$$\Phi_z(\Omega) = \Phi_x(u)\Phi_y(v) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(u^2+v^2)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{4}\sigma_z^2|\Omega|^2\right\}$$

۸-۱) الف) از (۸-۱۱) با $\delta = 0.1$, $\gamma = .95, u = .975, z_{.975} \approx 2$ و $n = 9$ نتیجه می‌گیریم که:

$$c = \frac{z_u \sigma}{\sqrt{n}} = 0.066$$

ب) از (۸-۱۱) با $c = 91.01 - 91 = 0.05mm$:

$$z_u = \frac{c\sqrt{n}}{\sigma} = 1.5 \qquad u = .933 \qquad \gamma = .866$$

۸-۲) الف) از (۸-۱۱) با $\delta = 1$ و $n = 4$:

$$\bar{x} \pm \sigma z_u / \sqrt{n} \simeq 203 \pm 1\text{mm}$$

ب) از (۸-۱۲) با $\delta = .05$:

$$c = \sigma / \sqrt{n\delta} = 2.236\text{mm}$$

۸-۳) از (۸-۴) با $\gamma = .9, u = .95$:

$$\bar{x} \pm z_u \sigma / \sqrt{n} = 25{,}000 \pm 1{,}028 \text{ miles}$$

۸-۴) می‌خواهیم n را طوری پیدا کنیم $P\{|\bar{x} - a| < 0.2\} = 0.95$ در جایی که $a = E\{\bar{x}\}$ است. از (۸-۴) این نتیجه می‌شود که $u = .975$ و $\delta = 0.1mm$ که:

$$\frac{z_u \sigma}{\sqrt{n}} \le 0.2, \text{ hence, } n=1$$

۸-۵) در این مسئله x با $E\{x\} = \theta$ و $\delta^2 = 4/3$ یکنواخت است. می توانیم از این مطلب استفاده کنیم به هر حال، تقریب نرمال برای $\bar{x}$ است چون $n = 100$ می‌باشد. با $\gamma = .95$ و (۸-۱۱) فاصله زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} \pm z_{.975}\, \sigma\sqrt{n} = 30 \pm 0.227$$

۸-۶) باید نشان دهیم که اگر $f(x)$ یک چگالی با یک حداکثر تنها باشد $P\{a < x < b\} = \eta$ آن‌گاه $b - a$ حداقل است اگر $f(a) = f(b)$ باشد. چگالی $xe^{-x}U(x)$ یک حالت خاص است. کافی است که نشان دهیم $f(a) < f(b)$ یا $f(a) > f(b)$.

فرض اول در شکل (الف) این است که $f(a) < f(b)$. واضح است که $f(a) > 0$ و $f'(b) < 0$، بنابراین می‌توانیم دو ثابت $\delta_1 > o$ و $\delta_2 > o$ را پیدا کنیم طوری که

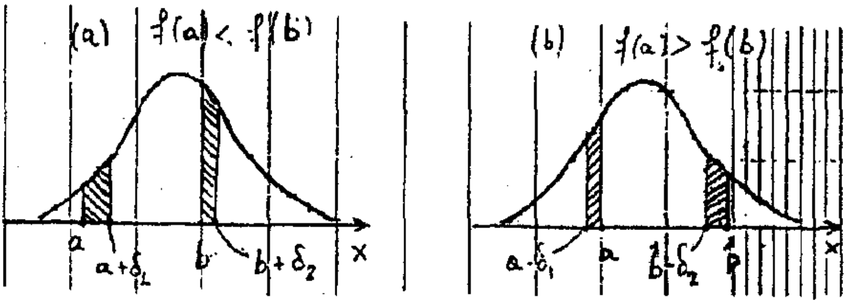
$$P\{a+\delta_1 < x < b+\delta_2\} = \gamma$$

و

$$f(a) < f(a+\delta_1) < f(b+\delta_2) < f(b)$$

از این نتیجه می‌شود که $\delta_1 > \delta_2$. بنابراین، طول فاصله جدید $(a+\delta_1, b+\delta_2)$ کوچک‌تر از $b-a$ است.

اگر $f(a) > f(b)$ باشد، فاصله $(a-\delta_1, b-\delta_2)$ را تشکیل می‌دهیم (شکل ۸-۶ ب) و به طور مشابه پیش می‌رویم.



مورد خاص: اگر $f(x) = xe^{-x}$ باشد، آن‌گاه (مسئله ۴-۹ را ببینید) $F(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$ پس

$$P(a < x < b) = e^{-a} + ae^{-a} - e^{-b} - be^{-b} = .95$$

و از آن جایی که $f(a) = f(b)$ می‌باشد، نتیجه می‌شود:

$$ae^{-a} = be^{-b} \qquad e^{-a} - e^{-b} = .95$$

با حل این رابطه نتیجه می‌شود که:

$$a \simeq 0.04 \qquad b \simeq 5.75.$$

راه حل ساده‌تر عددی نتیجه می‌دهد که اگرقرار دهیم:

$$0.025 = P\{x \le a\} = F(a) \qquad 0.025 = P\{x > b\} = 1 - F(b)$$

مانند (۹-۵). این نتیجه می دهد که سیستم

$$0.025 = 1 - e^{-a} - ae^{-a} \qquad 0.025 = e^{-b} + be^{-b}$$

با حل آن نتیجه می‌گیریم که $a = 0.242, b = 5.572$. به هرحال طول $5.572 - 0.242 = 5.33$ از نتیجه فاصله بزرگ‌تر است از طول $4.75 - 0.04 = 4.71$ که طول بهینه است.

۸-۷) با یک مسئله عمومی شروع می‌کنیم. n نمونه x_i از یک تابع متغیر تصادفی $N(\eta, 10)$ را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم مقدار x از x را در تجربه آینده متوسط x مشاهدات پیش‌گویی می

کنیم. اگر η معلوم شده باشد، یک مسئله پیش بینی معمولی داریم. اگر مجهول باشد، ابتدا باید آن را تخمین بزنیم. برای این کار متغیر تصادفی $w = x - \bar{x}$ را تشکیل می‌دهیم. این تابع احتمال $N(\eta, \delta_w)$ در جایی است که

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2 + \sigma^2/n.$$

با $c = z_{.975}\delta_w$ نتیجه می‌شود که:

$$P(|w| < c) = .95.$$

بنابراین:

$$P(\bar{x} - c < x < \bar{x} + c) = 0.95$$

برای $n = 20$ و $\delta = 10$ در رابطه بالا $\delta_w = 10.25$ و $c \cong 20.5$ نتیجه می‌شود. بنابراین می‌توانیم انتظار داشته باشیم که با ضریب اطمینان .95 که برآمدگی حداقل $80 - 20.5 = 59.5$ و حداکثر $80 + 20.5 = 100.5$ ساعت خواهد بود.

۸-۸) زمان رسیدن چهلمین بیمار عبارتست از مجموع $x_1 + \cdots + x_n$ از $n = 39$ تابع متغیرتصادفی با توزیع اطمینان است. تخمین خواهیم زد که میانگین $\eta = 1/\theta$ از x در جملات نمونه های میانگین $x = 240/39 = 6.15$ دقیقه با استفاده از دومتد است. تقریب اول این است که (nبزرگ)است و این برپایه (۸-۱۱) می‌باشد.

تقریب نرمال: با $\lambda = \eta$ و $z_{0.975}/\sqrt{39} = 0.315$:

$$P\left\{\frac{\bar{x}}{1.315} < \eta < \frac{\bar{x}}{0.685}\right\} = .95 \qquad 4.68 < \eta < 8.98 \text{ minutes}$$

جواب دقیق: متغیرهای تصادفی x_i با چگالی مساوی و مستقل دارای توزیع نمایی است. از این و از (۷-۵۲) نتیجه می‌شود که مجموع

$$y = x_1 + \cdots + x_n = n\bar{x}$$

دارای توزیع ارلنگ است.

$$\Phi_y(s) = \frac{\theta^n}{(\theta - s)^n} \qquad f_y(y) = \frac{\theta^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\theta y} U(y)$$

و متغیر تصادفی $z = 2n\theta\,\bar{y} = 2n\theta\,\bar{x}$ دارای توزیع $x^2(2n)$ می باشد:

$$f_z(z) = \frac{1}{2\theta} f_y\left(\frac{z}{2\theta}\right) U(z) = \frac{z^{n-1}}{2^n (n-1)!} e^{-z/2} U(z)$$

بنابراین:

$$P\left\{ \chi^2_{\delta/2}(2n) < \frac{2n\bar{x}}{\eta} < \chi^2_{1-\delta/2}(2n) \right\} = \gamma = 1-\delta$$

وقتی

$$\chi^2_{.025}(78) = 54.6, \ \chi^2_{.975}(78) = 104.4,$$

و $2n\bar{x} = 480$ باشد این فاصله زیر را نتیجه می‌دهد:

$$4.60 < \eta < 8.79 \text{ minutes}$$

۸-۹) از (۸-۱۹) با $\bar{x} = 2,550/200 = 12.75$ و $n = 200$ و $z_u \cong 2$ نتیجه می‌شود که:

$$\lambda^2 - 25.52\lambda + 12.75^2 = 0 \qquad \lambda_1 = 12.255 < \lambda < 13.265 = \lambda_2$$

۸-۱۰) از (۸-۲۱) با $\bar{x} = 2,080/4000 = 0.52$ و $n = 4,000$ و $z_u \cong 2.326$ داریم:

$$p_{1,2} \approx \bar{x} \pm z_u \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = .52 \pm .018$$

بنابراین: $.502 < p < .538$.

۸-۱۱) الف) در این مسئله $\bar{x} = 0.40$ و $n = 900$ و $z_u \cong 2$ است. از (۸-۲۱): حاشیه خطا

$$\pm 100 \ z_u \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = \pm 3.27\%$$

ب) باید z_u را پیدا کنیم. از (۹-۲۱)و جدول ۱ الف:

$$100 z_u \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = 2 \qquad z_u = 1.225 \qquad u = .89$$

این ضریب اطمینان $\gamma = 2u - 1 = .78$ را نتیجه می‌دهد.

۸-۱۲) از (۸-۲۱) با $\bar{x} = 0.29$ و $z_u = 2$:

$$z_u \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = 0.04 \qquad\qquad n > \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{.04^2} z^2_u = 515$$

۸-۱۳) مسئله این است که n را پیدا کنیم طوری که [(۸-۲۰) را ببینید] $z_u = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le .02$

برای همه p ها باشد. وقتی $z_u \cong 2$ و $p(1-p) \le 1/4$ این موردی است که اگر:

$$z_u \sqrt{1/4n} \le .02 \qquad n \ge 2,500$$

۸-۱۴) از (۸-۳۶) با $k = 1$:

$$f(p) = \begin{cases} 5 & .4 < p < .6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad P(k=1) = 5\int_{.4}^{.6} p\,dp = .5 = \frac{1}{\eta}$$

$$f_p(p|1) = \begin{cases} 10p & .4 < p < .6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \hat{p} = 10\int_{.4}^{.6} p^2 dp = .5067$$

۸-۱۵) از مسئله۸-۸:

$$f_{\bar{x}}(\bar{x}|\theta) = \frac{(\theta n)^n}{(n-1)!}\bar{x}^{n-1}e^{-n\theta\bar{x}}$$

از (۸-۳۲):

$$f_\theta(\theta\,|\bar{x}) = \frac{(c+n\bar{x})^{n+1}}{n!}\theta^n e^{-(c+n\bar{x})\theta}$$

از (۸-۳۱):

$$\hat{\theta} = \frac{(c+n\bar{x})^{n+1}}{n!}\int_0^\infty \theta^{n+1}e^{-(c+n\bar{x})\theta}d\theta = \frac{n+1}{c+n\bar{x}}$$

۸-۱۶) مجموع $n\bar{x}$ یک متغیر تصادفی پواسون با متوسط $n\theta$ (مسئله ۸-۸ را ببینید) است. در زمینه تخمین باینری، این تخمین را می دهد که:

$$f_{\bar{x}}(\bar{x}|\theta) = e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^k}{k!} \quad k = n\bar{x} = 0,1,\ldots$$

با جایگذاری در (۸-۳۲)، نتیجه می گیریم که [(۴-۷۶) را ببینید]:

$$f_\theta(\theta|(\bar{x}) = \frac{(n+c)^{n\bar{x}+b+1}}{\Gamma(n\bar{x}+b+a)}\theta^{n\bar{x}+b}e^{-(n+c)\theta}$$

و از (۸-۳۱) خواهیم داشت:

$$\hat{\theta} = \frac{(n+c)^{n\bar{x}+b+1}}{\Gamma(n\bar{x}+b+1)}\frac{\Gamma(n\bar{x}+b+2)}{(n+c)^{n\bar{x}+b+2}} = \frac{n\bar{x}+b+1}{n+c} \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}$$

۸-۱۷) از (۸-۱۷) با $t_{0.95}(9) = 2.26$ داریم:

$$\bar{x} \pm \frac{t_u s}{\sqrt{n}} = 90 \pm 3.57 \quad 86.43 < \eta \cdot 93.57$$

از (۸-۲۴) با $X^2_{.975}(9) = 19.02, X^2_{.025}(9) = 2.70$ داریم:

$$\frac{9 \times 5^2}{19.02} = 11.83 < \sigma^2 < \frac{9 \times 5^2}{2.70} = 83.33 \qquad 3.44 < \sigma < 9.13$$

۸-۱۸) تابع متغیر تصادفی x_i/δ عبارتست از $N(0,1)$ بنابراین مجموع $z = \left(x_1^2 + \cdots + x_{10}^2\right)/\delta^2$ دارای توزیع $X^2(10)$ می‌باشد. از این نتیجه می‌گیریم که:

$$P(\chi^2_{.025}(10) < z < \chi^2_{.975}(10)) = .95$$

$$\chi^2_{.025}(10) = 3.25 < \frac{4}{\sigma^2} < \chi^2_{.975}(10) = 20.48$$

$$0.442 < \sigma < 1.109$$

۸-۱۹) از (۸-۲۳) با $n = 4, X^2_{.025}(4) = 0.48, X^2_{.975}(4) = 11.14$ خواهیم داشت:

$$n\hat{v} = .1^2 + .15^2 + .05^2 + .04^2 = .0366$$

$$\frac{.0366}{.048} > \sigma^2 > \frac{.0366}{11.14} \qquad 0.276 > \sigma > 0.057$$

۸-۲۰) در این مسئله $n = 3, x_1 + x_2 + x_3 = 9.8$ می‌باشد پس:

$$f(x,c) \sim c^4 x^3 e^{-cx} \qquad f(X,c) = c^{4n}(x_1 \ldots x_n)^{3n} e^{-cn\bar{x}}$$

$$\frac{\partial f(X,c)}{\partial c} = \left(\frac{4n}{c} - n\bar{x}\right) f(X,\theta) = 0 \qquad \hat{c} = \frac{4}{\bar{x}} = 1.224$$

۸-۲۱) چگالی مشترک

$$f(X,c) = c^n e^{-cn(\bar{x}-x_0)} \qquad x_i > x_0$$

حداکثر فاصله داخلی را داراست اگر:

$$\frac{\partial f(X,c)}{\partial c} = 0 \qquad \hat{c} = \frac{1}{\bar{x}-x_0}$$

۸-۲۲) احتمال

$$p = 1 - F_x(200) = e^{-200c}$$

از یک پیشامد $\{x > 200\}$ تابع یکنوا کاهشی c است. برای پیدا کردن تخمین حداکثر احتمال $\hat{c}$ از c کافیست تخمین حداکثر احتمال $\hat{p}$ از p را بیابیم. از مثال ۸-۲۸ نتیجه می‌شود که $k = 62$ و $n = 80$ پس:

$$\hat{p} = \frac{62}{80} = .775$$

پس:

$$\hat{c} = -\frac{1}{200}\ln \hat{p} = 0.0013$$

۸-۲۳) نمونه‌های x عبارت از x_i های صحیح می‌باشند و چگالی مشترک تابع متغیرهای احتمال x_i برابر است با:

$$f(X,\theta) = e^{-n\theta} \prod \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\theta} \frac{\theta^{n\bar{x}}}{\prod x_i!}$$

بنابراین، $f(X,\theta)$ حداکثر است اگر $-n + n\bar{X}/\theta = 0$ باشد. این نتیجه می‌دهد که $\hat{\theta} = \bar{x}$ است.

۸-۲۴) اگر $L = \ln f(x,\theta)$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

اما:

$$E\left\{\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right\} = \int_R \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} f dX = 0 \quad \text{hence} \quad E\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2\right\} = 0$$

۸-۲۵) الف) از (۸-۳۰۷): ناحیه بحرانی

$$\bar{x} > c = \eta_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8+2.326 \times \frac{2}{8} = 8.58$$

اگر $\eta = 8.7$ باشد، آن گاه $\eta_q = \dfrac{8.7-8}{218} = 2.8$ پس

$$\beta(\eta) = G(2.36 - 2.8) = .32$$

ب) فرض می‌کنیم $\alpha = .01, \beta(8.7) = .05$ باشد، می‌خواهیم n و c را پیدا کنیم.

$$G(z_{1-\alpha}-\eta_q) = \beta \qquad z_{1-\alpha}-\eta_q = z_\beta$$

$$\eta_q = z_{.99} - z_{.05} = 4.97 = \frac{8.7-8}{2/\sqrt{n}}$$

$$n = 129 \quad c = 8 + \frac{2}{\sqrt{129}} z_{.99} = 8.41$$

۸–۲۶) هدف امتحان کردن حدس پوچ مرکب $\eta > \eta_0 = 28$ در برابر حدس $\eta < \eta_0$ است. ابتدا حدس پوچ ساده $\eta = \eta_0 = 28$ را درنظر بگیرید. در این مورد از (۸–۳۰۱) با مفروضات زیر استفاده می‌کنیم:

$$q = \frac{\bar{x}-\eta_0}{s/\sqrt{n}} \qquad \bar{x} = \frac{1}{17}\sum x_i = 27.67 \qquad s^2 = \frac{1}{16}\sum(x_i-\bar{x}) = 17.6$$

نتیجه می‌شود که $s = 4.2$ و $q = -0.33$ است. بنابراین

$$q_u = t_u\ (n-1) = t_{0.05}(16) = -1.95 < -0.33$$

نتیجه می‌گیریم که شواهد باعث رد حدس $\eta = 28$ نمی‌شود. نتایج تابع مشخصه عملیاتی $\beta_0(\eta)$ از (۹–۶۰ج) قابل تعیین است. اگر $\eta_0 > 28$ باشد، آن‌گاه مقادیر متناظر از q بزرگ‌تر از -0.33 می‌باشد. از این نتیجه می‌شود، که شواهد حدس η_0 برای هر $\eta_0 > 28$ را پشتیبانی نمی‌کند. توجه می‌کنیم که به هرحال تابع مشخصه عملیاتی متناظر تابع $\beta(\eta)$ کوچک‌تر است از تابع $\beta_0(\eta)$ به دست آمده از (۸–۳۰۱) با $\eta_0 = 28$.

۸–۲۷) از (۸–۲۹۷) با فرض $q_u = t_u(n-1)$ و ناحیه بحرانی

$$|\bar{x}-\eta_0| > t_{1-\alpha/2}(n-1)\,s/\sqrt{n}$$

نتیجه می‌شود که:

1. $\underline{\alpha = .1}$ $\qquad t_{.95}(63) = 1.67 \qquad |\bar{x}-8| > 1.67 \times 1.5/8 = 0.313$

وقتی $\bar{X} = 7.7$ در فاصله 8 ± 0.317 باشد H_0 را می‌پذیریم.

2. $\underline{\alpha = .01}$ $\qquad t_{.995}(63) = 2.62 \qquad |\bar{x}-8| > 2.62 \times 1.5/8 = 0.49$

وقتی $\bar{X} = 7.7$ خارج ناصله 8 ± 0.49 باشد H_0 را رد می کنیم.

۸–۲۸) فرض می‌کنیم که تابع متغیر تصادفی x و y نرمال ومستقل هستند. اختلاف نمونه‌ها با میانگین آن‌ها به صورت $w = x - y$ تشکیل می شود:

$$\bar{\underset{\sim}{x}} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} \underset{\sim}{x}_i \qquad \bar{\underset{\sim}{y}} = \frac{1}{26}\sum_{i=1}^{26} \underset{\sim}{y}_i$$

و برای امتحان آن از نسبت آماری آن‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\underset{\sim}{q} = \frac{\underset{\sim}{w}}{\sigma_w} \qquad \sigma_w^2 = \frac{\sigma_x^2}{16} + \frac{\sigma_y^2}{26}$$

متغیر تصادفی q نرمال با $\delta_q = 1$ و تحت حدس H_0 و $E(q) = 0$ است. می‌توانیم از (۸-۳۰۷) استفاده کنیم چون $q_u = z_u$ است. برای یافتن q باید δ_w را مشخص کنیم. وقتی δ_x و δ_y مشخص نشده‌اند، باید از تقریب $\delta_x \cong s_x = 1.1$ و $\delta_y \cong s_y = 0.9$ استفاده کنیم. این نتیجه می‌دهد که:

$$\sigma_w^2 \simeq \frac{1.1^2}{16} + \frac{0.9^2}{26} = 0.107 \qquad q = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma_w} = \frac{0.4}{0.327} = 1.223$$

وقتی $z_{0.95} = 1.645 > 1.223$ باشد H_0 را می‌پذیریم.

۸-۲۹) الف) در این مسئله $n = 64, k = 22, p_0 = q_0 = 0.5$ می‌باشد پس:

$$q = \frac{k-np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = 2.5 \qquad z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2} \simeq -2$$

از آن‌جایی که 2.5 خارج فاصله $(2,-2.5)$ است می توانیم حدس سکه را عادلانه تخمین بزنیم [(۸-۳۱۳) را ببینید].

ب) از (۸-۳۱۳) با فرض $n = 16 , p_0 = q_0 = 0.5$:

$$\frac{k_1-np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = z_{\alpha/2} \qquad \frac{k_2-np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = -z_{\alpha/2}$$

این نتیجه می‌دهد که $k_1 = 8-2\times 2 = 4, k_2 = 8+2\times 2 = 12$.

۸-۳۰) باید از آزمون آماری استفاده کنیم در جمع:

$$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{x}_1 + \cdots + \underset{\sim}{x}_m \qquad n = 22$$

ناحیه بحرانی از آزمون $q < q_\alpha$ با $q = x_1 + \cdots + x_n = 90$ [(۸-۳۰۱) را ببینید] است. متغیر تصادفی q توزیع پواسون با پارامتر $n\lambda$ است. تحت حدس H_0 و $\lambda = \lambda_0 = 5$ بنابراین $\eta_q = n\lambda_0 = 110 = \delta_q^2$ است. برای به دست آوردن q_α باید از تقریب نرمال استفاده کنیم. با فرض $\alpha = 0.05$ نتیجه می‌گیریم که:

$$q_\alpha = n\lambda_0 + z_\alpha\sqrt{n\lambda_0} = 90-17.25 = 72.75$$

وقتی $90 > 72.75$ باشد، حدس $\lambda = 5$ را می‌پذیریم.

۸-۳۲) از (۹-۷۵) با فرض $n = 102$ و $p_{0i} = 1/6$ داریم:

$$q = \sum_{i=1}^{6} \frac{(k_i-17)^2}{17} = 2 \qquad \chi^2_{.95}(5) \simeq 11$$

از آن‌جایی که $11 > 2$ می باشد ، حدس پرتاب عادلانه تاس را می‌پذیریم.

۸-۳۲) توزیع صحیح و یکنواخت از ۰ تا ۹ به این معنی است آن ها دارای احتمال وقوع یکسان هستند. با فرض $m = 10$ و $p_{01} = .1$ و $n = 1,000,$ با توجه به (۸-۳۲۵) نتیجه می‌شود که:

$$q = \sum_{j=0}^{9} \frac{(n_j-100)^2}{100} = 17.76 \qquad \chi^2_{.95}(9) = 16.92$$

از آن جایی که $17.76 > 16.92$ می‌باشد، ما حدس یکنواخت را رد می کنیم.

۸-۳۳) در این مسئله:

$$f(x,\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!} \qquad f(X,\theta) = \frac{e^{-n\theta}\,\theta^{n\bar{x}}}{x_1!\cdots x_n!}$$

$f(X,\theta)$ برای $\theta = \theta_m = \overline{X}$ حداکثر است. و از آن‌جایی که $\theta_{m0} = \theta_0$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که:

$$\lambda(X) = \frac{e^{-n\theta_0}\theta_0^{n\bar{x}}}{e^{-n\bar{x}}\bar{x}^{n\bar{x}}} \qquad w = -2\,ln\,\lambda = 2n(\theta_0-\bar{x}) + \bar{x}\,ln(\bar{x}/\theta_0)$$

با فرض $n = 50, \theta_0 = 20$ و $\overline{X} = 1,058/50 = 21.16$ نتیجه می‌شود که $w = 3$ می‌باشد. از آن‌جایی که $m_0 = 1, m = 1$ و $X^2_{.95}(1) = 3.84 > 3$ می باشند H_0 را می‌پذیریم.

۸-۳۴) تابع متغیرهای تصادفی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\underset{\sim}{z} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\eta_x}{\sigma_x}\right)^2 \qquad \underset{\sim}{w} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\eta_y}{\sigma_y}\right)^2$$

این تابع متغیرهای تصادفی به ترتیب $X^2(m)$ و $X^2(n)$ هستند. اگر $\delta_x = \delta_y$ باشد، آن‌گاه:

$$\underset{\sim}{q} = \frac{z/m}{\underset{\sim}{w}/n}$$

بنابراین (مسئله ۶-۲۳ را ببینید)، q دارا ی توزیع اسنی‌دکور می‌باشد. برای امتحان حدس $\delta_x = \delta_y$ از (۸-۲۹۷) استفاده می‌کنیم وقتی که $q_u = F_u(m,n)$ باشد صدک های u در جدول آمده توزیع

می‌باشد.

$$\text{Accept } H_0 \text{ iff} \qquad F_{\alpha/2}(m,n) < q < F_{1-\alpha/2}(m,n).$$

۸-۳۵) اگر x دارای توزیع دانش آموزی - t است پس، $f(-x)=f(x)$ می‌باشد، بنابراین(مسئله ۶-۷۵ را ببینید):

$$E(\underset{\sim}{x}) = 0 \qquad \sigma_x^2 = E(\underset{\sim}{x}^2) = \frac{n}{n-2}$$

۸-۳۶) الف) فرض کنید که احتمال $P(A)$ که بازیکن A در یک ست برنده شود برابر $p=1-q$ است. او مسابقه را در پنج ست اول می‌برد اگر او دو بازی از چهار ست اول و ست پنجم برنده شود. بنابراین، احتمال $p_5(A)$ که او در ست پنجم برنده شود برابر با $6p^3q^2$ است. به طور مشابه، احتمال $p_5(B)$ که بازیکن B در ست پنج برنده شود برابر $6p^2q3$ است. پس:

$$p_5 = p_5(A) + p_5(B) = 6p^3q^2 + 6p^2q^3 = 6p^2q^2$$

احتمال آنست که مسابقه در پنج ست آخر باشد. اگر $p=q=1/2$ باشد، آن گاه $p_5=3/8$ است.

ب) فرض کنید که الان $P(A)=p$ یک متغیر تصادفی با چگالی $f(p)$ است. در این مورد:

$$\underset{\sim}{p}_5 = 6\underset{\sim}{p}^2(1-\underset{\sim}{p}^2)$$

یک متغیر تصادفی است. امیدواریم که بتوانیم بهترین تخمین باینری را پیدا کنیم. استفاده از معیار میانگین مربع خواهیم داشت:

$$\hat{p}_5 = E(\underset{\sim}{p}_5) = \int_0^1 6p^2(1-p^2)f(p)dp$$

اگر $f(p)=1$ باشد، آن‌گاه $\hat{p}_5=1/5$ خواهد بود.

۸-۳۷) توابع زیر داده شده‌اند:

$$f_v(v) \sim e^{-v^2/2\sigma^2} \qquad f_\theta(\theta) \sim e^{-(\theta-\theta_0)^2/2\sigma_0^2}$$

برای نشان دادن:

$$f_\theta(\theta|X) \sim e^{-(\theta-\theta_1)^2/2\sigma_1^2}$$

در جایی که:

$$\frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} \qquad \theta_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\theta_0 + \frac{n\sigma_1^2}{\sigma^2}\bar{x}$$

اثبات

$$f_x(x|\theta) = f_v(x-\theta) \sim \exp\left\{ -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$f(X)|\theta \sim \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i-\theta)^2 \right\}$$

وقتی

$$\sum (x_i-\theta)^2 = \sum (x_i-\bar{x})^2 + n\ (\bar{x}-\theta)^2,$$

از (۸-۳۲) با حذف عواملی که به θ وابسته‌اند نتیجه می‌گیریم که:

$$f(\theta|X) \sim \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\frac{(\theta-\theta_o)^2}{\sigma_o^2} + \frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{\sigma^2} \right]\right\}$$

کروشه بالا برابر است با:

$$\left(\frac{1}{\sigma_o^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)\theta^2 - 2\left(\frac{\theta_o}{\sigma_o^2}+\frac{n\bar{x}}{\sigma^2}\right)\theta + \cdots = \frac{1}{\sigma_1^2}(\theta^2-2\theta\theta_1) + \cdots$$

و (i) نتیجه می‌شود.

۸-۳۸) تابع حداکثر احتمال از X برابر است با:

$$f(X,\theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\theta})^n}\exp\left\{ -\frac{1}{2\theta}\sum (x_i-\eta)^2 \right\}$$

که در آن $\theta = \delta^2$ پارامتر مجهول است. بنابراین

$$L(X,\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\theta) - \frac{1}{2\theta}\sum (x_i-\eta)^2$$

$$\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum (x_i-\theta)^2 = 0 \qquad \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum (x_i-\eta)^2$$

۸-۳۹) تخمین‌گرهای $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ دارای واریانس های یکسان هستند، در غیراین‌صورت یکی از آن‌ها بهترین است. بنابراین

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta \qquad \operatorname{var}\hat{\theta}_1 = \operatorname{var}\hat{\theta}_2 = \sigma^2$$

اگر

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}} = \frac{1}{2}(\hat{\underset{\sim}{\theta}}_1 + \hat{\underset{\sim}{\theta}}_2),$$

آن‌گاه

$$E(\hat{\underset{\sim}{\theta}}) = \theta \qquad \sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{1}{2}(\sigma^2 + \sigma^2 + 2r\sigma^2) = \frac{1}{2}(1+r)\sigma^2$$

در جایی که δ همبستگی ضریب $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ است. اگر $r < 1$ باشد، آن‌گاه $\delta_\theta < \delta$ است و این غیرممکن است. بنابراین $r = 1$ و $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ است (مسئله ۶-۵۳ را ببینید).

۸-۴۰)

$$k_1+k_2-np_1-np_2 = n-n(p_1+p_2) = 0;$$

بنابراین

$$|k_1-np_1| = |k_2-np_2|$$

$$\frac{(k_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(k_2-np_2)^2}{np_2} = (k_1-np_1)^2\left(\frac{1}{np_1} + \frac{1}{np_2}\right) = \frac{(k_1-np_1)^2}{np_1p_2}$$

۸-۴۱) رابطه زیر داده شده است:

$$E\{T(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} T(X)\, f(X;\theta)\, dx = \psi(\theta),$$

بنابراین بعد از تفریق کردن و استفاده از (۸-۸۱) خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(X)\,\frac{\partial f(X;\theta)}{\partial \theta}\, dx = \psi'(\theta)$$

همچنین با استفاده از (۸-۸۰)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\theta)\,\frac{\partial f(X;\theta)}{\partial \theta}\, dx = 0,$$

و ازدو رابطه بالا نتیجه می‌دهد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} [T(X) - \psi(\theta)]\,\frac{\partial f(X;\theta)}{\partial \theta}\, dx = \psi'(\theta)$$

اما

$$\frac{\partial f(X;\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{f(X;\theta)}\frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial\theta}$$

بنابراین (۸-۴۳-۳) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\{T(X)-\psi(\theta)\}\sqrt{f(X;\theta)}\right]\left[\sqrt{f(X;\theta)}\ \frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial\theta}\right]dx = \psi'(\theta)$$

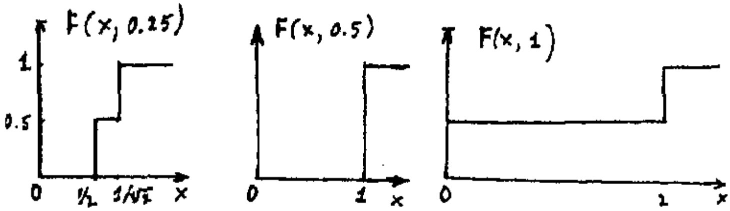
با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز مانند متن (۸-۸۹)-(۸-۹۲) نتیجه می‌شود که

$$E\left[\{T(X)-\psi(\theta)\}^2\right] \geq \frac{[\psi'(\theta)]^2}{E\left\{\left(\frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right\}}$$

(۱-۹

$$(a)\quad E\{\underset{\sim}{x}(t)\} = t + 0.5\sin\pi t$$

$$\underset{\sim}{x}(t,\ \text{heads}) = \sin\pi t = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & t = 0.25 \\ 1 & t = 0.5 \\ 0 & t = 1 \end{cases} \qquad \underset{\sim}{x}(t,\ \text{tails}) = 2t = \begin{cases} 0.5 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$



(۲-۹

$$\underset{\sim}{x}(t) = e^{\underset{\sim}{a}t}$$

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} f_a(a)\,da \qquad R(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at_1} e^{at_2} f_a(a)\,da$$

از (۵-۱۶).با فرض

$$x = g(a) = e^{ta} \qquad g'(a) = t\,e^{ta} = tx$$

نتیجه می‌شود:

$$f(x,t) = \frac{1}{x|t|} f_a\left(\frac{1}{t}\ln x\right)U(x)$$

۹-۳) همان‌گونه که می دانیم، $E\{x(t)\} = \lambda t$ و $\operatorname{var} x(t) = \lambda^2 t^2$ [(۹-۱۸) را ببینید]. اما با حدس $E\{x(9)\} = 6$ می‌باشد بنابراین $\lambda = 2/3$.

الف)

$$E(\underset{\sim}{x}(8)) = 24 \qquad \operatorname{var} \underset{\sim}{x}^2(t) = 24^2$$

ب) متغیر تصادفی $x(2)$ یک توزیع پراسون با پارامتر $2\lambda = 6$ می باشد. بنابراین

$$P\{\underset{\sim}{x}(2) \le 3\} = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{3} \frac{(2\lambda)^k}{k!}$$

ج) متغیر تصادفی $z = x(2)$ و $w = x(4) - x(2)$ مستقل و توزیع پواسون با پارامتر 2λ هستند. بنابراین:

$$P\{\underset{\sim}{z}=k\} = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^k}{k!} \qquad P\{\underset{\sim}{z} = k,\ \underset{\sim}{w} = m\} = e^{-4\lambda} \frac{(2\lambda)^k}{k!} \frac{(2\lambda)^m}{m!}$$

$$P\{\underset{\sim}{x}(4) \le 5 \mid \underset{\sim}{x}(2) \le 3\} = \frac{P\{z\le 3,\ w \le 5-z\}}{P\{\underset{\sim}{z}\le 3\}} \qquad P\{\underset{\sim}{z} \le 3\} = \sum_{k=0}^{3} p\{\underset{\sim}{z}=k\}$$

$$P\{\underset{\sim}{z} \le 3,\ \underset{\sim}{w} \le 5 - \underset{\sim}{z}\} = \sum_{k=0}^{3} \sum_{m=0}^{5-k} P\{\underset{\sim}{z} = k,\ \underset{\sim}{w} = m\}$$

۹-۴)

$$\underset{\sim}{x}(t) = U(t - \underset{\sim}{c}) \qquad \underset{\sim}{y}(t) = \delta(t - \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{x}'(t)$$

برای t_1 یا $t_2 < 0$ داریم $R(t_1, t_2) = 0$ و برای $t_2 > T$ داریم $R(t_1, t_2) = 1$. همچنین:

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{1}{T}\min(t_1, t_2) \quad \frac{\partial R_x}{\partial t_1} = \frac{1}{T} U(t_1 - t_2) \quad -\frac{\partial^2 R_x}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{1}{T}\delta(t_1 - t_2)$$

از این رابطه و از (۹-۵-۱۰۵) نتیجه می شود که:

$$T R_y(t_1 - t_2) = \delta(t_1 - t_2)$$

برای $0 < t_1$ و $t_2 < T$ و جاهای دیگر صفر است.

۹-۵) $a - bt = 0$ است، اگر و فقط اگر $t = t_1 = a/b$ باشد. با جای گذاری $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ و $r = 0$ در (۶-۶۳) نتیجه می‌گیریم:

$$P\{0 < \underset{\sim}{t}_1 < T\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan T - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 0\right)$$

۹-۶) معادله

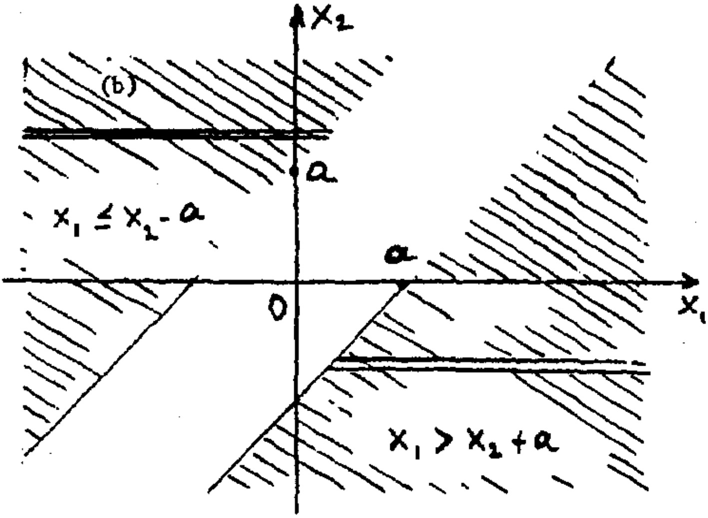
$$\underset{\sim}{w}''(t) = \underset{\sim}{v}(t)U(t) \qquad \underset{\sim}{w}(0) = \underset{\sim}{w}'(0) = 0$$

سیستمی با ورودی $\nu(t)U(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)=tU(t)$ را مشخص می‌کند. بنابراین [(۹-۱۰۰) را ببینید].

$$E\{\underline{w}^2(t)\} = q(t)U(t) * t^2U(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 q(\tau)d\tau$$

۹-۷) الف) از (۵-۸۸) با فرض $x(t+\tau)-x(t)$ و (۸-۱۰۱) نتیجه می شود:

$$P\{|\underline{x}(t+\tau) - \underline{x}(t)| \geq a\} \leq \frac{E\{[\underline{x}(t+\tau) - \underline{x}(t)]^2\}}{a^2}$$
$$= 2[R(0) - R(\tau)]/a^2$$



احتمال بالا برابر است با مناطق (سایه خورده) $x_2 - x_1 > a$ و $x_2 - x_1 < -a$ بنابراین:

$$P\{|\underline{x}(t+\tau) - \underline{x}(t)| \geq a\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_2-a} f(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_2+a}^{\infty} f(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2$$

۹-۸) متغیر تصادفی $x(t)$ نرمال با میانگین صفر و واریانس $E\{x^2(t)\} = R(0) = 4$ است. بنابراین

$N(0,2)$ و

$$P\{\underset{\sim}{x}(t)\le 3\} = F(3) = G(1.5) \approx 0.933$$

ب)

$$E\{[\underset{\sim}{x}(t+1) - \underset{\sim}{x}(t-1)]\} = 2[R(0)-R(2)] = 8(1-e^{-4})$$

۹-۹) اگر $x(t) = ce^{j(\omega t+\theta)}$ و $\eta_c = 0$ باشند، آن‌گاه

$$\eta_x(t) = \eta_c e^{j(\omega t+\theta)} = 0 \qquad R_{xx}(t+\tau,t) = \sigma_c{}^2 e^{j\omega\tau}$$

بنابراین $x(t)$ یک فرایند ایستا از دید وسیع است. عکس آن‌را ثابت می‌کنیم:
اگر فرایند $x(t) = c\,w(t)$ یک فرایند ایستا از دید وسیع باشد. آن گاه $\eta_c = 0$ و $w(t) = ce^{j(\omega t+\theta)}$ با یک ضریب ثابت قرار دارد.

اثبات: $\eta_x(t) = \eta_c w(t)$ مستقل از t است، بنابراین $\eta_c = 0$ است. تابع

$$R_{xx}(t_1,t_2) = \sigma_c{}^2 w(t_1)w^*(t_2)$$

فقط به $\tau = t_1 - t_2$ بستگی دارد، بنابراین $w(t+\tau)w^*(t) = g(\tau)$ است . با فرض $\tau = 0$ نتیجه می‌گیریم که:

$$|w(t)|^2 = g(0) = \text{constant} \qquad w(t) = ae^{j\phi(t)}$$

$$w(t+\tau)w^*(t) = a^2 e^{j[\phi(t+\tau)-\phi(t)]}$$

بنابراین تفاضل $\phi(t+\tau) - \phi(t)$ فقط به t وابسته است.

$$\phi(t+\tau)-\phi(t) = f(\tau)$$

از این نتیجه می‌شود که اگر $\phi(t)$ پیوسته باشد، پس $\phi(t)$ یک تابع خطی از t است. برای ساده کردن اثبات ، فرض می‌کنیم که $\phi(t)$ مشتق‌پذیراست. با مشتق‌گیری نسبت به t، به دست می‌آوریم که $\phi'(t+\tau) = \phi'(t)$ برای همه τ ها می‌باشد. با فرض $t = 0$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\phi'(\tau) = \phi'(0) = \text{constant} \qquad \phi(\tau) = a\tau+b$$

۹-۱۰) باید نشان دهیم که $x(t)$ یک فرایند نرمال ایستا با میانگین صفر و $z(t) = x^2(t)$ است، آن‌گاه، $C_{zz}(\tau) = 2C_{xx}{}^2(\tau)$ است.

از (۷-۶۱)داریم که اگر متغیرهای تصادفی x_k نرمال و $E\{x_k\} = 0$ باشد، آن‌گاه

$$E\{\underset{\sim}{x}_1\underset{\sim}{x}_2\underset{\sim}{x}_3\underset{\sim}{x}_4\} = E\{\underset{\sim}{x}_1\underset{\sim}{x}_2\} E\{\underset{\sim}{x}_3\underset{\sim}{x}_4\} + E\{\underset{\sim}{x}_1\underset{\sim}{x}_3\} E\{\underset{\sim}{x}_2\underset{\sim}{x}_4\} + E\{\underset{\sim}{x}_1\underset{\sim}{x}_4\} E\{\underset{\sim}{x}_2\underset{\sim}{x}_3\}$$

با $x_1 = x_2 = x(t+\tau)$ و $x_3 = x_3 = x(t)$ نتیجه می گیریم که استقلال از $z(t)$ برابر است با

$$E\{\underset{\sim}{x}^2(t+\tau)\underset{\sim}{x}^2(t)\} = E^2\{\underset{\sim}{x}^2(t+\tau)\} + 2E^2\{\underset{\sim}{x}(t+\tau)\underset{\sim}{x}(t)\} = R_{xx}^2(0) + 2R_{xx}^2(\tau)$$

و از آن جایی که $E\{z(t)\} = R_{xx}(0)$ و $R_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau)$ از رابطه بالا نتیجه می‌شود که:

$$C_{zz}(\tau) = R_{zz}(\tau) - E^2\{\underset{\sim}{z}(t)\} = 2C_{xx}^2(\tau)$$

(۱۱-۹

$$\underset{\sim}{y}''(t) + 4\underset{\sim}{y}'(t) + 13\underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{x}(t) \text{ all } t$$

فرایند $y(t)$ پاسخی از سیستم با ورودی $x(t) = 26 + \nu(t)$ است و:

$$H(s) = \frac{1}{s^2+45+13} \qquad h(t) = \frac{1}{3} e^{-2t}\sin 3t U(t)$$

وقتی $\eta_x = 26$ است، نتیجه می‌دهد که $\eta_y = \eta_x H(0) = 2$ است. فرایند متمرکز شده $y(t) = y(t) - \eta_y$ پاسخ ناشی از $\nu(t)$ است. بنابراین[(۹-۱۰۰) را ببینید].

$$E\{\tilde{\underset{\sim}{y}}^2(t)\} = q \int_0^\infty h^2(t)dt = \frac{10}{104}$$

با فرض $b = 4$ و $c = 13$ این نتیجه می‌شود که (۹-۲۷۶ را ببینید):

$$R_{\underset{\sim}{y}\underset{\sim}{y}}(\tau) = \frac{10}{104} e^{-2|\tau|} \left[\cos 3\tau - \frac{2}{3} \sin 3|\tau| \right] + 4$$

اگر ν نرمال باشد، آن گاه $y(t)$ نرمال با میانگین ۲ و واریانس $R_{yy}(0) - 4 = 10/104$ است. بنابراین

$$P(\underset{\sim}{y}(t) \le 3) = G\left(\frac{3-2}{0.31}\right) = G(3.24)$$

(۱۲-۹

$$E\{\underset{\sim}{y}(t)\} = 0 \qquad R_{yy}(t_1,t_2) = \frac{R_{xx}(t_1,t_2)}{f(t_1)f(t_2)} = w(t_1-t_2)$$

$$E\{\underset{\sim}{z}(t)\} = 0 \qquad R_{zz}(t_1,t_2) = \frac{R_{xx}(t_1,t_2)}{\sqrt{q(t_1)}\sqrt{q(t_2)}} = \delta(t_1-t_2)$$

چون

$$q(t_1)\delta(t_1-t_2) = \sqrt{q(t_1)}\sqrt{q(t_2)}\,\delta(t_1-t_2).$$

۹-۱۳) از (۹-۱۸۱) و اتحاد $4ab \le (a+b)^2$ نتیجه می‌شود که

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \le R_{xx}(0)R_{yy}(0) \le \frac{1}{4}\,[R_{xx}(0) + R_{yy}(0)]^2$$

۹-۱۴) واضح است که (فرض ایستا بودن):

$$E\{|\underline{x}^*(t) - \underline{y}^*(t)|^2\} = E\{|\underline{x}(0) - \underline{y}(0)|^2\} = 0$$

علاوه بر این:

$$E\{\underline{x}(t+\tau)[\underline{x}^*(t) - \underline{y}^*(t)]\} = R_{xx}(\tau) - R_{xy}(\tau)$$

و (۹-۱۷۷) را ببینید].

$$|E\{\underline{x}(t+\tau)[\underline{x}^*(t) - \underline{y}^*(t)]\}|^2 \le E\{|\underline{x}(t+\tau)|^2\}E\{|\underline{x}^*(t) - \underline{y}^*(t)|^2\} = 0$$

بنابراین $R_{xx}(\tau) - R_{xy}(\tau) = 0$ وبه طور مشابه $R_{yy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$ است.

۹-۱۵)

$$E\{|\underline{x}(t+\tau) - \underline{x}(t)|^2\} = E\{[\underline{x}(t+\tau) - \underline{x}(t)][\underline{x}^*(t+\tau) - \underline{x}^*(t)]\}$$

$$= R(0) - R(\tau) - R^*(\tau) + R(0) = 2R(0) - 2\,\underline{\mathrm{Re}}\,R(\tau)$$

۹-۱۶) از $\phi(1) = \phi(2) = 0$ این نتیجه می‌شود که:

$$E\{\cos\underline{\phi}\} = E\{\sin\underline{\phi}\} = E\{\cos 2\underline{\phi}\} = E\{\sin 2\underline{\phi}\} = 0$$

بنابراین:

$$E\{\underline{x}(t)\} = \cos\omega t\; E\{\cos\underline{\phi}\} - \sin\omega t\; E\{\sin\underline{\phi}\} = 0$$

و مانند مثال ۹-۱۴:

$$2\cos[\omega(t+\tau) + \underline{\phi}]\cos(\omega t + \underline{\phi}) = \cos\omega\tau + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\underline{\phi})$$

$$2R_x(\tau) = \cos\omega\tau$$

اگر ϕ در فاصله $(-\pi, \pi)$ یکنواخت باشد، آن‌گاه:

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sin\pi\omega}{\pi\omega} \qquad\qquad \Phi(1) = \Phi(2) = 0$$

۹-۱۷) الف)

$$\underset{\sim}{x}(t_1)\underset{\sim}{x}(t_2) = [\underset{\sim}{x}(t_1) - \underset{\sim}{x}(0)][\underset{\sim}{x}(t_2) - \underset{\sim}{x}(t_1) + \underset{\sim}{x}(t_1) - x(0)]$$

$$R(t_1,t_2) = E\{[\underset{\sim}{x}(t_1) - \underset{\sim}{x}(0)]^2\} = E\{\underset{\sim}{x}^2(t_1)\} = R(t_1,t_1)$$

ب) اگر $t_1 + \varepsilon < t_2$ آن‌گاه $R_y(t_1,t_2) = 0$ است. اگر

$$t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon$$

آن‌گاه

$$E\{[\underset{\sim}{x}(t_1+\varepsilon) - \underset{\sim}{x}(t_1)][\underset{\sim}{x}(t_2+\varepsilon) - \underset{\sim}{x}(t_2)]\} = q(t_1+\varepsilon-t_2)$$

بنابراین

$$\varepsilon^2 R_y(\tau) = q(\varepsilon - |\tau|) \text{ for } |\tau| = |t_2 - t_1| \le \varepsilon$$

۹-۱۸)

$$E\{\underset{\sim}{x}(t)\underset{\sim}{y}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{\underset{\sim}{x}(t)\underset{\sim}{x}(t-\tau)\}h(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t,t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\delta(\tau)h(\tau)d\tau = h(0)q(t)$$

۹-۱۹) مانند مسئله ۵-۱۴: $g(x) = 6 + 3F_x(x)$ است. در این مورد

$$E\{\underset{\sim}{x}^2(t)\} = 4, \text{ hence, } \underset{\sim}{x}(t) \text{ is } N(0,2) \text{ and } F_x(x) = G(x/2)$$

۹-۲۰) $x(t)$ فرایند اکیدا ایستا است، بنابراین $P\{x(t) \le y\} = F_x(y)$ به t وابسته نیست. متغیرهای تصادفی ε و $x(t)$ مستقل هستند، بنابراین[(۶-۲۲۸) را ببینید]

$$F_y(y) = P\{\underset{\sim}{x}(t-\underset{\sim}{\varepsilon}) \le y \mid \underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon\} = P\{\underset{\sim}{x}(t-\varepsilon) \le y \mid \underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon\}$$

$$= P\{\underset{\sim}{x}(t-\varepsilon) < y\} = F_x(y)$$

که از t مستقل است. برای توزیع‌های مرتبه بالاترتیز به طور مشابه است.

۹-۲۱) رابطه ثابت $E\{x(t)\} = \eta =$ را داریم. بنابراین، [(۹-۱۰۲) را ببینید] $E\{x'(t)\} = 0$ به علاوه $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$ است. بنابراین $R'_{xx}(0) = 0$ و (۱۰-۹۷) نتیجه می‌دهد:

$$E\{\underset{\sim}{x}(t)\underset{\sim}{x}'(t)\} = R_{xx'}(0) = 0$$

۹-۲۲) الف)

$$E\{\underset{\sim}{z}\,\underset{\sim}{w}\} = R_x(2) = 4e^{-4} \qquad E\{\underset{\sim}{z}^2\} = E\{\underset{\sim}{w}^2\} = R_x(0) = 4$$

$$E\{(\underset{\sim}{z}+\underset{\sim}{w})^2\} = R_x(0) + R_x(0) + 2R_x(2) = 8(1+e^{-4})$$

ب) z دارای توزیع $N(0,2)$ است، پس:

$$P\{\underset{\sim}{z} < 1\} = F_z(1) = G(1/2)$$

$$r_{zw} = e^{-4}, \quad f_{zw}(z,w) : N(0,0;2,2;e^{-4})$$

۹-۲۳) متغیر تصادفی $x'(t)$ نرمال با میانگین صفر و واریانس:

$$E\{|\underset{\sim}{x}'(t)|^2\} = R_{x'x'}(0) = -R''(0)$$

است. بنابراین

$$P\{\underset{\sim}{x}'(t) \le a\} = F_{x'}(a) = G\left[a/\sqrt{|R''(0)|}\right]$$

۹-۲۴) تابع $arc \sin x$ فرد است، بنابراین می‌تواند در فاصله $(-1,1)$ بسط یابد :

$$\alpha(x) \equiv \arcsin x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \qquad |x| \le 1$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \alpha(x)\sin n\pi x\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\alpha(x)\,d\cos n\pi x$$

$$= -\frac{\alpha(x)\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\,d\alpha(x)$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(n\pi\sin x)\,dx$$

و رابطه زیر نتیجه می‌شود [(۹-۸۱) را ببینید]:

$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \arc \sin \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \qquad J_o(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(z \sin x) dx$$

۹-۲۵) همان گونه که می‌دانیم [(۵-۱۰۰) و (۶-۱۹۳) را ببینید]:

$$E\{e^{j\omega \underset{\sim}{x}(t)}\} = \exp\{-\frac{R(0)}{2} \omega^2\}$$

$$E\{e^{j[\omega_1 \underset{\sim}{x}(t+\tau)+\omega_2 \underset{\sim}{x}(t)]}\} = \exp\{-\frac{1}{2}[R(0)\omega_1^2 + 2R(\tau)\omega_1\omega_2 + R(0)\omega_2^2]\}$$

بنابراین، با $j\omega = a$

$$E\{I e^{a\underset{\sim}{x}(t)}\} = \exp\{\frac{a^2}{2} R_x(0)\} I$$

$$E\{I e^{a\underset{\sim}{x}(t+\tau)} I e^{a\underset{\sim}{x}(t)}\} = I^2 \exp\{a [R_x(0) + R_x(\tau)]\}$$

۹-۲۶) الف)

$$R_y(\tau) = a^2 E\{\underset{\sim}{x}[c(t+\tau)]\underset{\sim}{x}(ct)\} = a^2 R(c\tau)$$

ب) اگر $z_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\, x(\varepsilon t)$ باشد، آن‌گاه $R_{z_\varepsilon}(\tau) = \varepsilon R_x(\varepsilon \tau)$ [مانند (الف)]. اگر $\delta > 0$ به اندازه کافی کوچک و $\phi(t)$ در مبدا پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\int_{-\delta}^{\delta} R_{z_\varepsilon}(\tau)\phi(\tau) d\tau = \phi(0) \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon R_x(\varepsilon\tau)\, d\tau$$

$$= \phi(0) \int_{-\varepsilon\delta}^{\varepsilon\delta} R(\tau) d\tau \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{} \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = q\, \phi(0)$$

بنابراین

$$R_{z_\varepsilon}(\tau) \to q\, \delta(\tau) \quad \text{as } \varepsilon \to \infty.$$

۹-۲۷)

$$\underline{y}(t) = \int_{t-T}^{t} \underline{x}(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

بنابراین، $y(t_1)$ و $y(t_2)$ بستگی خطی به مقادیر $x(t)$به ترتیب در فاصله $(t_1 - T, t_1)$ و $(t_2 - T, t_2)$ دارد. اگر $|t_1 - t_2| > T$ باشد، آن‌گاه این فواصل هم‌پوشانی ندارند و از آن‌جایی که:

$$E\{\underline{x}(\tau_1)\underline{x}(\tau_2)\} = 0 \text{ for } \tau_1 \neq \tau_2$$

از این نتیجه می‌شود که

$$E\{\underline{y}(t_1)\underline{y}(t_2)\} = 0.$$

۹-۲۸) الف)

$$I(t) = E\left\{\int_0^t \int_0^t h(t,\alpha)\underline{x}(\alpha)h(t,\beta)\underline{x}(\beta)\ d\alpha d\beta\right\}$$

$$= \int_0^t \int_0^t h(t,\alpha)h(t,\alpha)q(\alpha)\delta(\alpha-\beta)d\alpha d\beta = \int_0^t h^2(t,\alpha)q(\alpha)d\alpha$$

ب) اگر $y'(t) + c(t)y(t) = x(t)$ باشد، آن‌گاه $y(t)$ ورودی سیستم تغییرپذیر با زمان خطی در (الف) با پاسخ ضربه $h(t,\alpha)$ است طوری که:

$$\frac{\partial h(t,\alpha)}{\partial t} + c(t)h(t,\alpha) = \delta(t-\alpha) \qquad h(\alpha^-,\alpha) = 0$$

یا به طور معادل

$$\frac{\partial h(t,\alpha)}{\partial t} + c(t)h(t,\alpha) = 0 \qquad t > 0 \quad h(\alpha^+,\alpha) = 1$$

این نتیجه می‌دهد که:

$$h(t,\alpha) = e^{-\int_\alpha^t c(\tau)d\tau}$$

بنابراین اگر

$$I(t) = \int_0^t h^2(t,\alpha)q(\alpha)d\alpha \quad \text{then} \quad I'(t) + 2c(t)I(t) = q(t)$$

چون پاسخ ضربه این معادله برابر است با

$$e^{-2\int_\alpha^t c(\tau)d\tau} = h^2(t,\alpha)$$

۹-۲۹) الف) اگر

$$\underline{y}'(t) + 2\underline{y}(t) = \underline{x}(t)$$

آن‌گاه

$$\underline{y}(t) = \underline{x}(t) * h(t)$$

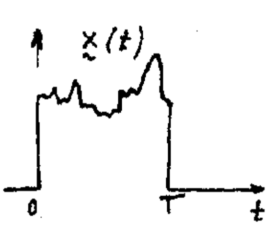
در جایی که $h(t) = e^{-2t}U(t)$ و با فرض $q(t) = 5$ و از (۹۰-۱۰) نتیجه می‌گیریم:

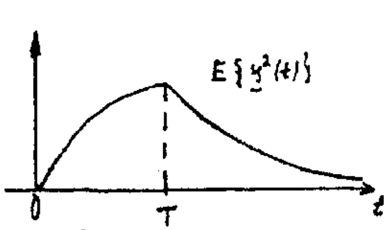
$$E\{\underline{y}^2(t)\} = 5 * e^{-4t}U(t) = 5\int_0^\infty e^{-4\tau}d\tau = \frac{5}{4}$$

ب) مانند (الف) با فرض $q(t) = 5U(t)$ عمل می‌کنیم. بنابراین برای $t > 0$

$$E\{\underline{y}^2(t)\} = 5U(t) * e^{-4t}U(t) = 5\int_0^t e^{-4\tau}d\tau = \frac{5}{4}(1 - e^{-4t})$$

۹-۳۰)





از (۹-۹۰) و با فرض $q(t) = N[U(t) - U(t-T)]$

$$E\{\underset{\sim}{y}^2(t)\} = \begin{cases} AN\displaystyle\int_0^t e^{-2\alpha(t-\tau)}d\tau = \frac{AN}{2\alpha}\,(1-e^{-2\alpha t}) & 0 \le t < T \\ \\ AN\displaystyle\int_0^T e^{-2\alpha(t-\tau)}d\tau = \frac{AN}{2\alpha}\,(e^{2\alpha T}-1)e^{-2\alpha t} & t > T \end{cases}$$

۹-۳۱) از آن‌جایی که $x(t)$ یک فرایند ایستا از دید وسیع است گشتاورهای S برابراست با گشتاورهای

$$\underset{\sim}{z} = \int_{-5}^{5} \underset{\sim}{x}(t)\,dt$$

بنابراین ، (شکل ۹-۵ را ببینید)

$$E\{\underset{\sim}{s}^2\} = \int_{-5}^{5}\int_{-5}^{5} R_x(t_1-t_2)\,dt_1 dt_2 = \int_{-10}^{10}(10-|\tau|)R_x(\tau)\,d\tau$$

$$E\{\underset{\sim}{s}\} = 80 \qquad \sigma_s^2 = 2\int_0^{10}(10-\tau)10e^{-2\tau}d\tau$$

۹-۳۲)

$$\underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{x}(t)*h(t) \qquad h(t) = e^{-2t}U(t)$$

الف)

$$E\{\underset{\sim}{y}^2(t)\} = 5*e^{-4t}\,U(t) = 5/4$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = 5\,\delta(t_1-t_2)*e^{-2t_2}\,U(t_2) = 5e^{-2(t_2-t_1)}U(t_2-t_1)$$

$$R_{yy}(t_1,t_2) = 5e^{-2(t_2-t_1)}U(t_2-t_1)*e^{-2t_1}\,U(t_1)$$

$$= \frac{5}{4}\,e^{-2|t_1-t_2|}$$

اولین معادله از (۹-۱۰۰) با فرض $q(t)=5$، دومین معادله از (۹-۹۴) با فرض $R_{xx}(t_1,t_2)=5\delta(t_1-t_2)$ و سومین معادله از (۹-۹۶) نتیجه می‌شوند.

ب) با فرض $R_{xx}(t_1,t_2)=5\delta(t_1-t_2)$ و معادله (۹-۹۴) و (۹-۹۶) نتیجه می‌شود که: برای t_1 یا 0 ،$t_2<0$ $R_{xy}(t_1,t_2)=R_{yy}(t_1,t_2)=0$ خواهد بود. برای $0<t_1<t_2$:

$$R_{xy}(t_1,t_2) = 5\delta(t_1-t_2)*e^{-2t_2} = 5\,e^{-2t_2}$$

$$R_{yy}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1} 5\,e^{-2(t_1-\tau)}e^{-2(t_1-\tau)}d\tau = \frac{5}{4}\,e^{-2(t_2-t_1)}(1-e^{-4t_1})$$

(۹-۳۳

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau^2}e^{-s\tau}d\tau = e^{s^2/4\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\tau+s/2\alpha)^2}d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{s^2/4\alpha}$$

این نتیجه می دهدکه:

$$e^{-\alpha\tau^2} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\omega^2/4\alpha}$$

$$e^{-\alpha\tau^2}\cos\omega_o\tau \longleftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[e^{-(\omega-\omega_o)^2/4\alpha}+e^{-(\omega+\omega_o)^2/4\alpha}\right]$$

(۹-۳۴

$$G(x_1,x_2;\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2;\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R(\tau) = E\{\underline{x}(t+\tau)\underline{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2\,f(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 \ f(x_1,x_2;\tau)dx_1 \ dx_2d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \ f(x_1,x_2;\tau)d\tau dx_1dx_2$$

۹-۳۵) فرایند $y(t) = x(t+a) - x(t-a)$ خروجی سیستم با ورودی $x(t)$ است و معادله سیستم به صورت:

$$H(\omega) = e^{ja\omega} - e^{-ja\omega} = 2j\sin a\omega$$

بنابراین [(۹-۱۵۰) را ببینید].

$$S_y(\omega) = 4\sin^2 a\omega \ S_x(\omega) = (2 - e^{j2a\omega} - e^{-j2a\omega})S_x(\omega)$$

$$R_y(\tau) = 2R_x(\tau) - R_x(\tau+2a) - R_x(\tau-2a)$$

۹-۳۶) وقتی $S(\omega) \geq 0$ است، با توجه به (۹-۱۳۶) نتیجه می‌گیریم:

$$R(0) - R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)(1-\cos\omega\tau)\,d\omega$$

$$\geq \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)(1-\cos 2\omega\tau)\,d\omega = \frac{1}{4}[R(0) - R(2\tau)]$$

و نتایج برای $n = 1$ به دست می‌آیند. با تکرار عملیات بالا، نتیجه عمومی به دست می‌آید.

۹-۳۷) از (۶-۱۹۷) داریم:

$$E\{\underline{x}^2(t+\tau)\underline{x}^2(t)\} = E\{\underline{x}^2(t+\tau)\}E\{\underline{x}^2(t)\} + 2E^2\{\underline{x}^2(t+\tau)\underline{x}^2(t)\}$$

بنابراین

$$R_y(\tau) = R_x^2(0) + 2R_x^2(\tau) = I^2(1+e^{-2\alpha|\tau|}+e^{-2\alpha|\tau|}\cos 2\beta\tau)$$

$$S_y(\omega) = \left[2\pi\delta(\omega) + \frac{4\alpha}{4\alpha^2+\omega^2} + \frac{2\alpha}{4\alpha^2+(\omega-2\beta)^2} + \frac{2\alpha}{4\alpha^2+(\omega+2\beta)^2}\right]$$

به علاوه

$$\eta_y = E\{\underset{\sim}{x}^2(t)\} = R_x(0) \qquad C_y(\tau) = 2R_x^2(\tau)$$

۹-۳۸)

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left|\sum_i a_i e^{j\omega\tau_i}\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\sum_{i,k} a_i a_k^* e^{j\omega(\tau_i-\tau_k)}d\omega$$

$$= \sum_{i,k} a_i a_k^* R(\tau_i-\tau_k) \geq 0$$

۹-۳۹) الف)

$$S(s) = \frac{1}{1+s^4} = \frac{1}{(s^2+\sqrt{2}s+1)(s^2-\sqrt{2}s+1)}$$

یک مورد خاص از مثال ۹-۲۷ ب با فرض $b=\sqrt{2}, c=1$ است. بنابراین

$$R(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-|\tau|/\sqrt{2}} \quad (\cos\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \sin\frac{|\tau|}{\sqrt{2}})$$

ب) از جفت $e^{-2|\tau|} \leftrightarrow 4/\left(4+\omega^2\right)$ و قضیه کانولوشن نتیجه می‌شود که

$$e^{-2|\tau|} * e^{-2|\tau|} \leftrightarrow \frac{16}{(4+\omega^2)^2}$$

بنابراین، برای $\tau > 0$

$$16\,R(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-2|x|} e^{-2|\tau-x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2x} e^{-2(\tau-x)}dx$$

$$+ \int_0^{\tau} e^{-2x} e^{-2(\tau-x)}\,dx + \int_{\tau}^{\infty} e^{-2x} e^{2(\tau-x)}\,dx = \frac{1}{2}e^{-2\tau}(1+2\tau)$$

و وقتی $R(-\tau) = R(\tau)$، از رابطه بالا نتیجه می‌شود که

$$e^{-2|\tau|}\ \frac{1+2|\tau|}{32} \longleftrightarrow \frac{1}{(4+\omega^2)^2}$$

۹-۴۰)

$$H^*(-s^*)\Big|_{s=j\omega} = H^*(j\omega) \qquad H^*(1/z^*)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = H^*(e^{j\omega T})$$

بنابراین

$$H(s)H^*(-s^*)\Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2 \qquad H(z)H^*(1/z^*)\Big|_{z=j\omega T} = |H(e^{j\omega T})|^2$$

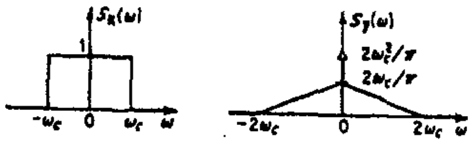
۹-۴۱) از (۹-۱۹۷)

$$R_y(\tau) = E\{\underset{\sim}{x}^2(t+\tau)\underset{\sim}{x}^2(t)\}$$

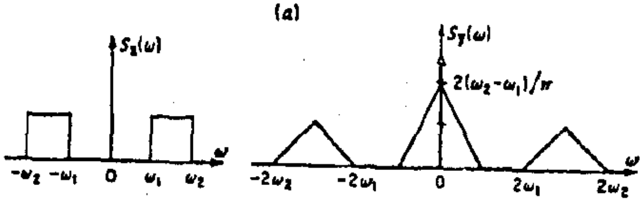
$$= E\{\underset{\sim}{x}^2(t+\tau)\}E\{\underset{\sim}{x}^2(t)\} + 2\ E^2\{\underset{\sim}{x}(t+\tau)\underset{\sim}{x}(t)\} = R_x^2(0) + 2\ R_x^2(\tau)$$

از رابطه بالا و قضیه کانولوشن فرکانسی نتیجه می‌شود که

$$S_y(\omega) = 2\pi R_x^2(0)\delta(\omega) + \frac{1}{\pi} S_x(\omega) * S_x(\omega)$$



(a)



(b)

۹-۴۲)

$$\underset{\sim}{y}(t) = 2\underset{\sim}{x}(t) + 3\underset{\sim}{x}'(t) \qquad \eta_x = 5 \qquad C_{xx}(\tau) = 4e^{-2|\sigma|}$$

فرایند $y(t)$ خروجی سیستم $H(s)=2+3s$ با ورودی $x(t)$ است. بنابراین

$$\eta_y = 5H(0) = 10$$

$$S_{yy}^c(\omega) = S_{xx}^c(\omega)|2+3j\omega|^2 = \frac{16}{4+\omega^2}(4+9\omega^2) = 144 - \frac{512}{4+\omega^2} = S_{yy}(\omega) - 2\pi\eta_y^2\delta(\omega)$$

۹-۴۳) الف)

$$\underset{\sim}{y}'(t) + 3\underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{x}(t),\ R_{xx}(\tau) = 5\delta(\tau).$$

فرایند $y(t)$ خروجی سیستم زیر است:

$$H(s) = \frac{1}{s+3} \qquad h(t) = e^{-3t}U(t)$$

بنابراین، [(۹-۱۰۰) و (۹-۱۵۰) را ببینید].

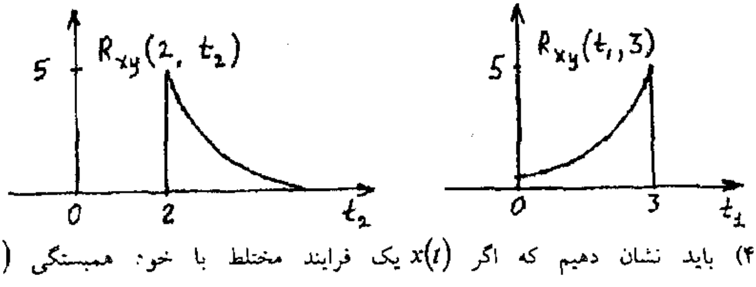
$$E\{\underset{\sim}{y}^2(t)\} = 5\int_0^\infty e^{-6t}dt = \frac{5}{6}$$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{5}{\omega^2+9} \qquad R_{yy}(\tau) = \frac{5}{6}e^{-3|\tau|}$$

ب) مانند مثال ۹-۱۸:

$$E\{\underset{\sim}{y}^2(t)\} = 5\int_0^t e^{-6\alpha}d\alpha = \frac{5}{6}(1-e^{-6t}) \qquad t>0$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = 5e^{-2|t_2-t_1|}U(t_1)U(t_2)U(t_2-t_1)$$



۹-۴۴) باید نشان دهیم که اگر $x(t)$ یک فرایند مختلط با خود همبستگی $R(\tau)$ و $|R(\tau_1)| = R(0)$ برای بعضی τهاست. پس، $R(\tau) = e^{j\omega_0\tau}w(\tau)$ در جایی که $w(\tau)$ یک تابع دوره ای با دوره تناوب τ_1 است. به علاوه، فرایند $y(t) = e^{-j\omega_0 t}x(t)$ با دوره میانگین مربعات است.

اثبات: واضح است که: $R(\tau_1)=R(0)e^{j\phi}$. با فرض $\omega_0=\phi/\tau_1$ ،

$$R_{yy}(\tau) = E\{\underset{\sim}{x}(t+\tau)e^{-j\omega_0(t+\tau)}\underset{\sim}{x}^*(t)e^{j\omega_0 t}\} = R(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

بنابراین

$$R_{yy}(\tau_1)=e^{-j\omega_0\tau_1}R(\tau_1) = R(0) = R_{yy}(0).$$

از رابطه فوق و (۱۰-۱۶۸) نتیجه می‌شود که تابع $w(\tau)=R_{yy}(\tau)$ دوره‌ای است.

۹-۴۵) الف) طیف حاصل‌ضرب $S_{\breve{x}x}(\omega)=-j\,\mathrm{sgn}\,\omega\, S_{xx}(\omega)$ یک تابع فرد است. بنابراین

$$E\{\underset{\sim}{x}(t)\underset{\sim}{\breve{x}}'(t)\} = \frac{-1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}\omega S_{xx}(\omega)\,d\omega = 0$$

ب) فرایند $\breve{\breve{x}}(t)$ خروجی سیستم زیر

$$(-j\,\mathrm{sgn}\omega)(-j\,\mathrm{sgn}\omega) = -1$$

با ورودی $x(t)$ است. بنابراین $\breve{\breve{x}}(t)=-x(t)$ می‌باشد.

۹-۴۶) به طور کلی

$$E\{\underset{\sim}{y}^2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\,|H(\omega)|^2 d\omega$$

$$\leq |H(\omega_m)|^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\,d\omega = E\{\underset{\sim}{x}^2(t)\}\,|H(\omega_m)|^2$$

در جایی که $|H(\omega_m)|$ حداکثر $|H(\omega)|$ است. در این مورد

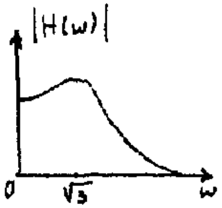
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(5-\omega)^2+4\omega^2} \quad \text{is maximum for } \omega=\sqrt{3}$$

و $|H(\omega_m)|^2=1/16$ است. بنابراین

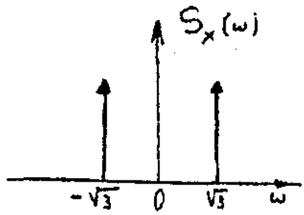
$$E\{\underset{\sim}{y}^2(t)\} \leq 10/16$$

با تساوی، اگر

$$R_x(10) = 10\cos\sqrt{3}\,\tau \quad \text{(Fig. b)}.$$



(a)



(b)

۹-۴۷) اگر $R_x(\tau) = e^{j\omega_0\tau}$ باشد، آن‌گاه

$$S_x(\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_o)$$

بنابراین، انتگرال $S_x(\omega)$ در همه فواصل برابر صفر غیر از نقطه $\omega = \omega_0$ است. از (۹-۱۸۲) نتیجه می‌شود که برای انتگرال $S_{xy}(\omega)$ نیز نتیجه به همین صورت است. این نشان می‌دهد که $S_{xy}(\omega)$ برای همه $y(t)$ در $\omega = \omega_0$ یک خط است.

۹-۴۸) الف) مانند (۹-۱۴۷) و (۹-۱۴۹):

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha(\tau-\gamma)} h(\gamma)\, d\gamma = e^{j\alpha\tau} H(\alpha)$$

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * \rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha(\tau-\gamma)} \rho(\gamma) d\gamma = e^{j\alpha\tau} |H(\alpha)|^2$$

ب) مانند (۹-۹۴) و (۹-۹۵):

$$R_{yx}(t_1,t_2) = e^{-j\beta t_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha(t_1-\gamma)} h(\gamma) d\gamma = e^{j(\alpha t_1-\beta t_2)} H(\alpha)$$

$$R_{yy}(t_1,t_2) = e^{-j\alpha t_1} H(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\beta(t_2-\gamma)} h(\gamma) d\gamma = e^{j(\alpha t_1-\beta t_2)} H(\alpha) H^*(\beta)$$

چون $h(t)$ حقیقی و $H(-B) = H^*(B)$ است.

۹-۴۹) اگر $S_{xx}(\omega) = S_{yy}(\omega)$ باشد آن‌گاه در هر فاصله درونی (a,b)، $S_{xx}(\omega) = 0$ یا $S_{yy}(\omega) = 0$ خواهد بود. از این و (۱۰-۱۶۸) نتیجه می‌شود که انتگرال $S_{xy}(\omega)$ در هر فاصله برابر صفر است بنابراین، $S_{xy}(\omega) = 0$ است.

۹-۵۰) این روایت زمان-گسسته قضیه (۹-۱۶۲) است. از (۹-۱۶۳) داریم:

$$E^2\{(\underset{\sim}{x}[n+m+1] - \underset{\sim}{x}[n+m])\underset{\sim}{x}[n]\} \le E\{|\underset{\sim}{x}[n+m+1] - \underset{\sim}{x}[n+m]|^2\}E\{|\underset{\sim}{x}[n]|^2\}$$

$$(R[m+1] - R[m])^2 \le 2(R[0] - R[1])R[0] = 0$$

بنابراین برای تمام mها

$$R[m+1] = R[m]$$

۹-۵۱) نشان می‌دهیم که

$$2\,\frac{R^2[1]}{R[0]} - R[0] \le R[2] \le R[0] \qquad (i)$$

ماتریس کواریانس تابع متغیر تصادفی $x[n]=x[n+1]$ و $x[n+2]$ غیرمنفی است [(۷-۲۹) را ببینید]:

$$\begin{vmatrix} R[0] & R[1] & R[2] \\ R[1] & R[0] & R[1] \\ R[2] & R[1] & R[0] \end{vmatrix} \ge 0$$

این نتیجه می‌دهد که

$$R[0]R^2[2] - 2\,R^2[1]R[2] - R^3[0] + 2R[0]R^2[1] \le 0$$

رابطه بالا در $R[2]$ مربعی است با ریشه‌های

$$R[0] \text{ and } -R[0] + 2\,R^2[1]/R[0]$$

وقتی این نامثبت است، $R[2]$ بایستی بین ریشه ها باشد مانند (i).

۹-۵۲) اگر $x[n]=Ae^{jn\omega T}$ باشد، آن‌گاه

$$R_x[m] = A^2E\{e^{j(m+n)\underset{\sim}{\omega}T}e^{-jn\underset{\sim}{\omega}T}\} = A^2\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{jm\omega T}\, f(\omega)\,d\omega$$

اما [(۹-۱۹۴) را ببینید]:

$$R[m] = \frac{1}{2\sigma}\int_{\sigma}^{\sigma} S_x(\omega)e^{jm\omega T}d\omega$$

بنابراین

$$A^2 f(\omega) = S_x(\omega)/2\sigma$$

۹-۵۳) الف) اگر $y(0) = y'(0) = 0$ باشد، آن‌گاه $y(t)$ خروجی سیستمی با ورودی $x(t)U(t)$ می‌باشد و پاسخ ضربه عبارتست از:

$$h''(t) + 7h'(t) + 10h(t) = \delta(t) \qquad h(0^-) = h'(0^-) = 0$$

$$h(t) = \frac{1}{3}\,(e^{-2t} - e^{-5t})U(t)$$

و با قرار دادن $q(t) = 5U(t)$ و (۹-۱۰۰) نتیجه می‌گیریم که

$$E\{y^2(t)\} = \frac{5}{9}\int_0^t (e^{-2\tau} - e^{-5\tau})^2 d\tau$$

ب) اگر $y[-1] = y[-2] = 0$ پس $y[n]$ خروجی یک سیستم با ورودی $x(t)U(t)$ و پاسخ دلتا $h(t)$ زیر است:

$$8h[n] - 6h[n-1] + h[n-2] = \delta[n] \qquad h[-1] = h[-2] = 0$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}}\right) U[n]$$

و با قراردادن $q[n] = 5U[n]$ و (۱۰-۱۷۶) نتیجه می‌گیریم:

$$E\{y^2[n]\} = 5\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k+2}} - \frac{1}{2^{2k+3}}\right)^2$$

۹-۵۴) الف)

$$y[n] = x[n]*h[n] \qquad h[n] = 2^{-n}U[n]$$

$$E\{y^2[n]\} = 5*2^{-2n}U[n] = 0$$

$$R_{xy}[m_1,m_2] = 5\delta[m_1-m_2]*2^{-m_2}U[m_2] = 5\ 2^{-(m_2-m_1)}U[m_2-m_1]$$

$$R_{yy}[m_1,m_2] = 5\times 2^{-(m_2-m_1)}U[m_2-m_1]*2^{-m_1}U[m_1]$$

$$= \frac{20}{3}\times 2^{-|m_1-m_2|}$$

اولین رابطه از (۹-۱۹۰) با $q[n]=5$ دومی و سومی از (۹-۱۹۱) با $R_{xx}[m_1,m_2]=5\delta[m_1-m_2]$ نتیجه می‌شوند.

ب) با $R_{xx}[m_1,m_2]=5\delta[m_1-m_2]U[m_1]U[m_2]$ و مسئله ۹-۲۵ الف نتیجه می‌شود که برای $m_1<0$ یا m_2 داریم:

$$R_{xy}[m_1,m_2] = R_{yy}[m_1,m_2] = 0.$$

و برای $0<m_1<m_2$

$$R_{xy}[m_1,m_2] = 5\ \delta[m_1-m_2]*2^{-m_2} = 5\times 2^{-m_2}$$

$$R_{yy}[m_1,m_2] = \sum_{k=0}^{m_1} 5\times 2^{-(m_2-k)}2^{-(m_1-k)} = \frac{5}{3}2^{-(m_2-m_1)}(4-2^{-2m_1})$$

۹-۵۵ (الف)

$$R_x[m_1,m_2] = q[m_1]\delta[m_1-m_2]$$

$$E\{s^2\} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_n a_k\ E\{x[n]x[k]\}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_n a_k\ q[n]\delta[n-k] = \sum_{n=0}^{N} a_n^2\ q[n]$$

ب)

$$R_x(t_1,t_2) = q(t_1)\delta(t_1-t_2)$$

$$E\{s^2\} = \int_0^T\int_0^T a(t)a(\tau)\ E\{x(t)x(\tau)\}d\tau dt$$

$$= \int_0^T\int_0^T a(t)a(\tau)q(t)\delta(t-\tau)d\tau dt = \int_0^T a^2(t)q(t)dt$$

۱۰-۱) الف) اگر $x(t)$ یک فرایند پواسون مانند شکل ۹-۳ الف باشد، آن گاه برای ثابت t، $x(t)$ یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λt است. بنابراین [(۵-۱۱۹) را بینید]مشخصه تابع برابر با $\exp\{\lambda t(e^{j\omega}-1)\}$ است.

ب) اگر $x(t)$ فرایند واینر باشد، آن‌گاه $f(x,t)$ عبارتست از $N(0,\sqrt{\alpha t})$. بنابراین [(۵-۱۰۰) را ببینید] تابع مشخصه مرتبه اول آن برابر با $\exp\{-\alpha t\omega^2/2\}$ است.

۱۰-۲) برای مقادیر بزرگ t، $x(t)$ و $y(t)$ می‌توانند به وسیله دو فرایند واینر مستقل مانند (۱۰-۵۲) تقریب زده شوند:

$$f_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}}\, e^{-x^2/2\alpha t} \qquad f_y(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}}\, e^{-y^2/2\alpha t}$$

بنابراین $z(t)$ دارای چگالی ری‌لی است [(۶-۷۰) را ببینید]. [توجه: دقیقا $z(t)$ متغیر تصادفی از نوع گسسته است که مقادیر $s\sqrt{m^2+n^2}$ را در جایی که m و n عدد صحیح هستند اختیار می‌کند]. حاصل ضرب $f_z(z,t)dz$ به طور تقریب برابر با احتمالی است که $z(t)$ بین z و $z+dz$ با شرط $dz >> T$ باشد.

۱۰-۳) ولتاژ $v(t)$ خروجی یک سیستم با ورودی $n_e(t)$ است که تابع سیستم به صورت زیر است:

$$H_1(s) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

بنابراین

$$S_v(\omega) = S_{n_e}(\omega)\left|H_1(j\omega)\right|^2 = \frac{2kTR}{(1-\omega^2LC)^2+R^2C^2\omega^2}$$

به علاوه

$$Z_{ab}(s) = \frac{R+Ls}{LCs^2+RCs+1} \qquad \underline{Re}\ Z_{ab}(j\omega) = \frac{R}{(1-\omega^2LC)^2+R^2C^2\omega^2}$$

موافق با (۱۰-۷۵) است.

جریان $i(t)$ خروجی یک سیستم با ورودی $n_e(t)$ است و تابع سیستم عبارتست از:

$$H_2(s) = \frac{1}{R+Ls}$$

پس

$$S_i(\omega) = S_{n_e}(\omega)\left|H_2\ (j\omega)\right|^2 = \frac{2kTR}{R^2+\omega^2L^2}$$

علاوه بر این (ادمیتانس اتصال کوتاه)

$$Y_{ab}(s) = \frac{1}{R+LS} \qquad \underline{Re}Y_{ab}(j\omega) = \frac{2kTR}{R^2+L^2\omega^2}$$

موافق با (۱۰-۷۸) است.

۱۰-۴) معادله $m\,x''(t)+f\,x'(t)=F(t)$ توصیف میستم با

$$H(s) = \frac{1}{ms^2+fs} \qquad h(t) = \frac{1}{f}(1-e^{-ft/m})U(t)$$

است و از (۹-۱۰۰) نتیجه می‌شود:

$$E\{\underset{\sim}{x}^2(t)\} = \frac{2kTf}{f^2}\int_0^t (1-e^{-2\alpha\tau})^2\,d\tau \qquad \alpha = \frac{f}{2m}$$

۱۰-۵) مانند مثال ۱۲-۲، a و b به صورت زیر هستند:

$$\underset{\sim}{x}(t) - a\,\underset{\sim}{x}(0) - b\underset{\sim}{v}(0) \perp \underset{\sim}{x}(0),\ \underset{\sim}{v}(0)$$

از این نتیجه می‌شود که:

$$R_{xx}(\tau) = aR_{xx}(0) + b\ R_{xv}(0)$$
$$(i)$$
$$R_{xv}(\tau) = aR_{xv}(0) + b\ R_{vv}(0)$$

در جایی که [(۱۰-۱۶۳) را ببینید].

$$R_{xx}(\tau) = A\ e^{-\alpha\tau}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau) \qquad \tau > 0$$

$$R_{xv}(\tau) = -R'_{xx}(\tau) = A\ e^{-\alpha\tau}(\sin\beta\tau)\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}$$

$$R_{vv}(\tau) = R'_{xv}(\tau) = A\ e^{-\alpha\tau}(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau)\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}$$

با جایگزینی در (i) و حل آن به دست می‌آوریم که:

$$a = e^{-\alpha\tau}(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin \beta\tau)$$

$$b = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau$$

بالاخره

$$P = E\{[\underset{\sim}{x}(t) - a\,\underset{\sim}{x}(0) - b\,\underset{\sim}{v}(0)]\underset{\sim}{x}(t)\} = R_{xx}(0) - a\,R_{xx}(t) - b\,R_{xv}(t)$$

$$= \frac{2kTf}{m^2}\left[1 - e^{-2\alpha t}(1 + \frac{2\alpha^2}{\beta}\sin^2\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin 2\beta t)\right]$$

۱۰-۶) اگر $x(t) = w(t^2)$ باشد. پس [(۱۰-۷۰) را ببینید]

$$R_x(t_1,t_2) = E(\underset{\sim}{w}(t_1^2)\underset{\sim}{w}(t_2^2)) = \alpha t_1^2$$

اگر $y(t) = w^2(t)$ باشد، آن‌گاه [(۶-۱۹۷) را ببینید]

$$R_y(t_1,t_2) = E\{\underset{\sim}{w}^2(t_1)\underset{\sim}{w}^2(t_2)\}$$

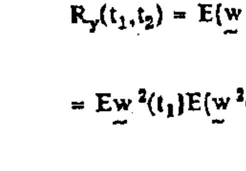
$$= E\underset{\sim}{w}^2(t_1)E(\underset{\sim}{w}^2(t_2) + 2\,E^2\{\underset{\sim}{w}(t_1)\underset{\sim}{w}(t_2)\} = \alpha^2 t_1 t_2 + 2\alpha^2 t_1^2$$

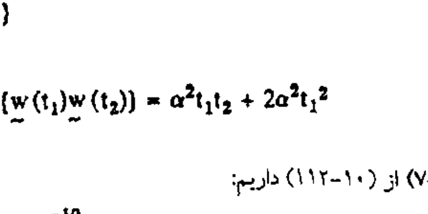
۱۰-۷) از (۱۰-۱۱۲) داریم:

$$\eta_s = 3\int_0^{10} 2\,dt = 60 \qquad \sigma_s^2 = 3\int_0^{10} 4dt = 120 \qquad E(\underset{\sim}{s}^2) = 3720$$

$s(7) = 0$ است، اگر هیچ نقطه‌ای در فاصله $(7-10,7)$ نباشد. تعداد نقاط در این فاصله عبارتست از متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $10\lambda = 30$ است. بنابراین $P\{s(7) = 0\} = e^{-30}$.

۱۰-۸)





از فرض:

$$S_{xx}(\omega) = S_{yy}(\omega) \qquad S_{xy}(-\omega) = -S_{xy}(\omega)$$

واز (۹-۱۴۸) :

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)\,|H(\omega)|^2 \qquad S_{xy}(\omega) = S_{xx}(\omega)H^*(\omega)$$

از ترکیب این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$|H(\omega)|^2 = 1 \qquad H(-\omega) = -H(\omega)$$

از آن جایی که $h(t)$ وانعی است، معادله دوم نتیجه می دهد که

$$H(\omega) = jB(\omega)$$

و از اولین رابطه مانند شکل نتیجه می شود که

$$|B(\omega)| = 1$$

۱۰-۹) با در نظر گرفتن

$$\underline{i}(t) = \underline{a}(t), \quad \underline{q}(t) = \underline{b}(t)$$

از (۱۱-۶۳) نتیجه می‌شود که

$$S_i(\omega) = S_q(\omega) \qquad S_{iq}(\omega) = -S_{qi}(\omega) = S_{qi}(-\omega)$$

بنابراین [(۱۱-۷۵) و (۱۱-۸۲) را ببینید].

$$S_w(\omega) = 2\,S_i(\omega) + 2j\,S_{qi}(\omega)$$
$$S_w(-\omega) = 2\,S_i(\omega) - 2j\,S_{qi}(\omega)$$

با اضافه و کم کردن نتیجه می گیریم که

$$4\,S_i(\omega) = S_w(\omega) + S_w(-\omega) \qquad 4j\,S_{iq}(\omega) = S_w(-\omega) - S_w(\omega)$$

۱۰-۱۰) از (۱۰-۱۳۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underline{\underline{Re}}\ [\underset{\sim}{w}(t)e^{j\omega_0 t}]$$

$$\underset{\sim}{x}(t-\tau) = \underline{\underline{Re}}[\underset{\sim}{w}_{\tau}(t)e^{j\omega_0 t}] = \underline{\underline{Re}}[\underset{\sim}{w}(t-\tau)e^{j\omega_0 (t-\tau)}]$$

$$\underset{\sim}{w}_{\tau}(t) = \underset{\sim}{w}(t-\tau)e^{-j\omega_0 \tau}$$

(۱۱-۱۰

$$R''_x(\tau) \longleftrightarrow -\omega^2 S_x(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega)\,d\omega = -R''_x(0)$$

و با ω_0 فرکانس حامل بهینه، از (۱۰-۱۵۰) نتیجه می‌شود:

$$E\{|\underset{\sim}{w}'(t)|^2\} = \frac{M}{2\pi} = -2R''_x(0) - 2\omega_0^2 R_x(0)$$

۱۰-۱۲) از ایستایی فرایند $x(t)\cos\omega t + y(t)\sin\omega t$ این نتیجه می‌شود که [(۱۰-۱۳۰) را ببینید]

$$C_{xx}(\tau) = C_{yy}(\tau) \qquad C_{xy} = -C_{yx}(\tau) \tag{i}$$

با استفاده از اتحادها، ما باید چگالی مشترک $f(X,Y)$ از $2n$ تابع متغیر تصادفی را

$$\underset{\sim}{X} = [\underset{\sim}{x}(t_1), \ldots, \underset{\sim}{x}(t_n)] \qquad \underset{\sim}{Y} = [\underset{\sim}{y}(t_1), \ldots, \underset{\sim}{y}(t_n)]$$

بر حسب ماتریس کواریانس C_{zz} بردار مختلط $Z = X + jY$ توصیف کنیم. از (i) این نتیجه می‌شود که:

$$E\{x(t_i)\underset{\sim}{x}(t_j)\} = E\{\underset{\sim}{y}(t_i)\underset{\sim}{y}(t_j)\} \qquad E\{\underset{\sim}{x}(t_i)\underset{\sim}{y}(t_j)\} = -E\{\underset{\sim}{y}(t_i)\underset{\sim}{x}(t_j)\}$$

از این خواهیم داشت:

$C_{XX} = C_{YY}$, and $C_{XY} = -C_{YX}$; hence, f(X,Y) is given by (8-62).

۱۰-۱۳) سیگنال $c(t) = f(t)$ یک مورد استثنائی از یک فرایند ایستای سیکلی همانند (۱۰-۱۷۸) است با

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \longleftrightarrow H(\omega) = \int_0^T f(t)e^{-j\omega t}dt$$

و $c_m = 1 , R[m] = 1$ است. بنابراین [(۱۰-۲ الف) را ببینید]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m\, e^{-jm\omega T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\omega T} = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}\ m)$$

از رابطه بالا و (۱۰-۱۸۰) نتیجه می‌شود که فرایند $x(t) = f(t-\theta)$ ایستا با طیف قدرت زیر است:

$$S(\omega) = \left| \int_0^T f(t)e^{-j\omega t}dt \right|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T} m)$$

۱۰-۱۴) فرایند

$$\underline{y}_N(t) = \underline{x}(t+\tau) - \sum_{n=-N}^{N} \underline{x}(t+nT)\ \frac{\sin\sigma(\tau-nT)}{\sigma(\tau-nT)}$$

یک خروجی از یک سیستم با ورودی $x(t)$ است و تابع سیستم عبارتست از

$$H_N(\omega) = e^{j\omega\tau} - \sum_{n=-N}^{N} \frac{\sin\sigma(\tau-nT)}{\sigma(\tau-nT)}\, e^{jnT\omega}$$

علاوه براین $\varepsilon_N(\tau) = y_N(0)$، بنابراین [(۹-۱۵۳) را ببینید]

$$E\{\underline{\varepsilon}_N^2(\tau)\} = E\{\underline{y}^2(0)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} S(\omega)\,|H_N(\omega)|^2 d\omega \qquad (i)$$

تابع $H_N(\omega)$ خطای برش دربسط سری فوریه از $e^{j\omega\tau}$ در فاصله $(-\delta,\delta)$ است. بنابراین، برای $N > N_0$:

$$|H_N(\omega)| < \varepsilon \qquad\qquad |\omega| < \sigma$$

از رابطه فوق و (i) این نتیجه می شود که، اگر $S(\omega) = 0$ برای $|\omega| < \delta$ باشد، آن‌گاه

$$E\{\underline{\varepsilon}_N^2(\tau)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega)\,|H_N(\omega)|^2 d\omega < \varepsilon\ R(0) \qquad N > N_0$$

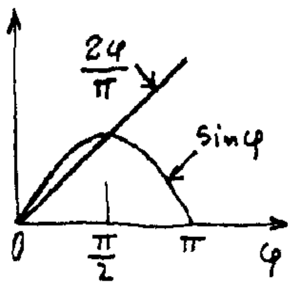
۱۰-۱۵) [رابطه بعد از (۱۰-۱۹۵) را ببینید]

$$R(0) - R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega)(1-\cos\omega\tau)d\omega$$

$$\leq \frac{\tau^2}{4\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \omega^2 S(\omega)d\omega = \frac{-\tau^2}{2} R''(0)$$

علاوه بر این، وقتی

$$\sin\phi \geq \frac{2\phi}{\pi} \qquad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$



نتیجه می‌گیریم که

$$R(0) - R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega)\, 2\sin^2\frac{\omega\tau}{2}\, d\omega$$

$$\geq \frac{2\tau^2}{\pi^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \omega^2 S(\omega)d\omega = \frac{-2\tau^2}{\pi^2} R''(0)$$

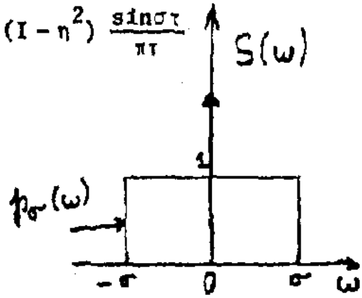
۱۰-۱۶) با فرض $T = \pi/\delta$ داریم:

$$R(mT) = E\{\underline{x}(nT+mT)\underline{x}(nT)\} = \begin{cases} I & m = 0 \\ \eta^2 & m \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین [(۱۰-۱۹۶) را ببینید]

$$R(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(mT)\,\frac{\sin\sigma(\tau-mT)}{\sigma(\tau-mT)} = \eta^2 + (I-\eta^2)\,\frac{\sin\sigma\tau}{\pi\tau}$$

$$S(\omega) = 2\pi\eta^2\delta(\omega) + 2\pi(I-\eta^2)p_\sigma(\omega)$$

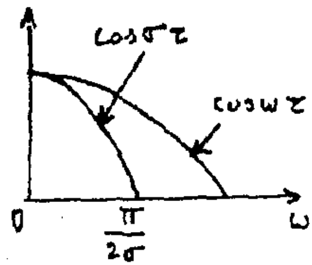


۱۰-۱۷) رابطه زیر داده شده است:

$$E\{\underset{\sim}{x}(n+m)\underset{\sim}{x}(n)\} = N\delta[m]$$

این یک مورد خاص از مسئله ۱۰-۱۶ با $I = N\,,\, \eta = 0$ است.

۱۰-۱۸) اگر $|\tau| < \pi/2\delta$ باشد، آن گاه



$$\cos\omega\tau \geq \cos\sigma\tau \qquad |\omega| \leq \sigma$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega$$

$$\geq \frac{\cos\sigma\tau}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega)\,d\omega = R(0)\cos\sigma\tau$$

۱۰-۱۹) از (۱۰-۱۲۳) با فرض $c = \delta$ خواهیم داریم:

$$P_1(\omega,\tau) + j\omega\, P_2(\omega,\tau) = 1$$

$$P_1(\omega,\tau) + j(\omega+\tau)P_2(\omega,\tau) = e^{j\sigma\tau}$$

بنابراین

$$P_1(\omega,\tau) = 1 - \frac{\omega}{\sigma}\,(e^{j\sigma\tau} - 1) \qquad P_2(\omega,\tau) = \frac{1}{j\sigma}\,(e^{j\sigma\tau} - 1)$$

با جایگذاری در (۱۱-۱۴۱)، نتیجه می گیریم که

$$p_1(\tau) = \frac{4\sin^2(\sigma\tau/2)}{\sigma^2\tau^2} \qquad p_2(\tau) = \frac{4\sin^2(\sigma\tau/2)}{\sigma^2\tau}$$

و با فرض $t = 0$، نتایج مطلوب از (۱۰-۲۰۶) نتیجه می‌شود چون $\overline{T} = 2T$ و

$$\sin^2\frac{\sigma(\tau-2nT)}{2} = \sin^2\left(\frac{\sigma\tau}{2} - n\pi\right) = \sin^2\frac{\sigma\tau}{2}$$

۱۰-۲۰) همانند (۱۰-۲۱۳):

$$\underset{\sim}{P}(\omega) = \frac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a} \cos\omega t\ \underset{\sim}{z}(t)\cos\omega_c t\,dt$$

$$E\{\underset{\sim}{P}(\omega)\} = \int_{-a}^{a} \cos\omega t\cos\omega_c t\,dt$$

$$\sigma^2_{P(\omega)} = \frac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a} \cos^2\omega_c t_2\cos^2\omega t_2\,dt_2$$

۱۰-۲۱) نشان خواهیم داد که اگر

$$\underset{\sim}{X}_c(\omega) = \frac{1}{\lambda}\sum_{|\underset{\sim}{t}_i|<c} \underset{\sim}{x}(t_i)e^{-j\omega\underset{\sim}{t}_i} = \frac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a} \underset{\sim}{x}(t)\underset{\sim}{z}(t)e^{-j\omega t}dt$$

در جایی که $z(t) = \sum \delta(t - t_i)$ یک دنباله ضربه پواسون است، آن گاه

$$E\{|\underset{\sim}{X}_c(\omega)|^2\} \simeq 2cS_x(\omega) + \frac{2c}{\lambda} R_x(0)$$

اثبات

از آن‌جایی که $R_z(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$، نتیجه می‌شود که

$$E\left\{|\underset{\sim}{X}_c(\omega)|^2\right\} = \frac{1}{\lambda^2}\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c} R_x(t_1-t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

$$= \int_{-c}^{c} e^{j\omega t_2}\int_{-c}^{c} R_x(t_1-t_2)e^{-j\omega t_1}dt_1dt_2 + \frac{1}{\lambda}\int_{-c}^{c} R_x(0)dt_2$$

اگر $\int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| < \infty$ باشد، آن‌گاه برای بزرگ بودن c کافی است، انتگرال داخلی سمت راست تقریبا برابر است با $S_x(\omega)^{-j\omega t_2}$ و (i) نتیجه می شود.

(۲۲-۱۰

$$E\{\underset{\sim}{z}(t)\} = g(t) \qquad E\{\underset{\sim}{w}(t)\} = g(t) - g(T)t/T = g(t)$$

$$\underset{\sim}{w}(t) = (1 - \frac{t}{T})\int_0^t \underset{\sim}{x}(\alpha)d\alpha - \frac{t}{T}\int_t^T \underset{\sim}{x}(\alpha)d\alpha$$

دو انتگرال بالا ناهمبسته هستند، چون $n(t)$ یک نویز سفید است. بنابراین، همانند مثال ۹-۵

$$\sigma_w^2 = (1 - \frac{t}{T})^2 Nt + \frac{t^2}{T^2}N(T - t) = Nt(1 - \frac{t}{T})$$

توجه: رابطه بالا نشان می‌دهد که اطلاعات $g(t) = 0$ می‌تواند استفاده شود تا تخمین $g(t)$ توسعه یابد. لزوما، اگر ما از $w(t)$به جای $z(t)$ برای تخمین $g(t)$ در جمله اعداد $x(t)$ استفاده کنیم، واریانس از Nt به $Nt(1-t/T)$ کاهش می‌یابد.

۱۰-۲۳) الف) چون $\left|\sum_i a_i b_b\right| \le \sum |a_i||b_i|$ است، کافی است فرض کنیم که اعداد a_i و b_i حقیقی هستند. مربع

$$I(z) = \sum_i (a_i - z b_i)^2 = z^2 \sum_i b_i^2 - 2z \sum_i a_i b_i + \sum_i a_i^2$$

برای هر z حقیقی غیرمنفی است. بنابراین مبین آن نمی‌تواند مثبت باشد. پس (i) را نتیجه می‌دهد.

ب) با فرض $f[n]$ و $R_\upsilon[m] = s_0\delta[m]$ همانند مثال ۱۰-۲۴ الف (نویز سفید):

$$y_f[n_0] = \sum h[n] f[n_0 - n] \qquad y_\upsilon[n] = \sum h[n] \upsilon[n]$$

$$E\{y_\upsilon^2[n]\} = S_0\, \rho[0] = S_0 \sum |h[n]|^2$$

[(۹-۲۱۳) را ببینید] و (i) نتیجه می‌دهد:

$$\frac{y_f^2[n_0]}{E\{y_\upsilon^2[n]\}} = \frac{|\sum h[n] f[n_0 - n]|^2}{S_0 \sum h^2[n]} \le \frac{1}{S_0} \sum |h[n]|^2$$

با تساوی اگرو فقط اگر $h[n] = kf^*[n_0 - n]$ باشد.

۱۰-۲۴) الف) $F(z)$ و ثابت $= S_\upsilon(\omega) = S_0$ داده شده‌اند. تبدیل z از $y_f[n]$ برابر با $F(z)H(z)$ است. بنابراین [(۹-۱۰۹) را ببینید]:

$$y_f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega T}) H(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega$$

$$\frac{y_f^2[n]}{E\{y_\upsilon^2[n]\}} = \frac{\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega T}) H(e^{j\omega T}) d\omega\right|^2}{S_0 \int_{-\pi}^{\pi} \left|H(e^{j\ \ T})\right|^2 d\omega}$$

$$\le \frac{1}{S_0} \int_{\pi}^{\pi} \left|F(e^{j\omega T})\right|^2 d\omega$$

آخرین نامساوی از نامساوی شوارتز نتیجه می‌شود.

با تساوی اگر و فقط اگر

$$H(e^{j\omega T}) = kF^{*}(e^{j\omega T}) = kF(e^{-j\omega T}), \text{ i.e., iff } H(z) = kF(z^{-1})$$

ب) برای $R[m]$ و $F(z)$ و شکل $H(z)$ دلخواه برای پیدا کردن ضریب a_m از $H(z)$ داده شده است. در این مورد

$$y_f[n] = a_0 f[n] + a_1 f[n-1] + \cdots + a_N f[n-N]$$

$$\underset{\sim}{y}_\nu[n] = a_0 \underset{\sim}{\nu}[n] + a_1 \underset{\sim}{\nu}[n-1] + \cdots + a_N \underset{\sim}{\nu}[n-N]$$

برای حداکثر کردن نسبت سیگنال به نویز کافی است رابطه زیر

$$E\{\underset{\sim}{y}_\nu^2[n]\} = \sum_{k,r=0}^{N} a_k a_r R_\nu[k-r]$$

تحت قید که مجموع:

$$y_f[0] = a_0 f[0] + a_1 f[-1] + \cdots + a_N f[-N]$$

ثابت است حداقل شود. با یک λ ثابت(ضرایب با محدوده بزرگ)، مجموع را حداقل می‌کنیم.

$$I = \sum_{k,r=0}^{N} a_k a_r R\ [k-r] - \lambda\left[\sum_{k=0}^{N} a_k f[-k] - y_f[0]\right]$$

این سیتم زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 = \sum_{r=0}^{N}\left[a_r R_\nu[k-r] - \lambda f[-k]\right] \qquad k = 0,\ldots,N$$

که جواب آن a_k است.

(۲۵-۱۰

$$B = A|H(\omega_0)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega_0^2}} \qquad S_{y_n}(\omega) = \frac{N}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$R_{y_n}(\tau) \simeq \frac{N}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \qquad E\{\underset{\sim}{y}_n^2(t)\} = R_{y_n}(0) = \frac{N}{2\alpha}$$

$$\frac{B^2}{E\{\underset{\sim}{y}_n^2(t)\}} = \frac{2A^2}{N}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2} \qquad \text{Max. if } \alpha = \omega_0$$

۱۰-۲۶) در جایی که $H(\omega)$ با یک عامل ثابت مشخص شده است، می‌توانیم درنظر بگیریم که به ترتیب $y_f(t_0)$ مقدار مطلوب $H(\omega)$ است هنگامی که $f(t)$ ثابت است:

$$y_f(t_o) = \sum_{i=0}^{m} a_i f(t_o - iT) = c \qquad \text{(i)}$$

مشکل ما حداقل کردن واریانس از $y_\nu(t)$ تحت شرط (i) است:

$$V = E\{\underset{\sim}{y}_\nu^2(t)\} = \sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{i=0}^{m} a_i R(nT-iT) \qquad \text{(ii)}$$

سیستم زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} = \sum_{i=0}^{m} a_i R(nT-iT) - kf(t_o-nT) = 0$$

در جایی که k ثابت است (ضرایب لاگرانج). با a_n نتیجه شده به این روش از (ii) نتیجه می‌گیریم:

$$V = \sum_{n=0}^{m} ka_n f(t_o-nT) = ky_f(t_o) \qquad r^2 = \frac{y_f^2(t_o)}{ky_f(t_o)}$$

۱۰-۲۷) با درنظر گرفتن $E\{x(t)\} = 0$ نتیجه می‌گیریم:

$$R_{yyy}(\mu,\nu) = E\{\underset{\sim}{x}(t+\mu)+c[\,[\underset{\sim}{x}(t+\nu)+c]\,[\underset{\sim}{x}(t)+c]\} = R(\mu,\nu) + cR(\mu) + cR(\nu) + cR(\mu-\nu) + c^3$$

علاوه بر این

$$R(\mu) \leftrightarrow 2\pi S(u)\delta(v) \qquad R(\nu) = 2\pi\delta(u)S(v) \qquad c^3 \leftrightarrow 4\pi^2\delta(u)\delta(v)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(\mu-\nu)e^{-j(u\mu+v\nu)}d\mu d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-ju\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(u+v)\nu}d\nu = 2\pi S(u)\delta(u+$$

۱۰-۲۸) باید از معادله استفاده کنیم:

$$E\{\tilde{x}(t)\} = 0,\ E\{\tilde{x}^2(t)\} = \lambda t.$$

فرض می کنیم که $t_1 < t_2 < t_3$ باشد. واضح است که

$$\tilde{x}(t_2) = \tilde{x}(t_1) + [\tilde{x}(t_2)-\tilde{x}(t_1)]$$

$$\tilde{x}(t_3) = \tilde{x}(t_1) + [\tilde{x}(t_2) - \tilde{x}(t_1)] + [\tilde{x}(t_3)-\tilde{x}(t_2)] \qquad (i)$$

با قرار دادن $\widetilde{x}(t_1)\widetilde{x}(t_2)\widetilde{x}(t_3)$ و استفاده از اتحاد $E\{\widetilde{x}(t_i)-\widetilde{x}(t_j)\}=0$ و مستقل از ۳ جمله طرف راست (i) نتیجه می‌گیریم که

$$E\{x(t_1)x(t_2)x(t_3)\} = E\{x^3(t_1)\} = \lambda t_1 = \lambda \min(t_1, t_2, t_3)$$

در جایی که $\widetilde{z}(t)=\widetilde{x}'(t)$ است، از (۹-۱۲۰) -(۹-۱۲۲) نتیجه می‌گیریم که

$$R_{zzz}(t_1,t_2,t_3) = \frac{\partial^3 R_{xxx}(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3} = \lambda\frac{\partial^3 \min(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}$$

همین کافی است تا نشان دهیم طرف راست رابطه برابر با $\lambda\delta(t_1-t_2)\delta(t_1-t_2)$ است. این نتیجه‌ای روابط زیر است:

$$\frac{\partial \min(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_3} = t_1U(t_2-t_1)\delta(t_3-t_1) + t_2\,U(t_1-t_2)\,\delta(t_3-t_2)$$

$$+ U(t_1-t_3)U(t_2-t_3) - t_3\delta(t_1-t_3)U(t_2-t_3) - t_3U(t_1-t_3)\delta(t_2-t_3)$$

$$= U(t_1-t_3)U(t_2-t_3)$$

چون $t_i\delta(t_i-t_j)=t_j\delta(t_j-t_i)$ است. بنابراین

$$\frac{\partial^2 \min(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_2\partial t_3} = U(t_1-t_3)\delta(t_2-t_3) \qquad \frac{\partial^2 \min(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1\delta t_2\partial t_3} = \delta(t_1-t_2)\delta(t_1-t_3)$$

۱۰-۲۹) برای این مطلب متن را ببینید.

(۱-۱۱

$$S_x(z) = \frac{5-2(z+1/z)}{10-3(z+1/z)} = \frac{2}{3} + \frac{5/9}{10/3-(z+1/z)}$$

$$R[m] = \frac{2}{3} + \frac{5}{18}\, 3^{-|m|} \qquad \Gamma(z) = \frac{3z-1}{2z-1}$$

(۲-۱۱

$$S_x(s) = \frac{s^4+64}{s^4-10s^2+9} = \frac{s^2+4s+8}{s^2+4s+3}\ \frac{s^2-4s+8}{s^2-4s+3}$$

$$L(s) = \frac{s^2+4s+8}{s^2+4s+3}$$

۱۱-۳) اثبات اول:

$$\underline{s}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \ell[n]\underline{i}[n-k] \qquad E\{\underline{x}^2[n]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \ell^2[k]$$

اثبات دوم:

$$S(z) = L(z)L(1/z) \qquad R[m] = \ell[m] * \ell[-m] = \sum_{k=0}^{\infty} \ell[k]\ell[k-m]$$

$$R[0] = \sum_{k=0}^{\infty} \ell^2[k]$$

۱۱-۴)الف) این یک حالت خاص از (۱۱-۲۲) و (۱۱-۲۳) است.

ب) از الف نتیجه می‌شود که:

$$R''_{yx}(\tau) + 3\,R'_{yx}(\tau) + 2\,R_{yx}(\tau) = q\delta(\tau)$$

در جایی که

$$R_{xx}(\tau) = 0 \text{ for } \tau < 0,$$

رابطه بالا نشان می دهد که

$$R_{yx}(\tau) = 0 \ \text{for} \ \tau \leq 0^- \qquad R'_{yx}(0^-) = 0$$

علاوه براین

$$S_{yx}(s) = \frac{q}{s^2 + 3s + 2}$$

بنابراین (مقادیر اولیه قضیه):

$$R_{yx}(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \ S_{yx}(s) = 0 \qquad R'_{yx}(0^+) = \lim_{s \to \infty} s^2 \ S_{yx}(s) = q$$

به طور مشابه

$$R''_{yy}(\tau) + 3 R'_{yy}(\tau) + 2 R_{yy}(\tau) = R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) = 0 \quad \text{for} \ \tau > 0$$

$$S_{yy}(s) = \frac{q}{(s^2 + 3s + 2)(s^2 - 3s + 2)} = \frac{qs/12 + q/4}{s^2 + 3s + 2} + \frac{-qs/12 + q/4}{s^2 - 3s + 2}$$

$$S^+_{yy}(s) = \frac{qs/12 + q/4}{s^2 + 3s + 2}$$

$$R^+_{yy}(0^+) = R_{yy}(0) = \lim_{s \to \infty} s^2 \ S^+_{yy}(s) = \frac{q}{12}$$

$$R'_{yy}(0) = \lim_{s \to \infty} s \ [s \ S^+_{yy}(s) - \frac{q}{12}] = 0$$

(۵-۱۱

$$S_x(z) = S_s(z) + S_\nu(z) = \frac{1}{D(z)} + q = \frac{1 + qD(z)}{D(z)}$$

اگر $R_s[m] = 2^{-|m|}$ و $S_\nu(z) = 5$ باشند آن‌گاه(مثال ۹-۳۱ را ببینید):

$$S_s(z) = \frac{1.5}{2.5 - (z^{-1} + z)} \qquad S_x(z) = \frac{5 - 14z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}}$$

۱۱-۶) فرایند زیر خروجی سیستمی با ورودی $x[n]$ است:

$$\underline{y}[n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \underline{x}(nT + kT)$$

تابع سیستم عبارتست از:

$$H(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z^k$$

علاوه براین $s = y[0]$ و

$$n^2\left|H(e^{j\omega T})\right|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{jk\omega T}\right|^2$$

$$= \left|\frac{e^{j\omega T} - e^{j(n+1)\omega T}}{1 - e^{j\omega T}}\right|^2 = \frac{\sin^2 n\omega T/2}{\sin^2 \omega T/2}$$

بنابراین [(۹-۵۱) را ببینید]:

$$E\{\underline{s}^2\} = R_y[0] = \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\,\frac{\sin^2 n\omega T/2}{\sin^2 \omega T/2}\,d\omega$$

۱۱-۷) چون

$$R(t_1,t_2) = e^{-c|t_1-t_2|}$$

(۱۲-۵۸) نتیجه می‌دهد که:

$$\int_{-a}^{t_1} e^{-c(t_1-t_2)}\phi(t_2)dt_2 + \int_{t_1}^{a} e^{c(t_1-t_2)}\phi(t_2)dt_2 = \lambda\phi(t_1) \qquad (i)$$

با دوبار مشتق گرفتن و استفاده از (i) نتیجه می‌گیریم که (با حذف جزئیات):

$$\lambda\phi''(t) + (2c - \lambda c^2)\phi(t) = 0$$

بنابراین

$$\phi(t) = \beta\cos\omega t \quad \text{and} \quad \phi(t) = \beta'\cos\omega' t$$

با مشخص کردن ω و جایگزینی در (i) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{2c}{c^2+\omega^2}+\frac{\omega\sin a\omega - c\cos a\omega}{c^2+\omega^2}\ e^{-ac}\ (e^{ct}+e^{-ct}) = 2c\,\lambda\cos\omega t$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\omega_n \sin a\omega_n - c\ \cos a\omega_n = 0 \qquad\qquad \lambda_n = \frac{2c}{c^2+\omega_n^2}$$

مقدار ثابت β_n از رابطه زیر مشخص می‌شود(نرمالیزاسیون):

$$1 = \int_{-a}^{a} \beta_n^2\ \cos^2\omega_n t\,dt \qquad\qquad \beta_n^2 = \frac{1}{a+c\ \lambda_n}$$

به طریق مشابه برای $\beta_n' \sin\omega_n' t$ عمل می‌کنیم.

۱۱–۸) همانند (۹–۶۰):

$$E\{|\underline{X}_T(\omega)|^2\} = \int_{-T/2}^{T/2} R(t_1-t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

$$= \int_{-T}^{T} (T-|\tau|)R(\tau)\ e^{-j\omega\tau}d\tau$$

با مشتق‌گیری نسبت به T و استفاده از این حقیقت که اگر

$$\phi(t) = \int_{-t}^{t} f(x;t)dx$$

آن‌گاه

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = f(t;t) - f(-t,t) + \int_{-t}^{t} \frac{\partial f}{\partial t}\ (x,t)dx$$

نتیجه می گیریم که

$$\frac{\partial E\{|\underset{\sim}{X}_T(\omega)|^2\}}{\partial T} = \int_{-T}^{T} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = E\{\frac{\partial}{\partial T}|\underset{\sim}{X}_T(\omega)|^2\}$$

رابطه بالا به $S(\omega)$ وقتی که $T \to \infty$ میل می‌کند.

(۹-۱۱

$$E\{\underset{\sim}{X}(\omega)\} = \int_{-a}^{a} 5\cos 3t\, e^{-j\omega t}dt = \frac{5\sin a(\omega-3)}{\omega-3} + \frac{5\sin a(\omega+3)}{\omega+3}$$

$$\text{Var}, \underset{\sim}{X}(\omega) = 2\,q\,a = 4a,$$

(۱۰-۱۱

$$E\{\underset{\sim}{X}(u)\underset{\sim}{X}(v)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2\delta[n-k]\; e^{-j(nu-kv)T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2\; e^{-jn(u-v)T}$$

۱۱-۱۱) با انتقال مبدا، قرار می دهیم:

$$\underset{\sim}{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\underset{\sim}{x}(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad \beta_n(\alpha) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}R(\tau-\alpha)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau$$

الف) باید نشان دهیم که

$$\hat{\underset{\sim}{x}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\underset{\sim}{c}_n e^{jn\omega_0 t} \text{ then } E\{|\underset{\sim}{x}(t)-\hat{\underset{\sim}{x}}(t)|^2\} = 0 \text{ for } |t| < T/2 \qquad \text{(i)}$$

اثبات

$$E\{\underset{\sim}{c}_n\underset{\sim}{x}^*(\alpha)\} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}E\{\underset{\sim}{x}(t)\underset{\sim}{x}^*(\alpha)\}e^{-jn\omega_0 t}dt = \beta_n(\alpha)$$

توابع $\beta_n(\alpha)$ ضرایب بسط فوریه از $R(\tau-\alpha)$ هستند:

$$R(\tau-\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(\alpha) e^{jn\omega_0\tau} \qquad |\tau| < T/2 \tag{ii}$$

بنابراین

$$E\{\underset{\sim}{x}(t)\underset{\sim}{x}^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{\underset{\sim}{c}_n\underset{\sim}{x}^*(t)\}e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(t)e^{jn\omega_0 t}$$

از (ii) با $\tau = \alpha = t$ این نتیجه می‌شود که آخرین مجموع برابر با $R(0)$ است. به طور مشابه $E(\bar{x}^*(t)x(t)) = R(0)$ و (i) نتیجه می‌شود.

ب)

$$E\{\underset{\sim}{c}_n\underset{\sim}{c}_m^*\} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E\{c_n\underset{\sim}{x}^*(t)\}e^{jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \beta_n(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

ج) اگر T به اندازه کافی بزرگ باشد، آن‌گاه

$$T\beta_n(\alpha) = \int_{-T/2}^{T/2} R(\tau-\alpha)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau \simeq S(n\omega_0)e^{-jn\omega_0\alpha}$$

$$E\{c_n c_m^*\} = \frac{S(n\omega_0)}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(m-n)\omega_0\alpha}d\alpha = \begin{cases} S(n\omega_0)/T & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

بنابراین برای مقادیر بزرگ T ضرایب c_n از یک فرایند ایستا از دید وسیع دلخواه تقریبا متعامد است.

.(۱۲-۱۱)

$$E\{\underset{\sim}{x}(t_1)\underset{\sim}{x}^*(t_2)\} = \frac{1}{4\pi^2} E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\{\underset{\sim}{X}(u)\underset{\sim}{X}^*(v)\}e^{j(ut_1-vt_2)}dudv\right.$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q(u)\delta(u-v)e^{j(ut_1-vt_2)}dudv\right. = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} Q(u)e^{ju(t_1-t_2)}du$$

این تنها به $\tau = t_1 - t_2$ بستگی دارد:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{x_2}\int_{-\infty}^{\infty} Q(u)e^{ju\tau}du \qquad S_{xx}(\omega) = \frac{Q(\omega)}{2\pi}$$

۱۱-۱۳) معادله (۱۱-۷۹) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$E\{\underset{\sim}{A}(u)\underset{\sim}{A}(v)\} = Q(u)\delta(u-v) = E\{\underset{\sim}{B}(u)\underset{\sim}{B}(v)\} \qquad E\{\underset{\sim}{A}(u)\underset{\sim}{B}(v)\} = 0$$

برای $u \geq 0$, $v \geq 0$. باید نشان دهیم که اگر رابطه بالا درست باشد و $E\{A(\omega)\} = E\{B(\omega)\}$، آن‌گاه فرایند

$$\underset{\sim}{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\underset{\sim}{A}(\omega)\cos\omega t - \underset{\sim}{B}(\omega)\sin\omega t\right] d\omega$$

یک فرایند ایستا از دید وسیع است.

اثبات واضح است که $E\{x(t)\} = 0$ و

$$E\{\underset{\sim}{x}(t+\tau)\underset{\sim}{x}(t)\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty E\{\underset{\sim}{A}(u)\cos u(t+\tau) - \underset{\sim}{B}(u)\sin u(t+\tau)\}\,[\underset{\sim}{A}(v)\cos vt - B(v)\sin vt]\,dudv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty Q(u)\delta(u-v)\,[\cos u(t+\tau)\cos vt + \sin u(t+\tau)\sin v(t)\,dudv\,]\,dvdu$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty Q(u)\,[\cos u(t+\tau)\cos u\,t + \sin u(t+\tau)\sin ut]\,du$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty Q(u)\cos u\tau du$$

از این و از (۹-۱۳۶) نتیجه می‌شود که $x(t)$ فرایندی ایستا از دید وسیع با $S_{xx}(\omega) = Q(\omega)/\pi$ است.

۱۱-۱۴)

$$E\{\underset{\sim}{v}(t)\} = 0 \qquad E\{\underset{\sim}{X}_T(\omega)\} = \int_{-T}^{T} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

انتگرال بالا شکل تغییر یافته فرایند $f(t)p_T(t)$ است، بنابراین (قضیه کانولوشن فرکانسی) برابر با $F(\omega) * \sin T\omega/\pi\omega$ است.

$$\operatorname{Var}\underset{\sim}{X}_T(\omega) = E\left\{\left|\int_{-T}^{T}\underset{\sim}{\nu}(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2\right\}$$

انتگرال شکل تغییر یافته غیر ایستای سفید با نویز $\nu(t)p_T(t)$ است. خودهمبستگی این فرایند برابر است با $q(t_1)\delta(t_1 - t_2)$ در جایی که $q(t) = qp_T(t)$ است. بنابراین، [(۱۱-۶۹) را ببینید]

$$\operatorname{Var} \underset{\sim}{X}_T(\omega) = Q(0) = \int_{-T}^{T} q\,dt = 2qT$$

(۱-۱۲

$$\underset{\sim}{x}(t) = 10 + \underset{\sim}{v}(t) \qquad R_v(\tau) = 2\,\delta(\tau) \qquad E\{\underset{\sim}{v}(t)\} = 0$$

$$E\{\underset{\sim}{\eta}_T\} = E\{\underset{\sim}{x}(t)\} = 10 \qquad C_x(\tau) = 2\delta(\tau)$$

از (۱۲-۵):

$$\sigma^2_{\eta_T} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 2\delta(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau = \frac{1}{T}$$

۱۲-۲) فرایند $x(t)$ نرمال است و به صورت:

$$F(x,x;\tau) \longrightarrow F^2(x) \quad \text{as} \quad \tau \to \infty \qquad (1)$$

باید نشان دهیم که میانگین- ارگودیک است [(۱۲-۱۰) را ببینید]:

$$C(\tau) \longrightarrow 0 \qquad \text{as} \quad \tau \to \infty$$

اثبات: می‌توانیم فرض کنیم که $\eta = 0$ و $C(0) = 1$ است. با این فرض متغیر تصادفی $x(t+\tau)$ و $x(t)$ عبارتند از $N(0,0:1,1;r)$ در جایی که $r = r(\tau) = Z(\tau)$ اتوکواریانس $x(t)$ است.

بنابراین:

$$f(x_1,x_2;\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x_1 - rx_2)^2\right\} e^{-x_2^2/2}$$

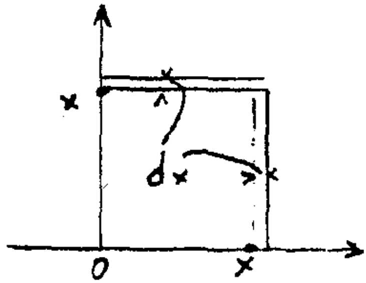
واضح است که $f(x,y) = f(y,x)$ ، بنابراین (شکل را ببینید):

$$F(x+dx,\ x+dx;\tau) - F(x,x,\tau) = 2\int_{-\infty}^{x} f(\xi,x)\,d\xi\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}(\xi - xr)^2\right\}d\xi\ e^{-x^2/2}dx$$

علاوه براین

$$F^2(x+dx) - F^2(x) = 2\,F(x)f(x)dx$$



از رابطه بالا و از (i) نتیجه می‌شود که

$$G\left(\frac{x - rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) \xrightarrow[\tau \to \infty]{} G(x)$$

بنابراین، $r(\tau) \to 0$ وقتی $\tau \to \infty$.

۱۲-۳) اگر $x(t)$ نرمال باشد، پس[(۱۲-۲۷) را ببینید]:

$$C_{zz}(\tau) = R_x(\lambda+\tau)R_x(\lambda-\tau) + R_x^2(\tau) \qquad z(t) = x(t+\lambda)x(t)$$

بنابراین اگر $R_x(\tau) = 0$ برای $|\tau| > a$ باشد، آن‌گاه $C_{zz}(\tau) = 0$ برای $|\tau| > \lambda + a$ است.

۱۲-۴) اگر $x(t) = a e^{j(\omega t + \phi)}$ باشد، آن‌گاه متوسط زمان عبارت است از

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x^*(t)dt = e^{j\omega\tau}\ |a|^2$$

۱۲-۵) اگر $z(t) = x(t+\lambda)y(t)$ باشد، آن‌گاه

$$C_{zz}(\tau) = E\{x(t+\lambda+\tau)y(t+\tau)x(t+\lambda)y(t)\} - R_{xy}^2(\lambda)$$

و نتیجه از (۱۲-۵) به دست می‌آید.

۱۲-۶) فرایند $x(t) = v(t-\theta)$ ایستا است با میانگین $\overline{\eta}$ و کواریانس $\overline{C}(\tau)$ داده شده [(۱۰-۱۷۶) و (۱۰-۱۷۷) را ببینید]:

$$\overline{\eta} = \frac{1}{T}\int_0^T \eta(t)dt \qquad\qquad \overline{C}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T C(t+\tau, t)dt$$

اگر $R(t+\tau, t) \to \eta^2(t)$ وقتی $\tau \to \infty$، آن‌گاه

$$C(t+\tau,t) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0 \qquad \text{hence} \qquad \bar{C}(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$$

این نشان می‌دهد که [(۱۰-۱۲) را ببینید]، $\bar{x}(t)$ ارگودیک است، بنابراین

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} \bar{\underline{x}}(t)dt = \frac{1}{2c}\int_{-c+\underline{\theta}}^{c+\underline{\theta}} \underline{x}(t)dt \longrightarrow \bar{\eta}$$

این نتیجه می‌دهد که نتایج مطلوب است چون برای خروجی مشخصی است، $\theta(\xi)=\theta$ ثابت است

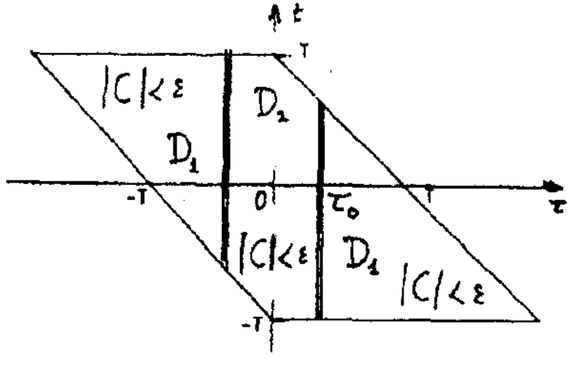
و

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{2c}\int_{-c+\theta}^{c+\theta} \underline{x}(t)dt = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} \underline{x}(t)dt$$

۱۲-۷) از (۹-۳۸) نتیجه می‌شود که

$$4T^2\sigma_T^2 = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1,t_2)dt_1,dt_2 = \iint_{D} C(t+\tau,t)d\tau dt$$

در جایی که D متوازی‌الاضلاع در شکل است. $0<\varepsilon$ داده شده است پس می‌توانیم τ_0 ثابت را پیدا کنیم.



به طوری‌که

$$|C(t+\tau,t)| < \varepsilon \text{ for } |\tau| > \tau_0$$

علاوه بر این ،اگر $C(t,t)<p$ باشد، آن‌گاه

$$C^2(t_1,t_2) \le C(t_1,t_1)C(t_2,t_2) < P^2$$

بنابراین

$$|C| < \varepsilon \text{ in } D_1 \text{ and } |C| < P \text{ in } D_2$$

ناحیه D_1 کمتر است از $4T^2$ و D_2 کمتر از $4\tau_0 T$ است. بنابراین

$$\sigma_T^2 < \varepsilon + \frac{\tau_0}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{} \varepsilon$$

و بنابراین ε دلخواه است، و نتیجه می‌گیریم که: $\delta_T \to 0$.

۱۲–۸) از (۶–۲۳۴) با فرض $x(t) = x\,, x(t+\lambda) = y$ نتیجه می‌شود:

$$\eta_1 = \eta_2 = 0 \qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = R(0) \qquad r\sigma_1,\sigma_2 = R(\lambda)$$

ب) اثبات بر اساس تعریف زیر است:

$$E\{\underset{\sim}{y}|M\} = E\{E\{\underset{\sim}{y}|\underset{\sim}{x}\}|M\} \qquad M = \{\underset{\sim}{x}(t) \in D\} \tag{i}$$

اثبات: ابتدا فرض کنید که D شامل اجتماع فاصله باز است. در این مورد اگر $x \in D$ باشد، آن‌گاه برای مقادیر کوچک δ فاصله $(x\,, x+\delta)$ زیرمجموعه‌های از D است. آن گاه

$$\{x \le \underset{\sim}{x} < x + dx,\ M\} = \{x \le \underset{\sim}{x} < x + dx\}$$

برای $x \in D$ و جاهای دیگر $\{\phi\}$ است. از این نتیجه می‌شود:

$$f(x|M)\,dx = \frac{P\{x \le \underset{\sim}{x} < x+dx\}}{P(M)} = \frac{1}{p} f(x)dx \qquad p = P(M)$$

برای برای $x \in D$ وجاهای دیگر صفر است. به طور مشابه $f(x,y|M) = f(x,y)/p$ برای $x \in D$ و جاهای دیگر صفر است. از رابطه بالا نتیجه می‌شود که:

$$E\{E\{\underset{\sim}{y}|\underset{\sim}{x}|M\}\} = \int_D \left(\int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy\right) f_x(x|M)dx$$

$$= \int_D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(x,y)f(x)}{f(x)\,p}\,dydx = \int_D \int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y|M)dydx = E\{\underset{\sim}{y}|M\}$$

اگر D نقطه ایزوله شده باشد به جای هر $x \in D$ یک فاصله باز $(x-\varepsilon\,, x+\varepsilon)$ از شکل باز جفت D_ε را جایگزین می‌کنیم. واضح است که اگر در نقطه ایزوله شده x_i از D، $D_\varepsilon \to D$ به جای $\varepsilon \to 0$ را قرار دهیم و $E\{y|x_i\}$ به صورت محدود تعبیر شود، (i) نتیجه می‌شود. وقتی

$$E\{\underset{\sim}{x}(t+\lambda)|\underset{\sim}{x}(t)\} = R(\lambda)\underset{\sim}{x}(t)/R(0)$$

قرار دهیم و (i) نتیجه می‌شود.

$$E\{\underset{\sim}{x}(t+\lambda)|M\} = E\{E\{\underset{\sim}{x}(t+\lambda)|\underset{\sim}{x}(t)\}|M\} = E\left\{\frac{R(\lambda)}{R(0)}\underset{\sim}{x}(t)|M\right\} = \frac{R(\lambda)}{R(0)}\ \overline{x}$$

ج) برای D فاصله (a,b) را انتخاب می‌کنیم و نمونه های $x(nT)$ و $x(nT+\lambda)$ از یک تحقق تنهای $x(t)$ را ازبازگشت تنها از جفت‌های $x(t_i), x(t_i+\lambda)$ را طوری که $a < x(t_i) < b$ را شکل می‌دهیم. با استفاده از (۵-۵۱) نتیجه می گیریم که

$$E\{\underset{\sim}{x}(t+\lambda)|\ a < \underset{\sim}{x}(t) < b\} = \frac{R(\lambda)}{R(0)}\overline{x} \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underset{\sim}{x}(t_i+\lambda)$$

جایی که $x = E\{x(t)|a < x(t) < b\}$ است. این تقریب رضایت بخش است، اگر N بزرگ باشد و $R(\tau) \approx 0$ برای $\tau > T$.

۱۲-۹) الف) از (۷-۶۱) با فرض $E\{w(t)\} = C_{x\bar{y}}(\lambda)$ داریم:

$$R_{ww}(\tau) = C_{xy}(\lambda+\tau)C_{xy}(\lambda-\tau) + C_{xx}(\tau)C_{yy}(\tau) + C_{xy}^2(\lambda) = C_{ww}(\tau) + C_{xy}^2(\lambda)$$

ب) از (الف) نتیجه می‌شود، اگر

$$C_{xx}(\tau) \to 0 \qquad C_{yy}(\tau) \to 0 \qquad C_{xy}(\sigma) \to 0$$

آن‌گاه $C_{xy}(\tau) \to 0$ وقتی $|\tau| \to \infty$. بنابراین [(۱۲-۱۰) را ببینید] فرایند $x(t)$ و $y(t)$ یک کواریانس ارگودیک است.

۱۲-۱۰) از (۱۰-۱ ب) با فرض $g(x) = 1$ نتیجه می‌شود:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dt \int_a^b 1^2 \times dx = (b-a)\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

۱۲-۱۱) از تخمین η در متوسط زمان η_T در (۱۲-۱) استفاده می‌کنیم: همان‌طور که می‌دانیم (مثال ۱۲-۴ را ببینید):

$$E\{\underset{\sim}{\eta}_T\} = \eta \qquad \sigma_T^2 = \frac{5}{2T}$$

می‌خواهیم ε را بیابیم در جایی که

$$P(\eta - \varepsilon < \underset{\sim}{\eta}_T < \eta + \varepsilon) = 0.95$$

الف) از (۵–۸۸) داریم:

$$0.95 = P\{|\eta_T - \eta| \leq \varepsilon\} \leq 1 - \frac{\sigma_T^2}{\varepsilon^2} \qquad \varepsilon = \varepsilon_a \leq \frac{\sigma_T}{\sqrt{0.05}} = \frac{50}{T}$$

ب) اگر $\nu(t)$ نرمال باشد، آن‌گاه η_T نرمال است، بنابراین

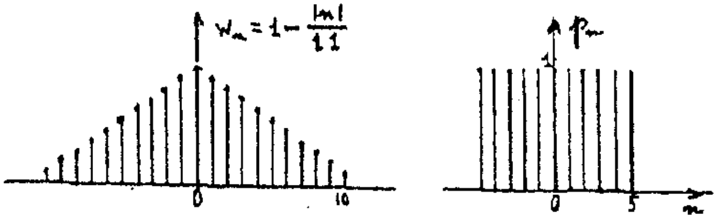
$$0.95 = 2G\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_T}\right) - 1 \qquad G\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_T}\right) = 0.975 \qquad \frac{\varepsilon}{\sigma_T} = z_{0.975}$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\varepsilon = \varepsilon_b \simeq \sqrt{10/5} = \varepsilon_a\sqrt{5}$$

۱۲–۱۲) الف) این از قضیه کانولوشن برای سری فوریه نتیجه می‌شود.

ب)



With p_n as above, $w_n = \frac{1}{11} p_n * p_n$

$$P(\omega) = \sum_{n=-5}^{5} e^{-jnT\omega} = \frac{\sin 5.5\omega T}{\sin 0.5\omega T} \qquad W(\omega) = \frac{1}{11} P^2(\omega)$$

۱۳–۱۲)

$$\underset{\sim}{X}_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad \underset{\sim}{S}_T(\omega) = |X_T(\omega)|^2$$

و

$$\Gamma(u,v) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} R(t_1 - t_2) e^{-j(u t_1 + v t_2)} dt_1 dt_2 \qquad (1)$$

همانند (۹–۱۷۳) و (۹–۱۷۴) نتیجه می‌شود که

$$E\{\underline{S}_T(\omega)\} = \Gamma(\omega, -\omega)$$

$$\text{Var}\ \underline{S}_T(\omega) = |\Gamma(\omega, -\omega)|^2 + |\Gamma(\omega,\omega)|^2 \geq E^2\{\underline{S}_T(\omega)\}$$

$$\text{Var}\ \underline{S}_T(0) = 2|\Gamma(0,0)|^2 = 2\{E^2\{\underline{S}_T(0)\}$$

بخش باقی‌مانده از مسئله مشکل‌تر و خارج از حد این کتاب است (برای جزئیات آنالیز سیگنال پاپولیس را ببینید). از (i) و قضیه کانولوشن نتیجه می‌شود که

$$\Gamma(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(u+v-\alpha)}{\pi T(u+v-\alpha)} \frac{\sin T\alpha}{\alpha} S(v-\alpha)d\alpha$$

اگر $S(\omega)$ در فاصله از طول $1/T$ تقریبا ثابت باشد، آن‌گاه می تواند در خارج علامت انتگرال باشد. بنابراین

$$\Gamma(u,v) \simeq S(v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(u+v-\alpha)}{\pi T(u+v-\alpha)} \frac{\sin T\alpha}{\alpha} d\alpha = S(v) \frac{\sin T(u+v)}{T(u+v)}$$

این نتیجه می‌دهد:

$$\Gamma(\omega,-\omega) \simeq S(\omega) < \Gamma(\omega,\omega) \simeq S(\omega) \frac{\sin 2T\omega}{T\omega} \xrightarrow[\omega T \to \infty]{} 0$$

$$\text{Var}\ \underline{S}_T(\omega) \leq 2E^2\{\underline{S}_T(\omega)\} \xrightarrow[\omega T \to \infty]{} E^2\{\underline{S}_T(\omega)\}$$

۱۲-۱۴)تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\underline{X}_c(\omega) = \int_{-T}^{T} c(t)\underline{x}(t)e^{-j\omega t}dt$$

شکل تغییر یافته سری فوریه محصول زیر است:

$$c(t)\underline{x}_T(t) \qquad \underline{x}_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

بنابراین، تابع زیر:

$$2T\underline{S}_T(\omega) = |\underline{X}_c(\omega)|^2$$

تبدیل فوریه تابع زیر است:

$$\underset{\sim}{c}(t)\underset{\sim}{x}_T(t) * c(-t)\underset{\sim}{x}_T(-t)$$

$$= \int_{-T+|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} c(t+\frac{\tau}{2})\underset{\sim}{x}_T(t+\frac{\tau}{2})c(t-\frac{\tau}{2})\underset{\sim}{x}(t-\frac{\tau}{2})dt$$

۱۲-۱۵) چون $C(-\tau)=C(\tau)$ است، از (۱۲-۲۸) نتیجه می‌شود که برای مقادیر بزرگ T:

$$\text{Var } \underset{\sim}{R}_T(\lambda) \simeq \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} [C(\lambda+\tau)C(\lambda-\tau) + C^2(\tau)]\, d\tau$$

چون $S(\omega)$ حقیقی است از فرمول پارسوال و جفت‌های زیر

$$C(\lambda+\tau) \leftrightarrow e^{j\lambda\omega}S(\omega) \qquad C(\lambda-\tau) \leftrightarrow e^{-j\lambda\omega}S(\omega)$$

نتیجه می‌شود که انتگرال بالا برابر است با

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{j\lambda\omega} S(\omega)e^{j\lambda\omega}S(\omega) + S^2(\omega)\right] d\omega$$

۱۲-۱۶) با فرض $c = T-|\tau|/2$ داریم:

$$\underset{\sim}{z}(t) = \underset{\sim}{x}(t+\frac{\tau}{2})\underset{\sim}{x}(t-\frac{\tau}{2}) \qquad E\{\underset{\sim}{R}_T(\tau)\} = R(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})$$

از (۷-۳۷) نتیجه می‌شود:

$$E\{\underset{\sim}{z}(t_1)\underset{\sim}{z}(t_2)\} - E\{\underset{\sim}{z}(t_1)\}E\{\underset{\sim}{z}(t_2)\}$$

$$= R^2(t_1-t_2) + R(t_1-t_2+\tau)R(t_1-t_2-\tau)$$

$$4T^2 \text{ Var } \underset{\sim}{R}_T(\tau) = \int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c} [R^2(t_1-t_2) + R(t_1-t_2+\tau)R(t_1-t_2-\tau)]dt_1dt_2$$

$$= \int_{-2c}^{2c} [R^2(\alpha) + R(\alpha+\tau)R(\alpha-\tau)](2T-|\tau|-|\alpha|)d\alpha$$

۱۲-۱۷) با برابر قرار دادن ضرایب z^k در (۱۲-۹۸) نتیجه می‌گیریم که

$$(1-K_N^2)\, a_k^{N-1} = a_k^N + K_N\, a_{N-k}^N$$

(۱۸-۱۲

$$R[0] = 8 \qquad R[1] = 4$$

از (۱۳-۶۸) داریم:

$$P_0 = 8 \qquad a_1^1 = K_1 = 0.5 \qquad P_1 = (1 - K_1^2)P_0 = 6$$

$$E_1(z) = 1 - 0.5z^{-1} \qquad S(\omega) = \frac{6}{|E_1(e^{j\omega})|^2}$$

۱۹-۱۲) داریم

$$P_0 = 13 \qquad a_1^1 = K_1 = \frac{5}{13} \qquad P_1 = \frac{144}{13}$$

$$P_1K_2 = R[2] - a_1^1R[1] \qquad K_2 = \frac{1}{144}$$

$$a_1^2 = \frac{55}{144} \qquad a_2^2 = \frac{1}{144} \qquad P_2 = \frac{1595}{144}$$

$$S_{MEM}(\omega) = \frac{1595 \times 144}{|144 - 55e^{-j\omega T} - e^{-j2\omega T}|^2}$$

از (۱۲-۱۱۹) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{vmatrix} 13-q & 5 & 2 \\ 5 & 13-q & 5 \\ 2 & 5 & 13-q \end{vmatrix} = 0 \qquad q_0 = 14-\sqrt{51} = 6.86$$

با جایگزینی مقادیر اصلاح شده 6.14,5,2 در معادلات یول-واکر (۱۲-۸۲) نتیجه می گیریم که

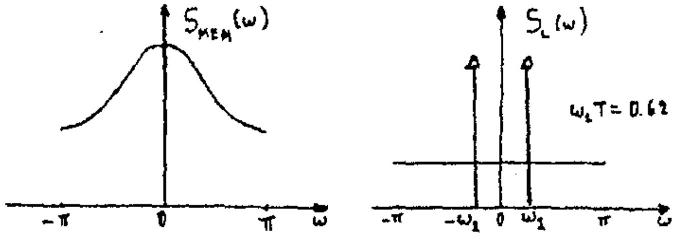
$$a_1^2 = 4.07 \qquad a_2^2 = -1 \qquad E_2(z) = 1 - 4.07z^{-1} + z^{-2}$$

$$E_2(z) = 1 - 4.07z^{-1} + z^{-2} \qquad z_{1,2} = e^{\pm j0.62}$$

با حل (۱۲-۹۱) داریم:

$$R_L[m] = 6.86\ \delta[m] + 3.07 \cos 0.62m$$

$$S_L(\omega) = 6.86 + \frac{2\pi}{T} \times 3.07\ [\delta(\omega - 0.62) + \delta(\omega + 0.62)]$$



۱۲-۲۰) الف)فرض کنید $z = e^{j\theta_1}$ معرف یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای لوینسون $P_n(z)$ باشد که دور دایره واحد واقع شده است. در این مورد

$$P_n\left(e^{j\theta_1}\right) = 0$$

و جایگزینی رابطه فوق در معادله بازگشتی (۱۲-۱۷۷) نتیجه می‌گیریم که

$$|s_n| = \left|\frac{P_{n-1}\left(e^{j\theta_1}\right)}{\tilde{P}_{n-1}\left(e^{j\theta_1}\right)}\right| = 1$$

بنابراین $s_n = e^{j\alpha}$ است. فرض کنید:

$$P_{n-1}\left(e^{j\theta}\right) = R(\theta)\, e^{j\psi(\theta)}$$

در جایی که $P_{n-1}(z)$ فاقد صفر در $|z| \leq 1$ باشد، داریم: $R(\theta) > 0, 0 < \theta < 2\pi$ و یکبار دیگر با جایگزینی این در (۱۲-۱۷۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - s_n^2}\, P_n\left(e^{j\theta}\right) &= R(\theta)\, e^{j\psi(\theta)} - e^{j(\theta+\alpha)}\, e^{j(n-1)\theta}\, R(\theta)\, e^{-j\psi(\theta)} \\ &= R(\theta)\left[e^{j\psi(\theta)} - e^{j(n\theta+\alpha)}\, e^{-j\psi(\theta)}\right] \\ &= 2j\, R(\theta)\, e^{j(n\theta+\alpha)/2}\, sin\left(\psi(\theta) - \frac{n\theta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

ناشی از طبیعت اکیدا هورویتزی $P_{n-1}(z)$ وقتی که θ از صفر تا 2π تغییر می‌کند، افزایش خالصی در فاز عبارت $\psi(\theta)$ وجود ندارد، و آرگومان عبارت سینوسی با $n\pi$ افزایش می‌یابد. در نتیجه $P_n\left(e^{j\theta}\right)$ حداقل در n نقطه مجزای $0 < \theta_i < 2\pi$، $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ صفر است. به هر صورت $P_n(z)$ چندجمله‌ای از درجه n و حداکثر دارای n صفر است. بنابراین همه صفرهای بالا ساده هستند وهمه روی دایره واحد واقعند.

ب) فرض کنید $P_n(z)$ و $P_{n-1}(z)$ دارای یک صفر مشترک در $z = z_0$ هستند. پس $|z_0| > 1$ است و از (۱۲–۱۳۷) نتیجه می‌گیریم:

$$z_0\, s_n\, \tilde{P}_{n-1}(z_0) = 0$$

که نتیجه می‌دهد $s_n = 0$ است و از آن‌جایی که $\widetilde{P}_{n-1}(z_0) \neq 0$ و ($\widetilde{P}_{n-1}(z_0)$ دارای همه صفرها در $|z| < 1$ هستند). بنابراین $s_n \neq 0$ این نتیجه را به دنبال دارد‌که $P_n(z)$ و $P_{n-1}(z)$ دارای هیچ صفر مشترکی نیستند.

۱۲-۲۱) با جایگزینی $|\rho| < 1$,$s_n = \rho^n$ در (۱۲–۱۷۷) نتیجه می‌گیریم :

$$\sqrt{1-\rho^{2n}}\, P_n(z) = P_{n-1}(z) - (z\rho)^n\, P^*_{n-1}(1/z^*)$$

فرض کنید $x = z\rho$ و

$$P_n(z) = P_n(x/\rho) \triangleq A_n(x)$$

بنابراین تکرار رابطه بالا کاهش می یابد به

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\rho^{2n}}\, A_n(x) &= A_{n-1}(x) - x^n\, A^*_{n-1}(1/x^*)\\ &= A_{n-1}(x) - x\, \tilde{A}_{n-1}(x)\end{aligned}$$

از مسئله (۱۲–۲۰) چندجمله‌ای $A_n(x)$ همه صفرها را در دایره واحد (وقتی $s_n = 1$) در بر دارد، به این معنی که $x_k = e^{j\theta_k} = z_k\, \rho$ است.

بنابراین صفرها $z_k = (1/\rho) e^{j\theta_k}$ یا $|z_k| = 1/\rho$ هستند. (صفرهای $P_n(z)$ بر روی شعاع دایره $1/\rho$ است).

۱۲-۲۲) چندجمله ای لوینسون $P_n(z)$ در معادله بازگشتی (۱۲–۱۷۷) صدق می‌کند. تعریف $|\lambda| = 1$,$s'_n = \lambda^n s_n$ و جانشین کردن s'_n به جای s_n و $P'_n(z)$ به جای $P_n(z)$ در (۱۲–۱۷۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}P'_n(z) &= P'_{n-1}(z) - z s'_n\, \tilde{P}'_{n-1}(z)\\ &= P'_{n-1}(z) - (z\lambda)^n\, s_n\, P'^*_{n-1}(z)\,(1/z^*)\end{aligned}$$

فرض کنید $y = z\lambda$ و تعریف $P'_n(y/\lambda) = A_n(y)$ را در نظر بگیرید. بنابراین معادله بازگشتی بالا به معادله زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} A_n(y) &= A_{n-1}(y) - y^n s_n A^*_{n-1}(1/y^*) \\ &= A_{n-1}(y) - y s_n A^*_{n-1}(y) \end{aligned}$$

و مقایسه با (۱۲-۱۷۷)، توجه داریم که $A_n(y) = P_n(y) = P_n(\lambda z)$ است. بنابراین $P_n(\lambda z)$ معرف مجموعه جدید چندجمله‌ای لوینسون است.

۱۲-۲۳) الف) در این مورد

$$S(\theta) = \left|H(e^{j\theta})\right|^2 = |1 - e^{j\theta}|^2 = 2 - e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2(1 - cos\theta)$$

به طوری که $\gamma_0 = 2, \gamma_1 = -1, \gamma_k = 0, |k| \geq 2$ است. با جایگذاری این مقادیر در (۹-۱۹۶) و گرفتن دترمینان ماتریس سه قطری T_n نتیجه می‌گیریم که

$$|\mathrm{T}_n| = \Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

که در آن $\Delta_0 = 2, \Delta_1 = 3$ است. فرض کنید:

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n z^n$$

بنابراین رابطه بالا نتیجه می دهد که

$$D(z) = \frac{2 - z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{(1 - z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2) z^n$$

بنابراین داریم:

$$\Delta_n = n + 2, \qquad n \geq 0.$$

استفاده از (۱۲-۱۹۲) و (۱۲-۱۹۶) داریم:

$$s_n = (-1)^{n-1} \frac{\Delta_n^{(1)}}{\Delta_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n + 1} = -\frac{1}{n + 1}, \quad k \geq 1.$$

ب) مجموعه جدید ضریب انعکاس $s'_k = -s_k$ تغییر می کند به چندجمله‌ای‌های لوینسون $P_n(z)$ و $Q(z)$ و بنابراین نتیجه می‌شود که آن‌ها مشابه تابع حقیقی- مثبت:

$$Z'(z) = \frac{2}{1 - z}$$

هستند که $\gamma'_0 = 2, \gamma'_k = 1, k \geq 1$ را نتیجه می‌دهد.

(۱-۱۳

$$\hat{\underset{\sim}{s}}(t-\frac{T}{2}) = a\,\underset{\sim}{s}(t) + b\,\underset{\sim}{s}(t-T)$$

$$\underset{\sim}{s}(t-\frac{T}{2}) - [a\,\underset{\sim}{s}(t) + b\,\underset{\sim}{s}(t-T)] \perp \underset{\sim}{s}(t),\ \underset{\sim}{s}(t-T)$$

$$R(T/2) = a\,R(0) + b\,R(T)$$

$$a = b = \frac{R(T/2)}{R(0)+R(T)} = \frac{e^{-1/2}}{1+e^{-1}}$$

$$R(T/2) = a\,R(T) + b\,R(0)$$

$$P = E\{[\underset{\sim}{s}(t-\frac{T}{2}) - \hat{\underset{\sim}{s}}(t-\frac{T}{2})]\underset{\sim}{s}(t-\frac{T}{2})\}$$

$$= R(0) - aR(T/2) - bR(T/2) = R(0) - \frac{R^2(T/2)}{R(0)+R(T)} = \frac{1}{1+e^{-1}}$$

(۲-۱۳

$$\int_0^T \underset{\sim}{s}(t)dt - [a\,\underset{\sim}{s}(0) + b\,\underset{\sim}{s}(T)] \perp \underset{\sim}{s}(0),\ \underset{\sim}{s}(T)$$

$$\int_0^T R(t)dt = aR(0) + bR(T) \qquad \int_0^T R(T-t)dt = aR(T) + bR(0)$$

دو انتگرال بالا برابرند، بنابراین:

$$a = b = \frac{\int_0^T R(t)dt}{R(0)+R(T)}$$

(۳-۱۳

$$\hat{\underset{\sim}{s}}'(t) = a\,\underset{\sim}{x}(t) + b\,\underset{\sim}{x}(t-\tau)$$

$$\underset{\sim}{s}'(t) - [a\,\underset{\sim}{x}(t) + b\,\underset{\sim}{x}(t-\tau)] \perp \underset{\sim}{x}(t),\ \underset{\sim}{x}(t-\tau)$$

$$R_{s'x}(0) = R_{s's}(0) = 0 \qquad R_{s'x}(0) = a\,R_{xx}(0) + b\,R_{xx}(\tau)$$

$$R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{\nu\nu}(\tau) \qquad R_{s'x}(\tau) = a\,R_{xx}(\tau) + b\,R_{xx}(0)$$

برای مقادیر کوچک τ.

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(0) + \tau^2 R''_{xx}(0)/2 \qquad R_{s'x}(\tau) = R_{s's}(\tau) = R'_{ss}(\tau) = \tau R''_{ss}(0)$$

بنابراین

$$\tau R''_{ss}(0) = a\,\tau^2\,R''_{xx}(0)/2 + O(\tau^3) \qquad a = -b + O(\tau^2)$$

۱۳-۴) کافی است نشان دهیم که برای هر m:

$$E\left\{\left[\underline{x}(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sigma t - n\pi)}{\sigma t - n\pi}\,\underline{x}(nT)\right]\underline{x}(mT)\right\} = 0$$

طرف چپ برابر است با

$$R(t - mT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sigma t - n\pi)}{\sigma t - n\pi}\,R(nT - mT)$$

از قضیه نمونه‌برداری (۱۰-۱۴۰) این نتیجه می‌شود که رابطه صفر برابرصفر است چون تبدیل فوریه است:

$$e^{-jmT}S(\omega)$$

$R(t - mT)$ برای $|\omega| > \delta$ صفر است.

۱۳-۵) اگر

$$\hat{E}\{\underline{x}(t+\lambda)\,|\,\underline{s}(t)\} = a\underline{s}(t) \qquad a = R(\lambda)/R(0)$$

از فرض نتیجه می‌شود که

$$\underline{s}(t+\lambda) - a\,\underline{s}(t) \perp \underline{s}(t-\tau)$$

بنابراین

$$R(\lambda+\tau) = \frac{R(\lambda)}{R(0)}\,R(\tau) \qquad (1)$$

تنها تابع پیوسته برای تشریح رابطه بالا کافی است. به راحتی می‌توان نشان داد که فرض کنیم که $R(\lambda)$ قابل مشتق‌گیری برای $\lambda > 0$ است. مشتق‌گیری از (i) نسبت به λ و جای‌گذاری $\lambda = 0^+$ نتیجه می‌گیریم که:

$$R'(\tau) + \alpha R(\tau) = 0 \qquad \alpha = -R'(0^+)/R(0) \qquad \tau > 0$$

بنابراین $R(\tau) = Ie^{-\alpha\tau}$ برای $\tau > 0$ نتیجه می‌شود.

۱۳-۶) تابع زیر داده شده است:

$$E\{\underline{y}_n\} = 0 \qquad \underline{x}_n = \underline{y}_1 + \cdots + \underline{y}_n = \underline{x}_{n-1} + \underline{y}_n$$

علاوه بر این متغیر تصادفی y_n مستقل است. بنابراین، y_n از $x_{n-1},\ldots,x_1$ مستقل است. از این مطلب نتیجه می‌شود که

$$E\{\underline{x}_n|\underline{x}_{n-1},\ldots,\underline{x}_1\} = E\{\underline{x}_{n-1} + \underline{y}_n|\underline{x}_{n-1},\ldots,\underline{x}_1\}$$

$$= E\{\underline{x}_{n-1}|\underline{x}_{n-1},\ldots,\underline{x}_1\} + E\{\underline{y}_n\} = \underline{x}_{n-1}$$

۱۳-۷) الف) با فرض

$$\hat{E}\{\underline{x}_n|\underline{x}_{n-1},\ldots,\underline{x}_1\} = \underline{x}_{n-1},$$

آن‌گاه

$$= \underline{x}_n - \underline{x}_{n-1}, \perp \underline{x}_{n-1},\ldots,\underline{x}_1$$

بنابراین نتیجه می‌شود که متغیر تصادفی $y_n = x_n - x_{n-1}$ متعامد است و

$$\underline{x}_n = \underline{y}_n + \underline{x}_{n-1} = \underline{y}_n + \underline{y}_{n-1} + \cdots + \underline{y}_1 \qquad (i)$$

از طرفی، اگر (i) صحیح باشد و متغیر تصادفی y_n متعامد باشد، آن‌گاه

$$\underline{x}_n - \underline{x}_{n-1} = \underline{y}_n \perp \underline{x}_{n-1},\ldots,\underline{x}_1$$

ب)

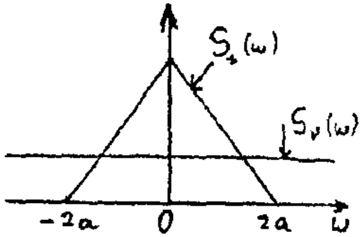
$$E\{\underline{x}_n^2\} = E\{[(\underline{x}_n - \underline{x}_{n-1}) + \underline{x}_{n-1}]^2\}$$

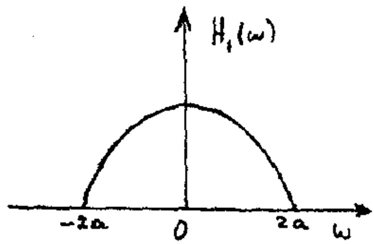
$$= E\{(\underline{x}_n - \underline{x}_{n-1})^2\} + E\{\underline{x}_{n-1}^2\} \geq E\{\underline{x}_{n-1}^2\}$$

۱۳-۸) تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$R_s(\tau) = A\,\frac{\sin^2 a\tau}{\tau^2}$$

تبدیل فوریه آن $S_s(\omega)$ به صورتی که در شکل نشان داده شده است مثلث است.





و اگر $S_\nu(\omega) = N$، (۱۳-۱۶) نتیجه می‌شودکه

$$H_1(\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_\nu(\omega)} = \frac{Aa\pi(1 - |\omega|/2a)}{Aa\pi(1 - |\omega|/2a) + N}$$

بعدا نشان می‌دهیم که

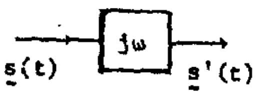
$$H_2(\omega) = j\omega H_1(\omega)$$

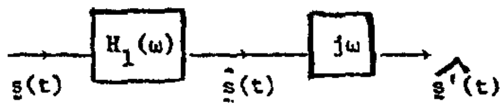
اثبات

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(t) = \underset{\sim}{s}(t) \quad \hat{\underset{\sim}{s}}'(t) \perp \underset{\sim}{x}(\xi) \quad \text{all } t,\xi. \quad \text{Hence } R_{\varepsilon x}(\tau) = 0.$$

این نتیجه می‌دهد که [(۹-۱۳۱۹ را ببینید]

$$R_{\varepsilon' x}(\tau) = R'_{\varepsilon x}(\tau) = 0, \text{ hence } \underset{\sim}{s}'(t) - \hat{\underset{\sim}{s}}'(t) \perp \underset{\sim}{x}(\xi)$$





به عبارت دیگر تخمین از $s'(t)$ برابر با مشتق از تخمین $\hat{s}(t)$ از $s(t)$ است. این از مسئله ۱۳-۹ با $T(\omega) = j\omega$ نتیجه می‌شود.

۱۳-۹) می خواهیم نشان دهیم که تخمین‌گر

$$\underline{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\alpha)\underline{s}(\alpha)d\alpha \qquad p(t) \leftrightarrow T(\omega)$$

برابر است با

$$\hat{\underline{y}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\alpha)\hat{\underline{s}}(\alpha)d\alpha$$

وقتی که $\hat{s}(t)$ تخمین گر $s(t)$ است.

اثبات: واضح است که

$$E\{[\underline{s}(t) - \hat{\underline{s}}(t)]\underline{x}(\xi)\} = 0 \qquad \text{all } t,\xi$$

بنابراین

$$E\{[\underline{y}(t) - \hat{\underline{y}}(t)]\underline{x}(\xi)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\alpha)E\{[\underline{s}(\alpha) - \hat{\underline{s}}(\alpha)]\underline{x}(\xi)\}d\alpha = 0$$

۱۳–۱۰) [(۱۳–۴۶) را ببینید]

الف)

$$S(s) = \frac{1}{s^4+1} = \frac{1}{(s^2+\sqrt{2}\,s+1)(s^2-\sqrt{2}\,s+1)}$$

ب)

$$L(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \qquad l(t) = \frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t U(t) \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ج)

$$h_i(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\lambda} e^{-\alpha t} \sin\beta(t+\lambda)U(t)$$

$$H_i(s) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\lambda} \frac{(s+\alpha)\sin\beta\lambda + \beta\cos\beta\lambda}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$b_0 = e^{-\alpha\lambda}(\cos\beta\lambda + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\lambda)$$

$$H(s) = \frac{H_i(s)}{L(s)} = b_0 + b_1 s$$

$$b_1 = \frac{\sin\beta\lambda}{\beta} e^{-\alpha\lambda}$$

۱۳-۱۱) الف) معادله داده شده معادله وینر- هوف است (۱۳-۴۰) برای مسئله پیش‌بینی با فرض $\lambda = \ln 2$ از روش توصیفی بعد از (۱۳-۴۶) استفاده می‌کنیم:

$$S(s) = \frac{3}{1-s^2} + \frac{22}{9-s^2} = \frac{49-25s^2}{(1-s^2)(9-s^2)}$$

$$L(s) = \frac{7+5s}{(1+s)(3+s)} \qquad \ell(t) = (e^{-t}+4e^{-3t})U(t)$$

$$h_i(t) = (e^{-\ln 2}e^{-t} + 4e^{-3\ln 2}e^{-3t})U(t)$$

$$H_i(s) = \frac{1/2}{1+s} + \frac{4/8}{3+s} = \frac{2+s}{(1+s)(3+s)} \qquad H(s) = \frac{2+s}{7+5s}$$

ب)

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad \frac{N(s)-2^s D(s)}{D(s)} L(s)L(-s) = Y(s)$$

وقتی $Y(s)$ برای $\mathrm{Re}\, s < 0$ تحلیلی است، همه ریشه‌های $D(s)$ باید با صفرهای $L(s)$ حذف شوند، بنابراین $D(s) = 7+5s$ است. به طور مشابه قطب‌های $s=-1$ و $s=-3$ از $L(s)$ باید با صفرهای عبارت $N(s)-2^s D(s)$ حذف شوند. با فرض $N(s) = As+B$ نتیجه می‌شود که

$$N(-1) - 2^{-1}D(-1) = -A+B-2^{-1}(7-5) = 0 \qquad A = 1$$

$$N(-3) - 2^{-3}D(-3) = -3A+B-2^{-3}(7-15) = 0 \qquad B = 2$$

$$H(s) = \frac{2+s}{7+5s}$$

ج) تبدیل لاپلاس از تابع $R(\tau)$ در (الف) برابر است با

$$\frac{49-25s^2}{9-10s^2+s^4}$$

بنابراین (قضیه کانولوشن) تبدیل معکوس $y(t)$ از $Y(s)$ برابر است با

$$y(t) = \int_0^\infty h(\alpha)R(t-\alpha)d\alpha - R(t+\ \ln 2)$$

از تحلیل بودن $Y(s)$ برای $\operatorname{Re} s < 0$ نتیجه می‌شود که $y(t) = 0$ برای $t > 0$ است. بنابراین (ب) روش مستقیم برای حل معادله وینر- هوف (۱۳-۴۰) را ارائه می‌دهد.

۱۳-۱۲) الف) معادله داده شده با معادله (۱۳-۲۲) با فرض $r = 1$ یکسان است. بنابراین می‌توانیم از روش (۱۳-۳۱)- (۱۳-۳۳) استفاده کنیم:

$$S(z) = \frac{3}{5-2w} + \frac{8}{10-3w} = \frac{70-25w}{(5-2w)(10-3w)} \qquad w = z + \frac{1}{z}$$

$$a = \sqrt{30} + \sqrt{5} \simeq 7.75$$

$$L(z) = \frac{a - bz^{-1}}{(2-z^{-1})(3-z^{-1})}$$

$$b = \sqrt{30} - \sqrt{5} \simeq 3.25$$

$$l[0] = \frac{a}{6} \simeq 1.3 \qquad H(z) = 1 - \frac{l[0]}{L(z)} \simeq \frac{0.41\,z^{-1} - 0.167\,z^{-2}}{1-0.42z^{-1}}$$

ب)

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad \frac{N(z) - zD(z)}{D(z)}\,L(z)L(z^{-1}) = Y(z)$$

چون $Y(z)$ برای $|z| < 1$ تحلیلی است همه ریشه‌های $D(z)$ بایستی با صفرهای $L(z)$ حذف شوند. بنابراین، $D(z) = 1 - 0.42z^{-1}$ است. به طور مشابه قطب‌های $z = 1/2$ و $z = 1/3$ از $L(z)$ بایستی با صفرهای جمله $N(z) - zD(z)$ حذف شوند. با فرض $N(z) = A + B\,z^{-1}$ نتیجه می‌گیریم که

$$N(\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} D(\tfrac{1}{2}) = A + 2B - 0.08 = 0 \qquad A = 0.42$$

$$N(\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{3} D(\tfrac{1}{3}) = A + 3B + 0.09 = 0 \qquad B = -0.17$$

$$H(z) = \frac{0.42 - 0.17z^{-1}}{1 - 0.42z^{-1}}$$

تبدیل z از دنباله R_m در (الف) برابر است با

$$\frac{70 - 25w}{6w^2 - 35w + 50} \qquad w = z + z^{-1}$$

بنابراین، تبدیل معکوس y_n از $Y(z)$ برابر است با

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} h_k R_{n-k} - R_{n+1}$$

ازتحلیلی بودن $Y(z)$ برای $|z| < 1$ این نتیجه می‌شود که $y_n = 0$ برای $n \geq 0$ است. بنابراین، (ب) روش مستقیم برای حل (۱۳-۲۲) را نتیجه می‌دهد.

۱۳-۱۳) پیش‌بینی کننده تابع پایداری از $H(z)$ می‌باشد که در ∞ ناپدید می‌شود. چون $H(z) \to 0$ با $z \to \infty$ نتیجه می‌گیریم که $E_N(z) = 1 - H(z) \to 1$ و $E_N(z)H_a(z) \to 1$ وقتی $z \to \infty$. از این و (۱۳-۲۵) نتیجه می‌شود که تفاضل $1 - E_N(z)H_a(z)$ پیش‌بین است و خطای میانگین مربع برابر است با

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |E_N(e^{j\omega})|^2 S(\omega)d\omega = P$$

چون

$$|A_a(e^{j\omega})| = 1$$

۱۴-۱۳) همان گونه که می دانیم

$$\underline{s}[n] = a_1\underline{s}[n-1] + \cdots + a_m\underline{s}[n-m] + \underline{\varepsilon}[n]$$

در جایی که $\varepsilon[n]$ یک نویز سفید است، آن‌گاه پیش‌بین یک – مرحله‌ای از $s[n]$ برابر است با

$$\hat{\underline{s}}_1[n] = a_1\underline{s}[n-1] + \cdots + a_m\underline{s}[n-m]$$

امیدواریم که نشان دهیم که مجموع

$$\hat{s}_2[n] = a_1\hat{s}_1[n-1] + a_2 s[n-2] + \cdots + a_m s[n-m]$$

یک پیش‌بین دو- مرحله‌ای است. کافی است که نشان دهیم:

$$s[n] - \hat{s}_2[n] \perp s[n-k] \qquad k \geq 2$$

اثبات

$$s[n] - \hat{s}_2[n] = a_1\left(s_1[n-1] - \hat{s}_1[n-1]\right) + \varepsilon[n]$$

این اثبات را کامل می‌کند چون

$$s_1[n-1] - \hat{s}_1[n-1] \perp s(n-k), \quad k \geq 2 \text{ and } \varepsilon[n] \perp s[n-k] \quad k \geq 1.$$

۱۳-۱۵) خطای تخمین میانگین مربع مرتبه N، P_N برابر است با [(۱۳-۶۶) را ببینید]:

$$P_N = \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N}$$

این به تخمین خطای میانگین مربع در (۱۳-۳۴) میل می کند. بنابراین

$$\lim_{N\to\infty} \ln P_N = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma} \ln S(\omega)d\omega = \lim_{N\to\infty} \ln \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N}$$

برای تکمیل اثبات ها، از (۱۴-۱۲۹) استفاده می کنیم:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \ln \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \lim_{N\to\infty} \ln \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N}$$

و نتایج به دست می‌آید چون

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (\ln \Delta_{n+1} - \ln \Delta_n) = \frac{\ln\Delta_{N+1}}{N} - \frac{\ln\Delta_1}{N}$$

و آخرین جمله به سمت صفر میل می کند همان گونه که $N \to \infty$.

۱۳-۱۶)

$$P_0 = R[0] = 15 \qquad R[1] = 10 \qquad R[2] = 5 \qquad R[3] = 0$$

از لگوریتم لوینسون استفاده می کنیم [(۱۳-۶۷) را ببینید]:

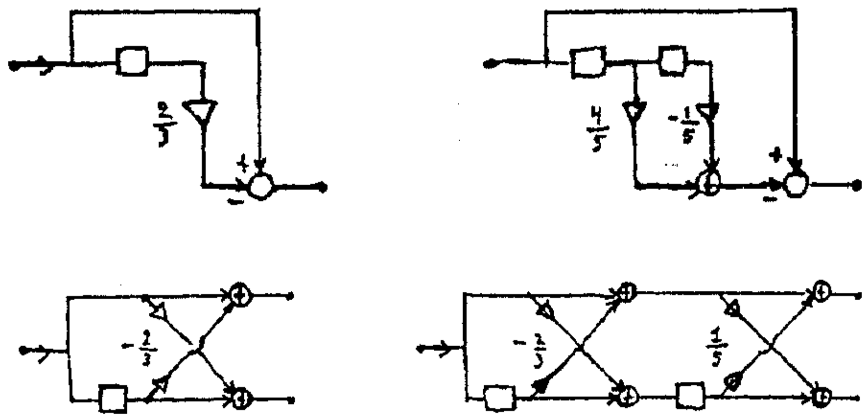
$P_0K_1 = R[1] \qquad K_1 = a_1^1 = \frac{2}{3} \qquad P_1 = (1-k_1^2)P_0 = \frac{25}{3}$

$P_1K_2 = R[2] - R[1]a_1^1 = -\frac{5}{3} \qquad K_2 = -\frac{1}{5}$

$a_1^2 = a_1^1 - K_2a_1^1 = \frac{4}{5} \qquad a_2^2 = -\frac{1}{5} \qquad P_2 = 8$

$P_2K_3 = R[3] - R[2]a_1^2 - R[1]a_2^2 \qquad K_3 = -\frac{1}{4}$

$a_1^3 = \frac{3}{4} \qquad a_2^3 = 0 \qquad a_3^3 = -\frac{1}{4} \qquad P_3 = 7.5$



(۱۷-۱۳

$P_0 = R[0] = 5 \qquad K_1 = 0.4 \qquad K_2 = 0.6 \qquad K_3 = 0.8$

$R[1] = P_0K_1 = 2 \qquad a_1^1 = 0.4 \qquad P_1 = 4.2$

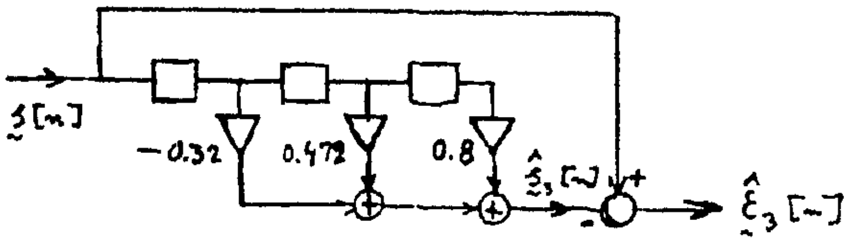
$$R[2] = R[1]a_1^1 + P_1K_2 = 3.32$$

$$a_1^2 = 0.16 \qquad a_2^2 = 0.6 \qquad P_2 = 2.688$$

$$R[3] = R[2]a_1^2 + R[1]a_2^2 + P_2K_3 = 3.8816$$

$$a_1^3 = a_1^2 - K_3a_2^2 = -0.32 \qquad a_2^3 = a_2^2 - K_3a_1^2 = 0.472 \qquad a_3^3 = 0.8$$

$$a_3^3 = 0.8 \qquad P_3 = 0.968$$



۱۳-۱۸)

$$S_x(s) = \frac{4\lambda}{-s^2 + 4\lambda^2} + N = \frac{N(-s^2 + c^2)}{-s^2 + 4\lambda^2}$$

$$\Gamma_x(s) = \frac{s + 2\lambda}{\sqrt{N}\,(s + c)} \qquad c = 2\lambda\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda N}}$$

و (۱۳-۱۰۴) نتیجه می‌شود:

$$H_x(s) = \frac{c - 2\lambda}{s + c} \qquad h_x(t) = (c - 2\lambda)e^{-ct}U(t)$$

۱۳-۱۹) الف)

$$\hat{\varepsilon}_{N+m}[n+m] \perp \underline{s}[n-k] \qquad k=-m+1,\ldots,0,\ldots,N$$

$$\hat{\varepsilon}_N[n] = \underline{s}[n] - a_1\underline{s}[n-1] - \cdots - a_N\underline{s}[n-N]$$

ب)

$$\check{\underline{\varepsilon}}_{N+m}[n-m] \perp \underline{s}[n+k] \qquad k=-m+1,\ldots,0,\ldots,N$$

$$\check{\varepsilon}_N[n] = \underline{s}[n] - a_1\underline{s}[n+1] - \cdots - a_N\underline{s}[n+N]$$

ج)

$$\check{\underline{\varepsilon}}_{N+m}[n-N-m] \perp \underline{s}[n+k] \qquad k=-N-m+1,\ldots,-N,\ldots,0$$

$$\hat{\underline{\varepsilon}}_N[n] = \underline{s}[n] - a_1\underline{s}[n-1] - \cdots - a_N\underline{s}[n-N]$$

(۲۰-۱۳

$$S_s(\omega) = \frac{2}{\omega^2+0.04} \qquad S_x(\omega) = \frac{5\omega^2+2.2}{\omega^2+0.04} \quad L_x(s) = \sqrt{5}\,\frac{s+0.66}{s+0.2}$$

الف) از (۱۳-۱۶) داریم:

$$H(\omega) = \frac{2}{5\omega^2+2.2}$$

ب) از (۱۳-۱۰۴) داریم:

$$H_x(s) = 1 - \sqrt{5}\,\Gamma_x(s) = \frac{0.46}{s+0.66}$$

ج) با استفاده از (۱۳-۴۸) می‌توان نوشت:

$$L_s(s) = \frac{\sqrt{2}}{s+0.2} \qquad \ell(t) = \sqrt{2}\, e^{-0.2t}\, U(t)$$

$$h_i(t) = \sqrt{2}\, e^{-0.2(t+2)} U(t) \qquad H_i(s) = \frac{\sqrt{2}\, e^{-0.4}}{s+0.2}$$

$$H(s) = e^{-0.4} \qquad \hat{s}(t+2) = e^{-0.4} s(t)$$

د) [(۱۳-۹۹) و روابط وابسته به آن را ببینید]:

$$S_{sx}(s) = \frac{1}{0.04 - s^2} \qquad \Gamma_x(s) = \frac{s+0.2}{\sqrt{5}(s+0.66)} \qquad S_{si_x}(s) = \sqrt{20}\, \frac{0.66-s}{s+0.2}$$

$$R_{si_x}(\tau) = \sqrt{20} \left[\delta(\tau) + \frac{0.86}{s+0.2}\right] \qquad h_{i_x}(\tau) = 0.86\sqrt{20}\, e^{-0.2(t+2)} U(t)$$

$$H_{i_x}(s) = \frac{0.86\ 20\ e^{-0.4}}{s+0.2} \qquad H_x(s) = \frac{1.72\, e^{-0.4}}{s+0.66}$$

۱۳-۲۱) همانند مثال ۱۳-۲ و با فرض $N_0 = 1.8\,, N = 5\,, a = 0.8$ می‌توان نوشت:

$$S_s(z) = \frac{1.8}{(1-0.8\, z^{-1})(1-0.8z)} \qquad L_s(z) = \frac{\sqrt{1.8}}{1-0.8\, z^{-1}}$$

$$S_x(z) = \frac{8(1-0.5\, z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8\, z^{-1})(1-0.8z)} \qquad L_x(z) = \frac{\sqrt{8}(1-0.5\, z^{-1}}{1-0.8\, z^{-1}}$$

الف)

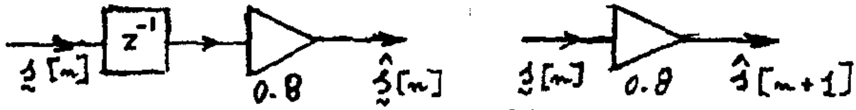
$$H(z) = \frac{9}{40(1-0.52\, z^{-1})(1-0.5z)} \qquad h[n] = 2 \times 2^{-|n|}$$

ب) از (۱۳-۱۱۴) با فرض $l_x[0] = \sqrt{8}$ داریم:

$$H_x(z) = \frac{3/8}{1-0.5\, z^{-1}} \qquad h_x[n] = \frac{3}{8} \times 0.5\ U[n]$$

ج) از (۱۳-۳۳) با فرض $l[0] = \sqrt{1.8}$ داریم:

$$H(z) = 1 - \frac{\ell[0]}{L_s(z)} = 0.8\, z^{-1}$$



د) طیف قدرت تخمین‌گر $\hat{s}_0[n]$ از $s[n]$ گرفته شده از (ب) برابر است با

$$S_{\hat{s}_0}(z) = S_x(z)H_x(z)H_x(z^{-1}) = \frac{9/8}{(1-0.8\, z^{-1})(1-0.8\, z)}$$

بنابراین

$$L_{\hat{s}_0}(z) = \frac{\sqrt{9/8}}{1-0.8\, z^{-1}}$$

بنابراین، تخمین‌گر خالص از $\hat{s}_0[n]$ برابر است با [(۱۳-۳۳)]:

$$\hat{H}^1(z) = 1 - \frac{\ell[0]}{L(z)} = 0.8\, z^{-1}$$

و (۱۳-۱۱۷) نتیجه می‌دهد:

$$H_x^1(z) = H_x^0(z)\hat{H}_1(z) = \frac{0.3\, z^{-1}}{1-0.5\, z^{-1}}$$

۱۳-۲۲)

$$R_s[m] = 5 \times 0.8^{|m|} \longleftrightarrow \frac{1.8}{(1-0.8\, z^{-1})(1-0.8\, z)}$$

بنابراین همانند (۱۳-۱۳۵) با فرض $N_n = 5$ ، $V_n = 1.8$. و (۱۳-۱۴۸) نتیجه می‌شود:

$$F_n = 0.64\, F_{n-1} + V_n\, G_{n-1} \qquad F_0 = V_0 N_0 = 9$$

$$5\, G_n = 0.64\, F_{n-1} + 6.5\, G_{n-1} \qquad G_0 = V_0 + N_0 = 6.8$$

با حل آن به دست می‌آوریم:

$$F_n = 12(1.6)^n - 3(0.4)^n \qquad G_n = 6.4(1.6)^n + 0.4(0.4)^n$$

$$P_n = \frac{F_n}{G_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{12}{6.4} = 1.875$$

این موافق با قسمت ج مسئله ۱۳-۲۱ است چون میانگین مربع خطای صافی وینر برابر است با

$$P = R_s(0) - \sum_{k=0}^{\infty} R_s[k]h_x[k] = 5 - \sum_{k=0}^{\infty} 5 \times 0.8^m \times \frac{3}{8} \times 0.5^m = 1.875$$

۱۳-۲۳)

$$R_s(\tau) = 5\, e^{-0.2|\tau|} \qquad R\ (\tau) = \frac{10}{3}\, \delta(\tau)$$

$$S_s(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 0.2^2} \qquad A(t) = 0.2 \qquad V(t) = 2 \qquad N(t) = \frac{10}{3}$$

از (۱۳-۱۵۹) داریم:

$$F'(t) = 0.2\ F(t) + 2G(t) \qquad G'(t) = 0.3\ F(t) + 0.2G(t)$$

حالت ۱: اگر $s(0) = 0$ باشد، آن‌گاه $P(0) = F(0) = 0, G(0) = 1$ خواهد بود، با حل آن داریم:

$$P(t) = \frac{F(t)}{G(t)} = \frac{1.25\ e^{0.8t} - 1.25\ e^{-0.8t}}{0.625\ e^{0.8t} + 0.375\ e^{-0.8t}}$$

حالت ۲: اگر $s(t)$ ایستا باشد، آن‌گاه $F(0) = P(0) = R_s(0) = 5$:

$$P(t) = \frac{F(t)}{G(t)} = \frac{5\ e^{0.8t} + 3\ e^{-0.8t}}{2.5\ e^{0.8t} - 0.9\ e^{-0.8t}}$$

۱۳-۲۴) دنباله‌های $\hat{q}_N[n]$ و $\check{q}_N[n]$ به ترتیب عبارتند از صافی‌های

$$\hat{E}_N(z) = 1 - \sum_{k=1}^{N} a_k^N z^{-k} \qquad \check{E}_N(z) = z^{-N}\hat{E}_N(1/z)$$

با ورودی $R[m]$ (شکل ۱۳-۱۱ الف). بنابراین

$$\hat{q}_N[m] = R[m] - \sum_{k=1}^{N} R[m-k]a_k^N$$

$$\check{q}_N[m] = \hat{q}_N[N-m] = R[m-N] - \sum_{k=1}^{N} R[m-N+k]a_k^N$$

از این رابطه و از معادله یول- واکر (۱۳-۶۵) نتیجه می‌شود که

$$\hat{q}_N[m] = \check{q}_N[N-m] = 0 \text{ for } 1 \le m \le N-1$$

$$\hat{q}_N[0] = \check{q}_N[N] = P_N$$

این اثبات را کامل می‌کند.

۱۴-۱) کافی است که نشان دهیم که [(۱۴-۴۱) را ببینید]:

$$H(A \cdot B|B_j) = H(A|B_j)$$

بنابراین

$$A_iB_kB_j = \begin{cases} A_iB_j & k = j \\ \{\emptyset\} & k \neq j \end{cases} \qquad \text{and } P(A_iB_j|B_j) = P(A_i|B_j)$$

و (۱۴-۴۰) نتیجه می‌دهد:

$$H(A \cdot B|B_j) = -\sum_{i,k} P(A_iB_k|B_j) \log P(A_iB_k|B_j)$$

$$= -\sum_i P(A_i|B_j) \log P(A_i|B_j) = H(A|B_j)$$

۱۴-۲) اگر $\alpha < \beta$ باشد آن‌گاه $\phi'(\alpha) > \phi'(\beta)$ است چون

$$\phi'(\alpha) - \phi'(\beta) = \log(\beta/\alpha) > 0.$$

بنابراین

$$\int_a^b \phi'(\alpha)d\alpha > \int_{a+c}^{b+c} \phi'(\alpha)d\alpha \qquad c > 0$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\phi(p_1+p_2) - \phi(p_1) = \int_{p_1}^{p_1+p_2} \phi'(\alpha)d\alpha < \int_0^{p_2} \phi'(\alpha)d\alpha = \phi(p_2)$$

به طور مشابه

$$\phi(p_1+\varepsilon)-\phi(p_1)-\phi(p_2)+\phi(p_2-\varepsilon)$$
$$=\int_{p_1}^{p_1+\varepsilon}\phi'(\alpha)d\alpha-\int_{p_2-\varepsilon}^{p_2}\phi'(\alpha)d\alpha>0$$

۱۴-۳) با اعمال تعریف

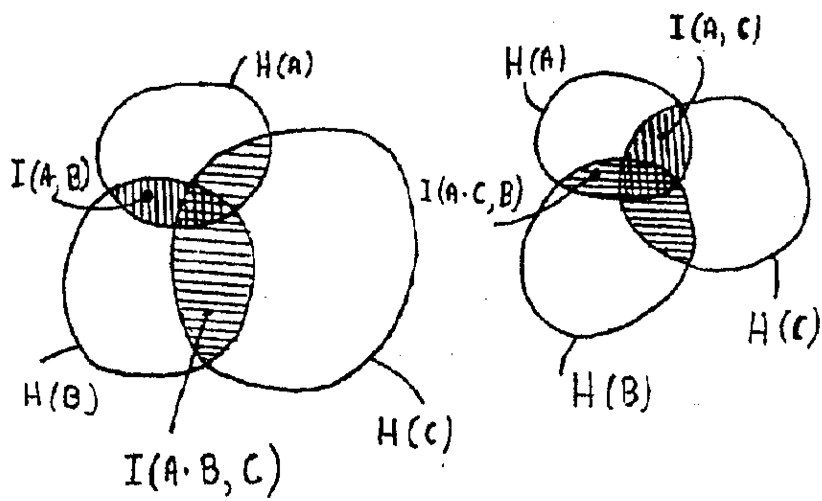
$$H(A_1\cdot A_2)=H(A_1)+H(A_2|A_1) \qquad (i)$$

با تفکیک $A_1=A,A_2=B.C$ و $A_1=A.B,A_2=C$ خط اول رانتیجه می‌گیریم. خط دوم نیز از اولی نتیجه می‌شود [(i) را ببینید]. خط سوم دنباله دو خط اول است.

۱۴-۴) این از اعمال تعریف نتیجه می‌شود:

$$I(A_1,A_2)=H(A_1)+H(A_2)-H(A_1\cdot A_2)$$

با تفکیک کردن $A_1=A.B,A_2=C$.



۱۴-۵) الف) از (۱۴-۵۳) داریم:

$$I(A,B \cdot C) = H(A) + H(B \cdot C) - H(A \cdot B \cdot C)$$

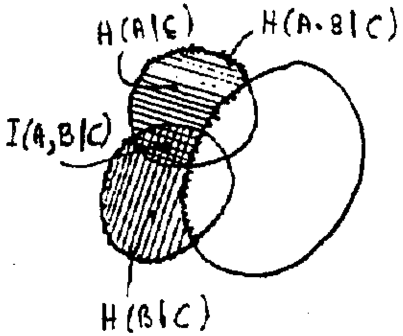
$$I(A,C) = H(A) + H(C) - H(A \cdot C)$$

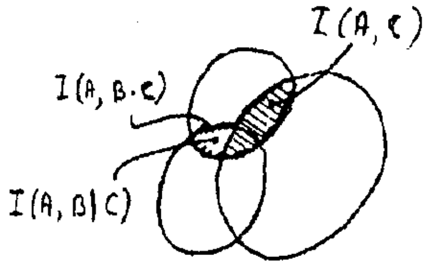
و بنابراین (مسئله ۱۴-۴ را ببینید):

$$H(A \cdot B \cdot C) - H(A \cdot C) = H(A \cdot B|C) - H(A|C)$$

با کمک (۱۴-۴۹) نتیجه می گیریم که

$$I(A,B \cdot C) - I(A \cdot C) = H(B|C) + H(A|C) - H(A \cdot B|C)$$





ب) اگر $B.C$ مشاهده شده باشد، آن‌گاه نتیجه پیش‌بینی نامعین از A برابر با $I(A,B.C)$ است. اما اگر $B.C$ مشاهده باشد، آن‌گاه C نیز مشاهده شده است.، بنابراین، کاهش نامعینی از A حداقل $I(A,C)$ است. بنابراین

$$I(A,B \cdot C) \geq I(A,C)$$

تساوی تنها اگر $I(A,B|C)=0$ باشد برقرار است، به این معنی که زیرمجموعه‌های دنباله‌ها در هر C دقیق هستند.، آگاهی از رخداد B هیچ اطلاعی در مورد A نمی‌دهد.

۱۴-۶) تفکیک $H(A^3)$ دارای هشت عضو به ترتیب با احتمال‌های زیر است:

$$p^3, p^2q, p^2q, p^2q, pq^2, pq^2, pq^2, q^3$$

بنابراین

$$H(A^3) = -p^3\log p^3 - 3p^2q\log p^2q - 3pq^2\log pq^2 - q^3\log q^3$$
$$= -3p(p^2+2pq+q^2)\log p - 3q(p^2+2pq+q^2)\log q$$
$$= -3p\log p - 3q\log q = 3H(A)$$

۱۴-۷) چگالی متغیر تصادفی $w = x + a$ برابر با $f_x(w-a)$ است. بنابراین

$$H(\underset{\sim}{x}+a) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_x(w-a)\log f_x(w-\alpha)\,dw$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\log f_x(x)\,dx = H(\underset{\sim}{x})$$

چگالی مشترک متغیرهای تصادفی x و $z = x + y$ برابر با $f_{xy}(x, z-x)$ است. بنابراین [(۱۴-۹۰) را ببینید]:

$$H(\underset{\sim}{z}|\underset{\sim}{x}) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,z-x)\log f_{xy}(x,z-x)/f_x(x)\,dx\,dz$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\log f_{xy}(x,y)/f_x(x)\,dx\,dy = H(\underset{\sim}{y}|\underset{\sim}{x})$$

۱۴-۸) متغیرهای تصادفی x و y به ترتیب مقادیر x_i و y_j را می‌گیرند، آن‌گاه $z = x_i + y_j$ اگر و فقط اگر $x = x_i$ و $y = y_j$ (فرض ۹ باشد. بنابراین

$$\{\underset{\sim}{z} = x_i + y_j\} = \{\underset{\sim}{x} = x_i\}\cap\{\underset{\sim}{y} = y_j\}$$

این نشان می‌دهد که $A_z = A_x . B_y$. علاوه بر این وقتی متغیرهای تصادفی x و y مستقل هستند. پیشامدهای $\{x = x_i\}$ و $\{y = y_j\}$ مستقل هستند. این نشان می‌دهد که اجزای A_x و B_y مستقل هستند و [(۱۴-۴۴) و مسئله ۱۴-۱ را ببینید]:

$$H(A_z|A_x) = H(A_x \cdot A_y|A_x) = H(A_y|A_x) = H(A_y)$$

از این مطلب نتیجه می‌شود که $H(z|x) = H(y)$ چون [(۱۴-۸۸) و (۱۴-۴۱) را ببینید]:

$$H(\underline{z}|\underline{x}) = H(A_z|A_x)$$

۱۴-۹) همان‌گونه که از (۱۴-۸۰) می‌دانیم $H(x) = \ln a$ وقتی که فرض کنیم $a = N\delta$ است. متغیر تصادفی y مقادیر $0, \delta, \ldots, (N-1)\delta$ با احتمال $1/N$ را می گیرد. چگالی شرطی از x ؛ $y = k\delta$ در فاصله $(k\delta, k\delta+\delta)$ فرض شده است. بنابراین

$$H(\underline{x}|\underline{y} = k\delta) = -\int_{k\delta}^{k\delta+\delta} f(x|\underline{y} = k\delta) \ln f(x|\underline{y} = k\delta)\,dx = \ln \delta$$

و همانند (۱۴-۴۱):

$$H(\underline{x}|\underline{y}) = \sum_{k=0}^{N} H(\underline{x}|\underline{y} = k\delta) P\{\underline{y} = k\delta\} = \ln \delta$$

سرانجام [(۱۴-۹۵) را ببینید]:

$$I(\underline{x},\underline{y}) = H(\underline{x}) - H(\underline{x}|\underline{y}) = \ln a - \ln \delta$$

۱۴-۱۰) اگر $y_i = g(x_i), y_j = g(x_j)$ و $y_i = y_j$ باشد آن‌گاه $x_i = x_j$. بنابراین:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad p_i = P\{\underline{x} = x_i\}$$

و

$$H(\underline{x},\underline{y}) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij} = -\sum_{i} p_i \log p_i = H(\underline{x})$$

۱۴-۱۱) از مسئله ۱۰-۱۰ با فرض $g(x) = x$ نتیجه می‌شود که $H(x,x) = H(x)$. و از آن جایی که [(۱۴-۱۰۳) را ببینید] $H(x,x) = H(x|x) + H(x)$ نتیجه می‌گیریم که $H(x|x) = 0$. از مسئله ۱۴-۳ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} H(\underline{y},\underline{x}|\underline{x}) &= H(A_y \cdot A_x|A_x) = H(A_x \cdot A_x) + H(A_y|A_x \cdot A_x) \\ &= H(A_y|A_x) = H(\underline{y}|\underline{x}) \end{aligned}$$

چون $A_x \bullet A_x = A_x$ و $H(A_x \bullet A_x) = H(x,x) = 0$.

۱۴-۱۲)

$$E\{\underset{\sim}{x}_n\} = 0 \qquad E\{\underset{\sim}{x}_n^2\} = 5 \qquad E\{\underset{\sim}{y}_n\} = 0$$

$$E\{\underset{\sim}{y}_n^2\} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k}\, E\{\underset{\sim}{x}_{n-k}^2\} = \frac{20}{3} \qquad E\{\underset{\sim}{x}_n\underset{\sim}{y}_n\} = E\{\underset{\sim}{x}_n^2\} = 5$$

الف) از (۱۴-۹۵)، (۱۴-۸۴) و (۱۵-۸۴) با فرض $\mu_{11} = 5\,, \mu_{22} = 20/3$ و $\mu_{12} = 5$:

$$H(\underset{\sim}{x}) = \ln\sqrt{10\pi e} \qquad H(\underset{\sim}{y}) = \ln\sqrt{40\pi e/3} \qquad H(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = \ln 10\pi e/\sqrt{3}$$

$$I(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = \ln 2$$

ب) فرایند $y(t)$ خروجی سیستم زیر با ورودی x_n است.

$$L(z) = \frac{1}{1-0.5\,z^{-1}} \qquad \ell_0 = 1$$

از آن‌جایی که $\overline{H}(x) = H(x)$ و [(۱۲-۱ الف) را ببینید]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|L(e^{j\phi})|\,d\phi = \ln\ell_0 = 0$$

(۱۴-۱۲۳) نتیجه می‌شود:

$$\overline{H}(\underset{\sim}{y}) = \overline{H}(\underset{\sim}{x}) = H(\underset{\sim}{x}) = \ln\sqrt{10\pi e}.$$

(۱۴-۱۳

$$\overline{H}(\underset{\sim}{x}) = H(\underset{\sim}{x}) = -\frac{1}{2}\int_{4}^{6} \ln\frac{1}{2}\,dx = \ln 2$$

و همانند مسئله ۱۴-۱۲ با فرض $l_0 = 5$ داریم:

$$\overline{H}(\underset{\sim}{y}) = \overline{H}(x) + \ln 5 = \ln 10$$

۱۴-۱۴) $f_x = 0$ برای $|x| > 0$ و $E\{x\} = 0.3$ داده شده است $f(x)$ را پیدا کنید. با فرض $g(x) = x$، (۱۴-۱۴۳) نتیجه می‌دهد که $f(x) = Ae^{-\lambda x}$ در جایی که

$$A\int_{-1}^{1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{A}{\lambda}(e^{\lambda} - e^{-\lambda}) = 1$$

$$A\int_{-1}^{1} xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{A}{\lambda^2}(e^{\lambda} - e^{-\lambda}) - \frac{A}{\lambda}(e^{\lambda} - e^{-\lambda}) = 0.31$$

با حل انتگرال خواهیم داشت: $A \cong 0.425, \lambda \cong -1$.

۱۴-۱۵) $f(x) = Ae^{-\lambda x}$ برای $1 < x < 5$ و جاهای دیگر

$$A\int_{1}^{5} e^{-\lambda x}\,dx = 0.31 \qquad A\int_{1}^{5} xe^{-\lambda x}dx = 3\,\frac{37}{60}$$

بنابراین: $A \cong 1.06, \lambda \cong 0.5$.

۱۴-۱۶) از (۱۴-۱۵۱) با فرض $x_k = k\,, g_1(x_k) = g_1(k), k = 1,\ldots,6$ داریم:

$$g_2(x_k) = \begin{cases} 0 & k=1,3,5 \\ 1 & k=2,4,6 \end{cases} \quad p_k = \begin{cases} Ae^{-\lambda_1 k} & k=1,3,5 \\ Ae^{-\lambda_1 x-\lambda_2} & k=2,4,6 \end{cases}$$

از آن‌جایی که $p_1 + p_3 + p_5 = 0.5$ و $E\{x\} = 4.44$ و با $z = e^{-\lambda_1}$ و $w = e^{-\lambda_2}$ نتیجه می گیریم که

$$A(z+z^3+z^5) = Aw(z^2+z^4z^6)$$

$$A(z+3z^3+5z^5) + Aw(2z^2+4z^4+6z^6) = 4.44$$

این نتیجه می‌دهد که $A \cong 0.0437, z = 1/w \cong 1.468$.

۱۴-۱۷) الف) تبدیل $y = 3x$ یک به یک است، بنابراین: $H(y) = H(x)$.

ب) از (۱۴-۱۱۳) با $g(x) = 3x$ داریم: $H(y) = H(x) + \ln 3$.

۱۴-۱۸)

الف) در پرتاب عادلانه تاس خواهیم داشت: $p\{7\} = \frac{1}{6}, p(11) = \frac{1}{18}$, P { نه ۷ و نه ۱۱ } $= \frac{14}{18}$

$$H(A) = -\left(\frac{1}{6}\ln\frac{1}{6} + \frac{1}{18}\ln\frac{1}{18} + \frac{14}{18}\ln\frac{14}{18}\right) = 0.655$$

ب) از (۱۴-۱۰) با $n = 100$ و $N = 3$ می‌توان نوشت:

$$n_T \simeq e^{nH(A)} \simeq 2.79 \times 10^{28} \qquad n_a \simeq N^n \simeq 5.16 \times 10^{47}$$

۱۴-۱۹) فرایند x_n یک فرایند ایستا از دید وسیع با دامنه آنتروپی $\overline{H}(x)$ می‌باشد. نشان داده شده است که

$$\underline{w}_n = \sum_{k=0}^{n} \underline{x}_{n-k} \ell_k$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} H(\underline{w}_0,\dots,\underline{w}_n) = \overline{H}(x) + \ln|\ell_0| \qquad (i)$$

اثبات: متغیرهای تصادفی $w_0,\dots,w_n$ یک تغییر شکل خطی از متغیر تصادفی $x_0,\dots,x_n$ است و ماتریس تبدیل برابر است با

$$\begin{bmatrix} \ell_0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_1 & \ell_0 & \dots & 0 \\ \hline \ell_n & \ell_{n-1} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

از آن‌جایی که دترمینان تبدیل برابر است با $|\ell_0|^{n+1}$ ، (۱۴-۱۱۵) نتیجه می‌شود که

$$H(\underline{w}_0,\dots,\underline{w}_n) = H(\underline{x}_0,\dots\underline{x}_n) + (n+1)\ln|\ell_0|$$

با ضرب در $(n+1)$ ، (i) نتیجه می شود وقتی که $n \to \infty$.

۱۴-۲۰) همانند مثال ۱۴-۱۹، $f(p) = Ae^{-\lambda p}$. برای پیدا کردن λ، از منحنی $\eta - \lambda$ شکل ۱۴-۱۶ استفاده می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$\lambda = -1.23 \qquad f(p) = 0.51\, e^{1.23p}$$

۱۴-۲۱) همانند مثال ۱۴-۲۲ ، $p_k = Ae^{-\lambda k}$. برای پیدا کردن λ ، از منحنی $\eta - w$ شکل ۱۴-۱۷ استفاده می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$w \approx 1.449 \qquad \lambda \approx -0.371$$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0.054	0.079	0.114	0.165	0.240	0.348

۱۴-۲۲) چگالی مجهول مانند (۱۴-۱۵۷) نرمال است در جایی که

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & m_{23} \\ 1 & m_{23} & 4 \end{vmatrix} = -4m_{23}^2 + 2m_{23} + 56$$

گشتاور $m_{23} = E\{x_2\, x_3\}$ بایستی Δ را حداکثر کند. این نتیجه می‌دهد که $m_{23} = 0.25$.

۱۴-۲۳)

14-23

	p_i	0.3	0.2	0.15	0.15	0.1	0.06	0.04	
		$\frac{1}{4} \le p_i < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8} \le p_i < \frac{1}{4}$			$\frac{1}{16} \le p_i < \frac{1}{8}$	$\frac{1}{32} \le p_i < \frac{1}{16}$		$\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{2^{n_i}}$
Shannon	n_i	2	3	3	3	4	5	5	0.75
		2	3	3	3	4	4	4	0.8125
		2	3	3	3	3	4	4	0.875
L = 2.7		2	3	3	3	3	3	4	0.9375
		2	3	3	3	3	3	3	1
	x_i	00	010	011	100	101	110	111	

	p_i	0.3	0.2	0.15	0.15	0.1	0.06	0.04
Fano		A_0 0.5		A_1 0.5				
		A_{00} 0.3	A_{01} 0.2	A_{10} 0.3		A_{11} 0.2		
L = 2.6				A_{100} 0.15	A_{101} 0.15	A_{110} 0.1	A_{111} 0.1	
							A_{1110}	A_{1111}
	x_i	00	01	100	101	110	1110	1111

Huffman

$L = 2.6$

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6 / 0	7 / 1
1	2	5 / 0	6 / 10	7 / 11	3	4
1	3 / 0	4 / 1	2	5 / 0	6 / 10	7 / 11
2 / 0	5 / 10	6 / 110	7 / 111	1	3 / 0	4 / 1
1 / 0	3 / 10	4 / 11	2 / 0	5 / 10	6 / 110	7 / 111
1 / 00	3 / 010	4 / 011	2 / 10	5 / 110	6 / 1110	7 / 1111
x_i: 00	10	010	011	110	1110	1111

۱۴-۲۴) اگر $x_n = 0$ باشد، آن‌گاه $\bar{x}_n = 000$ و $y_n = 1$ است؛ اگرو فقط اگر $\bar{y}_n$ شامل یک صفر یا بدون صفر باشد. احتمال یک و تنها یک صفر برابر است با $3\beta^2(1-\beta)$ [(۳-۱۳) را ببینید]، احتمال بدون صفر برابر با β^3 است. بنابراین

$$P\{y_n = 1 | x_n = 0\} = 3\beta^2(1-\beta) + \beta^3$$

پس کد تکراری کانال مثال ۱۴-۲۹ همانند (۱۴-۱۹۱) با احتمال خطای $\beta_1 = \beta^2$ متقارن است.

۱۴-۲۵) اگر اطلاعات دریافت شده همیشه اشتباه باشد، آن‌گاه

$$P\{y_n = 1 | x_n = 0\} = \beta = 1, \text{ hence } C = 1 - r(\beta) = 1$$

۱۵-۱) زنجیر به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

که غیرمتناوب و غیرکاهشی است.
زنجیر دوم نیز هم چنین غیرمتناوب و غیرکاهشی است
زنجیر سوم شامل دو مجموعه بسته غیرمتناوب $\{e_1, e_2\}$ و $\{e_3, e_4\}$ و حالت گذرای e_5 است.
۱۵-۲) توجه کنید که مجموع ستون‌ها و سطرها در این مورد یک هستند. بنابراین P معرف ماتریس اتفاقی دوبلی در این‌جا است، و

$$P^n = \frac{1}{m+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\mathrm{x}_n = e_k\} = \frac{1}{m+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots m.$$

۱۵-۳) این مسئله "دونده‌های موفق" است که در مثال ۱۵-۱۱ و ۱۵-۲۳ بحث شد. از مثال ۱۵-۳ نتیجه می گیریم که:

$$u_{i+1} = p_{i,i+1} u_i = \frac{1}{i+1} u_i = \frac{u_o}{(i+1)!}$$

بنابراین از (۱۵-۲۰۶) داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \cdot u_0 = 1$$

که نتیجه می دهد $u_0 = 1/e$ و احتمالات حالت دائم به وسیله رابطه زیر داده می‌شود:

$$u_k = \frac{1/e}{k!}, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

۱۵-۴) اگر مولد صفر دارای اندازه m باشد، آن‌گاه فرایند کلی به عنوان مجموع m و فرایند شاخه‌ای مستقل $X_n^{(k)}, k = 1,2,\dots m$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\lim_{n\to\infty} P[\mathrm{x_n} = 0 | \mathrm{x_0} = m] =$$

$$\begin{aligned} &= P[\{\mathrm{x}_n^{(1)} = 0|\mathrm{x}_0^{(1)} = 1\} \cap \{\mathrm{x}_n^{(2)} = 0|\mathrm{x}_0^{(2)} = 1\} \cap \cdots \{\mathrm{x}_n^{(m)} = 0|\mathrm{x}_0^{(m)} = 1\}] \\ &= \prod_{k=1}^m P[\mathrm{x}_n^{(k)} = 0|\mathrm{x}_0^{(k)} = 1] \\ &= \pi_0^m \end{aligned}$$

۱۵-۵) از (۱۵-۲۸) و- (۱۵-۲۸۹) داریم:

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2, \quad \text{since } p_k = 0, \quad k \geq 3.$$

هم‌چنین $p_0 + p_1 z + p_2 = 1$ است و از (۱۵-۳۰۷) احتمال تحریک با حل معادله زیر به دست می‌آید:

$$P(z) = z.$$

توجه کنید این‌جاست که:

$$\begin{aligned} P(z) - z &= p_0 - (1 - p_1)z + p_2 z^2 \\ &= p_0 - (p_0 + p_2)z + p_2 z^2 \\ &= (z-1)(p_2 z - p_0) \end{aligned}$$

و بنابراین دوریشه از معادله $P(z) = z$ به صورت زیر داده می‌شوند:

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = \frac{p_0}{p_2}.$$

بنابراین اگر $p_2 < p_0$ باشد، آن‌گاه $z_2 > 1$ و بنابراین کوچک ترین ریشه مثبت از $P(z) = z$ یک است و این معرفی احتمال انقراض است. از این نتیجه می‌شود که چنین قبیله‌ای تولید مثل ندارد چون محدود به انقراض است.

۱۵-۶) فرایند شاخه‌ای $\{X_n\}$ را معرفی می کنیم:

$$\mathrm{x}_{n+1} = \sum_{k=1}^{\mathrm{x}_n} \mathrm{y}_k$$

در جایی که y_k متغیرهای تصادفی با چگالی یکسان و مشترک با تابع گشتاور $P(z)$ است بنابراین ((۱۵-۲۷۸)- (۱۵-۲۸۹) را ببینید):

$$P'(1) = E\{\mathrm{y}_k\} = \mu.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E\{\mathrm{x}_{n+1}|\mathrm{x}_n\} &= E\{\textstyle\sum_{k=1}^{\mathrm{x}_n} \mathrm{y}_k|\mathrm{x}_n = m\} \\ &= E\{\textstyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{y}_k|\mathrm{x}_n = m\} \\ &= E\{\textstyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{y}_k\} = mE\{\mathrm{y}_k\} = \mathrm{x}_n\,\mu \end{aligned}$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} E\{\mathrm{x}_{n+2}|\mathrm{x}_n\} &= E\{E\{\mathrm{x}_{n+2}|\mathrm{x}_{n+1},\mathrm{x}_n\}\} \\ &= E\{E\{\mathrm{x}_{n+2}|\mathrm{x}_{n+1}\}|\mathrm{x}_n\} \\ &= E\{\mu\mathrm{x}_{n+1}|\mathrm{x}_n\} = \mu^2\,\mathrm{x}_n \end{aligned}$$

و به طور عمومی به دست می‌آوریم که

$$E\{\mathrm{x}_{n+r}|\mathrm{x}_n\} = \mu^r\,\mathrm{x}_n. \qquad (i)$$

هم‌چنین از (۱۵-۳۱۰) – (۱۵-۳۱۱) داریم:

$$E\{\mathrm{x}_n\} = \mu^n. \qquad (ii)$$

تعریف زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\mathrm{w}_n = \frac{\mathrm{x}_n}{\mu^n}. \qquad (iii)$$

این نتیجه می دهد که

$$E\{\mathrm{w}_n\} = 1.$$

با تقسیم هردو طرف از (i) بر μ^{n+r} نتیجه می‌گیریم که

$$E\{\frac{\mathrm{x}_{n+r}}{\mu^{n+r}}|\mathrm{x}_n = x\} = \mu^r \cdot \frac{\mathrm{x}_n}{\mu^{n+r}} = \frac{\mathrm{x}_n}{\mu^n} = \mathrm{w}_n$$

(۱۵-۷

$$\mathrm{s}_n = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{x}_n$$

از آن‌جایی X_n متغیرهای تصادفی با چگالی یکسان و مستقل هستند، داریم:

$$\mathrm{s}_{n+1} = \mathrm{s}_n + \mathrm{x}_{n+1}$$

به طوری که

$$E\{\mathrm{s}_{n+1}|\mathrm{s}_n\} = E\{\mathrm{s}_n + \mathrm{x}_{n+1}|\mathrm{s}_n\} = \mathrm{s}_n + E\{\mathrm{x}_{n+1}\} = \mathrm{s}_n.$$

بنابراین $\{s_n\}$

۱۵-۸) الف) از قضیه بیز داریم:

$$\begin{aligned} P\{\mathrm{x_n} = j|\mathrm{x_{n+1}} = i\} &= \frac{P\{\mathrm{x}_{n+1} = i|\mathrm{x}_n = j\}\, P\{\mathrm{x}_n = j\}}{P\{\mathrm{x}_{n+1} = i\}} \\ &= \frac{q_j\, p_{ji}}{q_i} = p^*_{ij}, \qquad (i) \end{aligned}$$

در جایی که فرض می کنیم که زنجیر در حالت دائم است.

ب) توجه کنید که

$$p^*_{ij} = p_{ij}$$

و با استفاده از (i) نتیجه می‌دهد که

$$p^*_{ij} = \frac{q_j\, p_{ji}}{q_i} = p_{ij} \qquad (ii)$$

یا، برای یک زنجیر زمان- معکوس داریم:

$$q_j\, p_{ji} = q_i\, p_{ij}. \qquad (iii)$$

بنابراین با استفاده از (ii) با جای گذاری مستقیم نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} p_{ij}\, p_{jk}\, p_{ki} &= \left(\frac{q_j}{q_i}\, p_{ji}\right) \left(\frac{q_k}{q_j}\, p_{kj}\right) \left(\frac{q_i}{q_k}\, p_{ik}\right) \\ &= p_{ik}\, p_{kj}\, p_{ji}, \end{aligned}$$

۱۵-۹) الف) این نتیجه می‌دهد که $\left(a_{ij} = a_{ji}\right)$, $A = A^T$ و $a_{ij} > 0$. مجموع سطر i^{th} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r_i = \sum_k a_{ik} > 0, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

و فرض کنید:

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_k a_{ik}} = \frac{a_{ij}}{r_i}.$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} p_{ji} &= \frac{a_{ji}}{\sum\limits_m a_{jm}} = \frac{a_{ji}}{r_j} = \frac{a_{ij}}{r_j} \\ &= \frac{r_i}{r_j}\frac{a_{ij}}{r_i} = \frac{r_i}{r_j}\,p_{ij} \end{aligned} \qquad (i)$$

یا

$$r_i\,p_{ij} = r_j\,p_{ji}.$$

بنابراین

$$\sum_i r_i\,p_{ij} = \sum_i r_j\,p_{ji} = r_j \sum_i p_{ji} = r_j, \qquad (ii)$$

چون

$$\sum_i p_{ji} = \frac{\sum_i a_{ji}}{r_j} = \frac{r_j}{r_j} = 1.$$

توجه کنید که (ii) در توزیع احتمال حالت دائم (۱۵-۱۶۷) با

$$q_i = c\,r_i, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

صدق کند. جایی که c با رابطه زیر داده شده است:

$$c\sum_i r_i = \sum_i q_i = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{\sum_i r_i} = \frac{1}{\sum_i \sum_j a_{ij}}.$$

بنابراین

$$q_i = \frac{r_i}{\sum_i r_i} = \frac{\sum_j a_{ij}}{\sum_i \sum_j a_{ij}} > 0 \qquad (iii)$$

که توزیع احتمال ایستائی زنجیر را نشان میدهد. با جای‌گذاری (iii) در (i) نتیجه می‌گیریم که

$$p_{ji} = \frac{q_i}{q_j}\,p_{ij}$$

یا

$$p_{ij} = \frac{q_j\, p_{ji}}{q_i} = p^*_{ij}$$

و بنابراین زنجیر زمان- معکوس است.

۱۵-۱۰) الف) $M = (m_{ij})$ به صورت زیر داده شده است:

$$M = (I - W)^{-1}$$

یا

$$(I - W)M = I$$
$$M = I + WM$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \delta_{ij} + \textstyle\sum_k w_{ik}\, m_{kj}, \quad e_i, e_j \in T \\ &= \delta_{ij} + \textstyle\sum_k p_{ik}\, m_{kj}, \quad e_i, e_j \in T \end{aligned}$$

ب) حالت عمومی قبلا حل شده است. همانند آن با فرض $N = 6$ و $r = p/q$ نتیجه می‌گیریم که

$$m_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(r^j - 1)(r^{6-i} - 1)}{(p-q)(r^6 - 1)}, & j \le i \\[2ex] \dfrac{(r^i - 1)(r^{6-i} - r^{j-i})}{(p-q)(r^6 - 1)}, & j \ge i. \end{cases}$$

۱۵-۱۱) اگر یک ماتریس اتفاقی $A = (a_{ij}), a_{ij} > 0$ مطابق با دوگام ماتریس گذار از یک زنجیر مارکوف باشد، آن‌گاه باید یک ماتریس اتفاقی دیگر مانند P وجود داشته باشد:

$$A = P^2, \qquad P = (p_{ij})$$

از آن جایی که

$$p_{ij} > 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1,$$

و این نبایستی همیشه ممکن باشد. برای مثال در زنجیر دو حالته، فرض کنید:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

به طوری‌که

$$A = P^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + (1-\alpha)(1-\beta) & (\alpha+\beta)(1-\alpha) \\ (\alpha+\beta)(1-\beta) & \beta^2 + (1-\alpha)(1-\beta) \end{pmatrix}.$$

این نتیجه می‌شود مجموع اعضای قطری به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= \alpha^2 + 2(1-\alpha)(1-\beta) + \beta^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha+\beta) + 2 \qquad\qquad (i) \\ &= 1 + (\alpha+\beta-1)^2 \ \geq 1. \end{aligned}$$

بنابراین شرایط (i) ضروری است. پس $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ است، هم‌چنین نتیجه می‌گیریم که $1 < a_{11} + a_{22} \leq 2$. به علاوه شرایط (i) هم‌چنین درمورد 2×2 کافی است، بنابراین $a_{11} + a_{22} > 1$ و از این‌جا داریم:

$$(\alpha+\beta-1)^2 = a_{11} + a_{22} - 1 > 0$$

پس

$$\alpha + \beta = 1 \pm \sqrt{a_{11} + a_{22} - 1}$$

و این معادله برای همه مجموعه‌های با مقادیر $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$ حل می‌شود.

۱۵-۱۲) در این مورد زنجیر غیر متناوب و غیر کاهشی است و حالت جاذبی وجود ندارد. توزیع حالت دائم $\{u_k\}$ رضایت بخش است (۱۵-۱۶۷) و بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$u_k = \sum_j u_j\, p_{jk} = \sum_{j=0}^{N} u_j \binom{N}{k} p_j^k\, q_j^{N-k}.$$

بنابراین اگر $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ باشند، آن‌گاه پیشامد "ژن‌های خالص" اتفاق نمی‌افتد.

۱۵-۱۳) احتمالات گذار در همه موارد (۱۵-۷ الف) برای همه مقادیر خاص از $A(z) = B(z)$ همان‌گونه که در مثال‌های ۱۵ الف-۱ ، ۱۵ الف -۲ و ۱۵ الف -۳ نشان داده شد. مقادیر ویژه به طور کلی در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\sum_j p_{ij}\, x_j^{(k)} = \lambda_k\, x_i^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots N$$

و $\sum_j p_{ij} = 1$ برای همه iها بدیهی است و $\lambda_0 = 1$ یک مقدار ویژه برای همه موارد را به دنبال دارد.

به هر حال مقادیر ویژه باقی‌مانده را می‌توان از رابطه (۱۵-۷ الف) استخراج نمود. از آن‌جا و مطابق تابع مولد گشتاور شرطی در (۱۵-۲۹۱) می‌توان نوشت:

$$G(s) = \sum_{j=0}^{N} p_{ij}\, s^j \qquad (i)$$

و از (۱۵-۷ الف):

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \frac{\{A^i(z)\}_j\, \{B^{N-i}(z)\}_{N-j}}{\{A^i(z)\, B^{N-i}(z)\}_N} \\ &= \frac{\text{coefficient of } s^j\, z^N \text{in } \{A^i(sz)\, B^{N-i}(z)\}}{\{A^i(z)\, B^{N-i}(z)\}_N} \end{aligned} \qquad (ii)$$

با جای گذاری (ii) در (i) به بیان بسته زیر می‌رسیم:

$$G(s) = \frac{\{A^i(sz)\, B^{N-i}(z)\}_N}{\{A^i(z)\, B^{N-i}(z)\}_N}. \qquad (iii)$$

با مشتق‌گیری از $G(s)$ نسبت به s نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} G'(s) &= \sum_{j=0}^{N} P_{ij}\, j\, s^{j-1} \\ &= \frac{\{iA^{i-1}(sz)\, A'(sz) z\, B^{N-i}(z)\}_N}{\{A^i(z)\, B^{N-i}(z)\}_N} \\ &= i \cdot \frac{\{A^{i-1}(sz)\, A'(sz)\, B^{N-i}(z)\}_{N-1}}{\{A^i(z)\, B^{N-i}(z)\}_N}. \end{aligned} \qquad (iv)$$

با فرض $s = 1$ در بیان بالا داریم:

$$G'(1) = \sum_{j=0}^{N} p_{ij}\, j = i\, \frac{\{A^{i-1}(z)\, A'(z)\, B^{N-i}(z)\}_{N-1}}{\{A^i(z)\, B^{N-i}(z)\}_N}. \qquad (v)$$

در مورد خاص وقتی $A(z) = B(z), Eq.(v)$ کاهش می‌یابد به

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij}\, j = \lambda_1\, i \qquad (vi)$$

وقتی

$$\lambda_1 = \frac{\{A^{N-1}(z)\, A'(z)\}_{N-1}}{\{A^N(z)\}_N}. \qquad (vii)$$

توجه شود که (vi) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$Px_1 = \lambda_1\, x_1, \quad x_1 = [0, 1, 2, \cdots N]^T$$

و با محاسبه مستقیم با $A(z) = B(z) = (q + pz)^2$ (مثال ۱۵–۱ الف) داریم:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\{(q+pz)^{2(N-1)}\, 2p(q+pz)\}_N}{\{(q+pz)^{2N}\}_N} \\
&= \frac{2p\{(q+pz)^{2N-1}\}_{N-1}}{\{(q+pz)^{2N}\}_N} = \frac{2p\binom{2N}{N-1} q^N p^{N-1}}{\binom{2N}{N} q^N p^N} = 1.
\end{aligned}$$

بنابراین $\sum_{j=0}^{N} p_{ij}\, j = i$ و از (۱۵–۲۲۴) این زنجیره ها مارتینگل را توصیف می‌کند. (به طور مشابه برای مثال‌های ۱۵ الف–۲ و ۱۵ الف–۳ الف عمل می‌کنیم).

برای مشخص کردن مقادیر ویژه باقی‌مانده یکبار دیگر از $G'(s)$ مشتق می گیریم. این نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}
G''(s) &= \sum_{j=0}^{N} p_{ij}\, j(j-1)\, s^{j-2} \\
&= \frac{\{i(i-1)A^{i-2}(sz)[A'(sz)]^2\, z\, B^{N-i}(z) + iA^{i-1}(sz)\, A''(sz) z\, B^{N-i}(z)\}_{N-1}}{\{A^i(z)\, B^{N-i}(z)\}_N} \\
&= \frac{\{i\, A^{i-2}(sz)\, B^{N-i}(z)[(i-1)\,(A'(sz))^2 + A(sz)\, A''(sz)]\}_{N-2}}{\{A^i(z)\, B^{N-i}(z)\}_N}.
\end{aligned}$$

با فرض $s = 1$ و $A(z) = B(z)$ ، بیان ساده تر رابطه بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij}\, j(j-1) = \lambda_2\, i(i-1) + i\mu_2 \qquad (viii)$$

در جایی که

$$\lambda_2 = \frac{\{A^{N-2}(z)\,[A'(z)]^2\}_{N-2}}{\{A^N(z)\}_N}$$

و

$$\mu_2 = \frac{\{A^{N-1}(z)\,A''(z)\}_{N-2}}{\{A^N(z)\}_N}.$$

معادله $(viii)$ می تواند به صورت زیر دوباره نویسی شود:

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij}\, j^2 = \lambda_2\, i^2 + (\text{polynomial in } i \text{ of degree } \le 1)$$

و یا تکرار عمومی این پردازه نتیجه می‌شود که

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij}\, j^k = \lambda_k\, i^k + (\text{polynomial in } i \text{ of degree } \le k-1) \qquad (ix)$$

وقتی

$$\lambda_k = \frac{\{A^{N-k}(z)\,[A'(z)]^k\}_{N-k}}{\{A^N(z)\}_N}, \quad k = 1, 2, \cdots N. \qquad (x)$$

معادله $(viii)-(x)$

$$P\, q_k = \lambda_k\, q_k \qquad (xi)$$

در جایی که q_k چندجمله‌ای‌هائی در i از درجه $\le k$ ، و با انتخاب مناسب ثوابت آن‌ها می‌توانند به این شکل انتخاب شوند. این نتیجه می دهد که $\lambda_k\,, k=1,2,\ldots N$ داده شده به وسیله (ix) مقادیر ویژه مطلوب هستند.

الف) احتمالات گذار در این مورد از مثال ۱۵ الف-۱ با فرض $A(z)=B(z)=(q+pz)^2$ نتیجه می‌شود. بنابراین با استفاده از (ix) مقدیر ویژه مطلوبی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{\{(q+pz)^{2(N-k)}[2p(q+pz)]^k\}_{N-k}}{\{(q+pz)^{2N}\}_N}\\ &= 2^k p^k \frac{\{(q+pz)^{2N-k}\}_{N-k}}{\{(q+pz)^{2N}\}_N\}}\\ &= 2^k \frac{\binom{2N-k}{N-k}}{\binom{2N}{N}}, \quad k=1,2,\cdots N.\end{aligned}$$

ب) احتمالات گذار در این مورد از مثال ۱۵ الف-۲ با فرض زیر نتیجه می‌شود:

$$A(z)=B(z)=e^{\lambda(z-1)}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{\{e^{\lambda(N-k)(z-1)}\,\lambda^k\, e^{\lambda k(z-1)}\}_{N-k}}{\{e^{\lambda N(z-1)}\}_N}\\ &= \frac{\lambda^k\{e^{\lambda N z}\}_{N-k}}{\{e^{\lambda N z}\}_N} = \frac{\lambda^k(\lambda N)^{N-k}/(N-k)!}{(\lambda N)^N/N!}\\ &= \frac{N!}{(N-k)!\,N^k} = \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{N}\right), \quad k=1,2,\cdots N\end{aligned}$$

ج) احتمالات گذار در این مورد از مثال ۱۵ الف-۳ با فرض زیر نتیجه می‌شود:

$$A(z)=B(z)=\frac{q}{1-pz}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\lambda_k &= p^k \frac{\{1/(1-pz)^{N+k}\}_{N-k}}{\{1/(1-pz)^N\}_N}\\ &= (-1)^k \frac{\binom{-(N+k)}{N-k}}{\binom{-N}{N}} = \frac{\binom{2N-1}{N-k}}{\binom{2N-1}{N}}, \quad r=2,3,\cdots N\end{aligned}$$

۱۵-۱۴) از (۱۵-۲۴۰)، زمان متوسط بردار جذب با رابطه زیر داده می‌شود:

$$m = (I - W)^{-1} E, \quad E = [1, 1, \cdots 1]^T,$$

از آن جایی که

$$W_{ik} = p_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \cdots N - 1,$$

با p_{jk} که به ترتیب در (۱۵-۳۰) و (۱۵-۳۱) داده شده است.

۱۵-۱۵) زمان متوسط جذب در (۱۵-۲۴۰) صدق می‌کند. از آن‌جا

$$\begin{aligned} m_i &= 1 + \sum_{k \in T} p_{ik} m_k = 1 + p_{i,i+1} m_{i+1} + p_{i,i-1} m_{i-1} \\ &= 1 + p\, m_{i+1} + q\, m_{i-1}, \end{aligned}$$

یا

$$m_k = 1 + p\, m_{k+1} + q\, m_{k-1}.$$

این نتیجه می‌دهد:

$$p(m_{k+1} - m_k) = q(m_k - m_{k-1}) - 1$$

فرض کنید:

$$M_{k+1} = m_{k+1} - m_k$$

بنابراین معادله تکراری فوق نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= \frac{q}{p} M_k - \frac{1}{p} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^k M_1 - \frac{1}{p}\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right] \\ &= \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^k M_1 - \frac{1}{p-q}\left\{1 - (\frac{q}{p})^k\right\}, & p \neq q \\ M_1 - \frac{k}{p}, & p = q \end{cases} \end{aligned}$$

این نتیجه می دهد که

$$
\begin{aligned}
m_i &= \sum_{k=0}^{i-1} M_{k+1} \\
&= \begin{cases} \left(M_1 + \frac{1}{p-q}\right) \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k - \frac{i}{p-q}, & p \neq q \\ iM_1 - \frac{i(i-1)}{2p}, & p = q \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(M_1 + \frac{1}{p-q}\right) \frac{1-(q/p)^i}{1-q/p} - \frac{i}{p-q}, & p \neq q \\ iM_1 - \frac{i(i-1)}{2p}, & p = q \end{cases}
\end{aligned}
$$

در جایی که که از فرض $m_0 = 0$ استفاده کنیم. به طور مشابه فرض $m_{a+b} = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$
M_1 + \frac{1}{p-q} = \frac{a+b}{p-q} \cdot \frac{1-q/p}{1-(q/p)^{a+b}}.
$$

بنابراین

$$
m_i = \begin{cases} \frac{a+b}{p-q} \cdot \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^{a+b}} - \frac{i}{p-q}, & p \neq q \\ i(a+b-i), & p = q \end{cases}
$$

که این برای $i = a$ برابر است با

$$
\begin{aligned}
m_a &= \begin{cases} \frac{a+b}{p-q} \cdot \frac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^{a+b}} - \frac{a}{p-q}, & p \neq q \\ ab, & p = q \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{b}{2p-1} - \frac{a+b}{2p-1} \cdot \frac{1-(p/q)^b}{1-(p/q)^{a+b}}, & p \neq q \\ ab, & p = q \end{cases}
\end{aligned}
$$

که می‌توان نوشت:

$$\frac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^{a+b}} = 1 - \frac{(q/p)^a - (q/p)^{a+b}}{1-(q/p)^{a+b}} = 1 - \frac{1-(p/q)^b}{1-(p/q)^{a+b}}$$

(همچنین مسئله ۳-۱۰ را ببینید).

۱۶-۱) با استفاده از (۱۶-۱۳۲) و فرض $r = 1$ خواهیم داشت:

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & n \le 1 \\ \rho^n p_0, & 1 < n \le m \end{cases}$$

$$= \rho^n p_0, \qquad 0 \le n \le m$$

بنابراین:

$$\sum_{n=0}^{m} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{m} \rho^n = p_0 \frac{(1-\rho^{m+1})}{1-\rho} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}$$

و بنابراین:

$$p_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \rho^n, \qquad 0 \le n \le m, \quad \rho \ne 1$$

و $\lim \rho \to 1$ نتیجه می گیریم:

$$p_n = \frac{1}{m+1}, \qquad \rho = 1.$$

۱۶-۲) الف) فرض کنید $n_1(t) = X + Y$ در جایی که X و Y معرف دو صف هستند. پس:

$$\begin{aligned} p_n &= P\{n_1(t) = n\} = P\{X + Y = n\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P\{X = k\} P\{Y = n-k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (1-\rho)\rho^k (1-\rho)\rho^{n-k} \qquad\qquad \text{(i)} \\ &= (n+1)(1-\rho)^2 \rho^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

در جایی که $\rho = \lambda/\mu$.

ب) وقتی دو صف ترکیب شده باشند، دامنه ورودی جدید عبارتست از $\lambda' = \lambda + \lambda = 2\lambda$.

بنابراین از (۱۶-۱۰۲) نتیجه می‌شود که:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda'/\mu)^n}{n!} p_0 = \dfrac{(2\rho)^n}{n!} p_0, & n < 2 \\ \dfrac{2^2}{2!} (\dfrac{\lambda'}{2\mu})^n p_0 = 2\rho^n p_0, & n \geq 2. \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \sum_{k-0}^{\infty} p_k &= p_0(1 + 2\rho + 2\sum_{k=2}^{\infty} \rho^k) \\ &= p_0(1 + 2\rho + \frac{2\rho^2}{1-\rho}) \\ &= \frac{p_0}{1-\rho}((1+2\rho)(1-\rho) + 2\rho^2) \\ &= \frac{p_0}{1-\rho}(1+\rho) = 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow p_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}, \qquad (\rho = \lambda/\mu). \tag{ii}$$

پس:

$$p_n = \begin{cases} 2(1-\rho)\rho^n/(1+\rho), & n \leq 1 \\ (1-\rho)/(1+\rho), & n = 0 \end{cases} \tag{iii}$$

ج) برای هر صف $M/M\ /1$ متوسط تعداد مواردی که منتظرند به صورت زیر داده می‌شود (با استفاده از (۱۶-۱۰۶) و با فرض $r = 1$):

$$E\{X\} = L_1' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) p_n$$

در جایی که p_n نیز یک صف در (۱۸-۸۸) است. بنابراین:

$$\begin{aligned} L_1' &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(1-\rho)\,\rho^n \\ &= (1-\rho)\,\rho^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,\rho^{n-2} \\ &= (1-\rho)\,\rho^2\sum_{k=1}^{\infty}k\,\rho^{k-1} \qquad\qquad (\text{iv}) \\ &= (1-\rho)\,\rho^2\,\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}. \end{aligned}$$

از آن‌جایی که $n_1(t) = X + Y$ داریم:

$$\begin{aligned} L_1 &= E\{n_1(t)\} = E\{X\} + E\{Y\} \\ &= 2L_1' = \frac{2\rho^2}{1-\rho} \qquad\qquad (\text{v}) \end{aligned}$$

برای L_2 می‌توانیم از (۱۶–۱۰۶)- (۱۶–۱۰۷) با فرض $r = 2$ استفاده کنیم. با استفاده از (iii) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} L_2 &= p_r\,\frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\ &= 2\,\frac{(1-\rho)\,\rho^2}{1+\rho}\,\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{2\,\rho^3}{1-\rho^2} \qquad\qquad (\text{vi}) \\ &= \frac{2\,\rho^2}{1-\rho}\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) < L_1 \end{aligned}$$

از (vi)، ترکیب یک صف تنها موثرتر از دوصف جداگانه است.

۱۶–۳) تنها احتمال غیر صفر این فرایند عبارتست از:

$$\lambda_{0,0} = -\lambda_0 = -m\lambda, \quad \lambda_{0,1} = \mu$$

$$\lambda_{i,i+1} = (m-i)\,\lambda, \quad \lambda_{i,i-1} = i\mu$$

$$\lambda_{i,i} = [(m-i)\lambda + i\mu], \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

$$\lambda_{m,m} = -\lambda_{m,m-1} = -m\mu.$$

از ترکیب روابط فوق در متن (۱۶-۶۳) داریم:

$$m\lambda p_0 = \mu p_1 \qquad \text{(i)}$$

$$[(m-i)\lambda + i\mu]\, p_i = (m-i+1)\, p_{i-1} + (i+1)\,\mu\, p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad \text{(ii)}$$

و

$$m\,\mu\, p_m = \lambda\, p_{m-1}. \qquad \text{(iii)}$$

از حل $(i)-(iii)$ نتیجه می‌گیریم که:

$$p_i = \binom{m}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{m-i}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, m$$

۱۶-۴) الف) در این مورد:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_1}\cdots\dfrac{\lambda}{\mu_1} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu_1}\right)^n p_0, & n < m \\ \dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_1}\cdots\dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_2}\cdots\dfrac{\lambda}{\mu_2} p_0, & n \ge m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho_1^n p_0, & n < m \\ \rho_1^{m-1}\rho_2^{n-m+1} p_0, & n \ge m, \end{cases}$$

در جایی که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \left[\sum_{k=0}^{m-1} \rho_1^k + \rho_1^{m-1}\rho_2 \sum_{n=0}^{\infty} \rho_2^n\right]$$

$$= p_0 \left[\frac{1-\rho_1^m}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2\rho_1^{m-1}}{1-\rho_2}\right] = 1$$

نتیجه می‌دهد که:

$$p_0 = \left(\frac{1-\rho_1^m}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2\rho_1^{m-1}}{1-\rho_2}\right)^{-1}.$$

ب)

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n \\
&= p_0\left[\sum_{n=0}^{m-1} n\,\rho_1^n + \sum_{n=m}^{\infty} n\,\rho_1^{m-1}\,\rho_2^{n-m+1}\right] \\
&= p_0\left[\rho_1\sum_{n=0}^{m-1} n\,\rho_1^{n-1} + \rho_1\,\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{m-2}\sum_{n=m}^{\infty} n\,\rho_2^{n-1}\right] \\
&= p_0\left[\rho_1\frac{d}{d\rho_1}\,\left(\sum_{n=0}^{m-1}\rho_1^n\right) + \rho_1\,\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{m-2}\frac{d}{d\rho_2}\sum_{n=m}^{\infty}\rho_2^n\right] \\
&= p_0\left[\rho_1\,\frac{d}{d\rho_1}\,\left(\frac{1-\rho_1^m}{1-\rho}\right) + \rho_1\,\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{m-2}\frac{d}{d\rho}\,\left(\frac{\rho^m}{1-\rho}\right)\right] \\
&= p_0\left[\frac{\rho_1[1+(m-1)\rho_1^m - m\rho_1^{m-1}]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho_2\,\rho_1^{m-1} + [m-(m-1)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\right].
\end{aligned}$$

۱۶–۵) در این مورد:

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda, & j < r \\ p\lambda, & j \geq r \end{cases} \quad \mu_i = \begin{cases} j\mu, & j < r \\ r\mu, & j \geq r. \end{cases}$$

با استفاده از (۱۶–۷۳)- (۱۶–۷۴)، نتیجه می‌شود:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\, p_0, & n < r \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^r}{r!}\,(p\lambda/r\mu)^{n-r}, & n \geq r. \end{cases}$$

(۶-۱۶

$$\begin{aligned}P\{w>t\} &= \sum_{n=r}^{m-1} p_n\, P(w>t|n)\\ &= \sum_{n=r}^{m-1} p_n\,(1-F_w(t|n)) = \sum p_r\left(\frac{\lambda}{r\mu}\right)^{n-r}(1-F_w(t|n))\end{aligned}$$

$$f_w(t|n) = e^{-\gamma\mu t}\,\frac{(\gamma\mu)^{n-r+1}\,t^{n-r}}{(n-r)!)} \quad (see\ 16.116)$$

و

$$F_w(t|n) = 1-\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(\gamma\mu t)^k}{k!}\,e^{-\gamma\mu t} \quad (see\ 4.)$$

بنابراین:

$$1-F_w(t|n) = \sum_{k=0}^{n-r}\frac{(\gamma\mu t)^k}{k!}\,e^{-\gamma\mu t}$$

$$\begin{aligned}P\{w>t\} &= \sum_{n=r}^{m-1} p_r\left(\frac{\lambda}{\gamma\mu}\right)^{n-r}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(\gamma\mu t)^k}{k!}\,e^{-\gamma\mu t}\\ &= \sum_{i=0}^{m-r-1} p_r\,\rho^i\sum_{k=0}^{i}\frac{(\gamma\mu t)^k}{k!}\,e^{-\gamma\mu t}, \quad n-r=i\\ &= p_r\,e^{-\gamma\mu t}\sum_{k=0}^{m-r-1}\rho^k\sum_{i=0}^{k}\frac{(\gamma\mu t)^i}{i!}\\ &= \sum_{k=0}^{m-r-1}\sum_{i=0}^{k} = \sum_{i=0}^{m-r-1}\sum_{k=i}^{m-r-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{w>t\} &= p_r\,e^{-\gamma\mu t}\sum_{i=0}^{m-r-1}\frac{(\gamma\mu t)^i}{i!}\sum_{k=i}^{m-r-1}\rho^k\\ &= \frac{p_r}{1-\rho}\,e^{-\gamma\mu t}\sum_{i=0}^{m-r-1}\frac{(\gamma\mu t)^i}{i!}\,(\rho^i-\rho^{m-r}), \quad \rho=\lambda/\gamma\mu.\end{aligned}$$

توجه کنید که:

$$m \to \infty \Longrightarrow M/M/r/m \Longrightarrow M/M/r$$

و

$$\begin{aligned} P(w > t) &= \frac{p_r}{1-\rho}\, e^{-\gamma\mu t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\gamma\mu\rho t)^i}{i!} \\ &= \frac{p_r}{1-\rho}\, e^{-\gamma\mu(1-\rho)t} \quad t > 0. \end{aligned}$$

و این موافق با (۱۶–۱۱۹) است.

۱۶-۷) الف) راهنمایی را مورد استفاده قرار دهید. ب)

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda+\mu)\, p_n\, z^n + \frac{\mu}{z} \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1}\, z^{n+1} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k}\, c_k\, z^n = 0$$

$$-(\rho+1)\,(P(z) - p_0) + \frac{\mu}{z}\,(P(z) - p_0 - p_1 z) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \sum_{m=0} p_m\, z^m = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$P(z)[1 - z - \rho z\,(1 - C(z))] = p_0(1-z)$$

یا

$$P(z) = \frac{p_0(1-z)}{1 - z - \rho z\,(1 - C(z))}.$$

$$\begin{aligned} 1 = P(1) &= \frac{-p_0}{-1 - \rho + \rho_z\, C'(z) + \rho C(z)} = \frac{-p_0}{-1 + \rho C'(1)} \\ &\Longrightarrow p_0 = 1 - \rho_0, \quad \rho_0 = \rho C'(1). \end{aligned}$$

فرض کنید:

$$D(z) = \frac{1 - C(z)}{1 - z}.$$

پس

$$P(z) = \frac{1 - \rho_L}{1 - \rho z D(z)}.$$

ج) این نتیجه می‌دهد:

$$P'(z) = \frac{(1-\rho_c)}{\left(1-\rho z D(z)\right)^2}\left(\rho D(z) + \rho z D'(z)\right)$$

$$\begin{aligned} L = P'(1) &= \frac{(1-\rho_c)}{(1-\rho_c)^2}\,\rho\left(D(1) + D'(1)\right) \\ &= \frac{1}{(1-\rho_c)}\left(C'(1) + D'(1)\right) \end{aligned}$$

$$C'(1) = E(x)$$

$$D(z) = \frac{1-C(z)}{1-z}$$

$$\begin{aligned} D'(z) &= \frac{(1-z)\left(-C'(z)\right) - \left(1-C(z)\right)(-1)}{(1-z)^2} \\ &= \frac{1-C(z)-(1-z)C'(z)}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

با استفاده از قاعده هوپیتال

$$\begin{aligned} D'(1) &= \lim_{z\to 1} \frac{-C'(z)-(-1)C'(z)-(1-z)C''(z)}{-2(1-z)} \\ &= \lim_{z\to 1} = 1/2C''(z) = \frac{C''(z)}{2} \\ &= 1/2 \sum k(k-1)\,C_k = \frac{E(X^2)-E(X)}{2} \end{aligned}$$

$$L = \frac{\rho\left(E(X) + E(X^2)\right)}{2\left(1-\rho E(X)\right)}.$$

د)

$$C(z)z^m \quad E(X) = m$$

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho\sum_{k=1}^{m} z^k}$$

$$D(z) = \frac{1-z^m}{1-z} = \sum_{k=0}^{m-1} z^k$$

$$E(X) = m, \quad E(X^2) = m^2$$

$$L = \frac{\rho(m + m^2)}{2(1 - \rho m)}$$

ه)

$$C(z) = \frac{qz}{1 - Pz}$$

$$P(z) = \frac{1 - \rho_0}{1 - \rho z D(z)}, \quad C(z) = \frac{qz}{1 - pz}$$

$$D(z) = \frac{1 - C(z)}{1 - z} = \frac{1 - \frac{qz}{1 - P(z)}}{1 - z} = \frac{1 - Pz - (1 - P)_z}{(1 - z)(1 - Pz)} = \frac{1 - z}{(1 - z)(1 - Pz)} = \frac{1}{1 - Pz}$$

$$P(z) = \frac{(1 - \rho_0)(1 - pz)}{1 - pz - \rho z} = \frac{(1 - \rho_0)(1 - pz)}{1 - (p + \rho)z}$$

$$C'(1) = \frac{(1 - pz)q - qz(-p)}{(1 - Pz)^2} = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q}$$

$$D(z) = \frac{1 - C(z)}{1 - z}$$

$$D(1) = C'(1)$$

$$L = P'(1) = \frac{1 - \rho_c}{(1 - \rho_c)^2} \left(\rho \cdot C'(1) + \rho \cdot D'(1)\right)$$

$$D'(z) = \frac{-(1 - z)C'(z) - (1 - C(z))(\rho - 1)}{(1 - z)^2} = \frac{1 - C(z) - (1 - z)C'(1)}{(1 - z)^2}$$

$$\lim_{z \to 1} D'(z) = \lim_{z \to 1} \frac{-C'(z) - (-1)C'(z) - (1 - z)C''(z)}{2(1 - z)}$$

$$= \frac{-(1 - z)C''(z)}{-2(1 - z)} = \frac{\rho''(z)}{2}$$

$$D'(1) = \frac{C''(1)}{2}$$

$$L = \frac{1}{(1-\rho_c)}\left(\rho E(X) + \frac{\rho\left(E(X^2) - E(X)\right)}{2}\right) = \frac{\rho E(X) + \rho E(X^2)}{2(1-\rho_c)}.$$

۱۶-۸) الف) راهنمایی را مورد استفاده قرار دهید.

ب)

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda+\mu)\,p_n\,z^n + \frac{\mu}{z^n}\sum_{n=1}^{\infty}p_{n+m}\,z^{n+m} + \lambda z\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}\,z^{n-1} = 0$$

یا

$$-(1+\rho)\left(P(z)-p_0\right) + \frac{1}{z^m}\left(P(z) - \sum_{k=0}^{m}p_k\,z^k\right) + \rho z P(z) = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$P(z)\left[\rho\,z^{m+1} - (\rho+1)\,z^m + 1\right] = \sum_{k=0}^{m}p_k\,z^k - p_0\,(1+\rho)\,z^m$$

یا

$$P(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m}p_k\,z^k - p_0\,(1+\rho)\,z^m}{\rho\,z^{m+1} - (\rho+1)\,z^m + 1} = \frac{N(z)}{M(z)}. \qquad \text{(i)}$$

ج)مخرج چند جمله‌ای $M(z)$ در (i) را که به وسیله رابطه زیر داده شده است درنظر بگیرید:

$$M(z) = \rho\,z^{m+1} - (1+\rho)\,z^m + 1 = f(z) + g(z)$$

جایی که

$$f(z) = -(1+\rho)\,z^m,$$
$$g(z) = 1 + \rho\,z^{m+1}.$$

توجه کنید که $|f(z)| > |g(z)|$ در یک دایره تعریف شده با $|z| = 1+\varepsilon\,,\ \varepsilon > 0$ است. بنابراین با قضیه راجز $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ دارای تعداد مشابه از صفرها در داخل دایره واحد $\left(|z| = 1+\varepsilon\right)$ هستند. اما $f(z)$ دارا ی m صفر درون دایره واحد است. پس $f(z)+g(z) = M(z)$ همچنین دارای m صفر درون دایره واحد است. بنابراین:

$$M(z) = M_1(z)\,(z - z_0) \qquad \text{(ii)}$$

در جایی که $|z_0| > 1$ و $M_1(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه m که همه صفرها درون یا روی دایره واحد هستند. اما تابع مولد گشتاور $P(z)$ به طور تحلیلی درون یا روی دایره واحد است. بنابراین همه m صفرها از $M(z)$ که درون یا روی دایره واحد هستند بایستی با صفرهای چند جمله‌ای شمارنده $P(z)$ حذف شوند. بنابراین:

$$N(z) = M_1(z)\,a. \qquad \text{(iii)}$$

با جایگذاری (ii) و (iii) در (i) نتیجه می‌گیریم که:

$$P(z) = \frac{N(z)}{M(z)} = \frac{a}{z - z_0}.$$

اما $P(1) = 1$ نتیجه می‌دهد که $a = 1 - z_0$ یا

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{z_0 - 1}{z_0 - z} \\ &= \left(1 - \frac{1}{z_0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (z/z_0)^n \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow p_n = \left(1 - \frac{1}{z_0}\right) \left(\frac{1}{z_0}\right)^n = (1 - r)\, r^n, \quad n \geq 0 \qquad \text{(iv)}$$

در جایی که $r = 1/z_0$ است.

د) میانگین سایز سیستم عبارتست از:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n = \frac{r}{1 - r}.$$

۱۶-۹) الف) از راهنمایی مسئله قبلی استفاده کنید. ب)

$$-\sum_{n=m}^{\infty} (\lambda + \mu)\, p_n\, z^n + \mu \sum_{n=m}^{\infty} p_{n+m}\, z^n + \lambda \sum_{n=m}^{\infty} p_{n-1}\, z^n$$

$$-(1 + \rho)\left(P(z) - \sum_{k=0}^{m-1} p_k\, z^k\right) + \frac{1}{z^m}\left(P(z) - \sum_{k=0}^{2m-1} p_k\, z^k\right)$$

$$+\rho\, z\left(P(z) - \sum_{k=0}^{m-2} p_k\, z^k\right) = 0.$$

بعد از چندبار ساده کردن نتیجه می‌گیریم که:

$$P(z)\left[\rho\, z^{m+1}-(\rho+1)\, z^{m}+1\right]=(1-z^{m})\sum_{k=0}^{m-1} p_k\, z^k$$

یا

$$P(z)=\frac{(1-z^{m})\sum\limits_{k=0}^{m-1} p_k\, z^k}{\rho\, z^{m+1}-(\rho+1)\, z^{m}+1}=\frac{(z_0-1)\sum\limits_{k=0}^{m-1} z^k}{m\,(z_0-z)}$$

در جایی که از قضیه راجز استفاده کرده باشیم و $P(z)=1$ مانند مسئله ۱۶-۸ ج)

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n\, z^n=\frac{1-r}{m}\,\frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} z^k}{1-rz}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$p_n=\begin{cases} (1+r+\cdots+r^k)\,p_0, & k\le m-1\\ r^{n-m+1}\,(1+r+\cdots+r^{m-1})\,p_0, & k\ge m\end{cases}$$

وقتی که

$$p_0=\frac{1-r}{m},\qquad r=\frac{1}{z_0}.$$

سرانجام

$$L=\sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n=P_n'(1).$$

اما

$$P'(z)=\left(\frac{1-r}{m}\right)\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{m-1} k\, z^{k-1}\,(1-rz)-\sum\limits_{k=0}^{m-1} z^k\,(-r)}{(1-rz)^2}$$

بنابراین:

$$L = P'(1) = \frac{1-r}{m}\frac{m-1+r}{(1-r)^2} = \frac{m-(1-r)}{m(1-r)} = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{m}.$$

۱۶-۱۰) پیشرفت همانند (۱۶-۲۱۲):

$$\psi_A(u) = \int_0^\infty e^{-u\tau} dA(\tau) = \left(\frac{\lambda m}{u+\lambda m z}\right)^m$$

این نتیجه می‌دهد:

$$B(z) = \psi_A(\psi(1-z)) = \left(\frac{\lambda m}{\mu(1-z)+\lambda m}\right)^m = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\rho}(1-z)}\right)^m = \left(\frac{\rho}{(1+\rho)-z}\right)^m, \qquad \rho = \frac{\lambda}{m\mu}. \qquad \text{(i)}$$

بنابراین معادله $B(z) = z$ برای π_0 کاهش می‌یابد به:

$$\left(\frac{\rho}{(1+\rho)-z}\right)^m = z$$

یا

$$\frac{\rho}{(1+\rho)-z} = z^{1/m},$$

که همانند

$$\rho z^{-1/m} = (1+\rho) - z \qquad \text{(ii)}$$

$x = z^{-1/m}$ قرار دهید. با جایگذاری این رابطه در (ii) داریم:

$$\rho x = (1+\rho) - x^{-m}$$

یا

$$\rho x^{m+1} - (1+\rho) x^m + 1 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

(۱۱-۱۶

از مثال ۱۶-۷ و معادله (۱۶-۲۱۴) معادله مشخصه برای $Q(z)$ به صورت زیر داده شده است :($\rho = \lambda/m\mu$)

$$1 - z[1+\rho(1-z)]^m = 0$$

که معادل است با:

$$1+\rho(1-z) = z^{-1/m}. \qquad \text{(i)}$$

در این مورد $x = z^{1/m}$ قرار دهید بنابراین (i) کاهش می‌یابد به:

$$[(1+\rho) - \rho x^m]\, x = 1$$

یا معادله مشخصه صدق می‌کند:

$$\rho x^{m+1} - (1+\rho) x + 1 = 0. \qquad \text{(ii)}$$

۱۶-۱۲) در این جا سرویس زمان توزیع با معادله زیر داده شده است:

$$\frac{dB(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{k} d_i\, \delta(t - T_i)$$

و تبدیل لاپلاس آن برابر است با

$$\Phi_s(s) = \sum_{i=1}^{k} d_i\, e^{-sT_i} \qquad \text{(i)}$$

با جایگذاری (i) در (۱۵-۲۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} A(z) &= \Phi_s\left(\lambda\left(1-z\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} d_i\, e^{-\lambda T_i (1-z)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} d_i\, e^{-\lambda T_i}\, e^{\lambda T_i z} \\ &= \sum_{i=1}^{k} d_i\, e^{-\lambda T_i} \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{(\lambda T_i)^j z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} d_i\, e^{-\lambda T_i}\, \frac{(\lambda T_i)^j}{j!}, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots. \tag{i}$$

برای رسیدن به یک فرمول سریع برای احتمال حالت دائمی $\{q_n\}$ می توانیم از آنالیز (۱۶-۱۹۴)-(۱۶-۲۰۴) برای صف‌های $M/G\ /1$ استفاده کنیم. از (۱۶-۲۰۳)-(۱۶-۲۰۴) :

$$c_0 = 1 - a_0, \qquad c_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad n \geq 1$$

و فرض کنید $\left\{c_k^{(m)}\right\}$ به معرف کانولوشن m تایی از توالی $\left\{c_n\right\}$ با خودش است. پس احتمالات حالت دائم به وسیله رابطه (۱۶-۲۰۳) مانند زیر است:

$$q_n = (1-\rho) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\, c_{n-k}^{(m)}.$$

ب) توزیع خدمات وابسته به حالت

فرض کنید $B_i(t)$ معرف توزیع زمان خدمت برای آن مشتری‌هایی است که به سیستم وارد می‌شوند در جایی که i مشتری در صف مانده باشند. در این مورد، (۱۲-۲۱۵) به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$a_{k,i} = P\{A_k | B_i\}$$

از آن جایی که

$A_k =$" مشتری ضمن زمان خدمت دهی می‌رسند k "

و

$B_i =$" i مشتری در آخرین ترک در سیستم حضور داشته باشند "

این نتیجه می‌دهد:

$$a_{k,i} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \, dB_i(t)$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mu_1 e^{-\mu_1 t} \, dt = \frac{\mu_1 \lambda^k}{(\lambda + \mu_1)^{k+1}}, & i = 0 \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mu_2 e^{-\mu_2 t} \, dt = \frac{\mu_2 \lambda^k}{(\lambda + \mu_2)^{k+1}}, & i \geq 1 \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

این نتیجه می‌دهد:

$$A_i(z) = \sum_{k=0}^\infty a_{k,i} \, z^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \rho_1(1-z)}, & i = 0 \\ \dfrac{1}{1 + \rho_2(1-z)}, & i \geq 1 \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

در جایی که $\rho_1 = \lambda/\mu_1 \, , \rho_2 = \lambda/\mu_2$. با اقدام همانند مثال ۱۵-۲۴ احتمالات حالت دائم رضایت‌بخش است[(۱۵-۲۱۰) اصلاح می‌شود]:

$$q_j = q_0 \, a_{j,0} + \sum_{i=1}^{j+1} q_i \, a_{j-i+1,i} \qquad \text{(iii)}$$

و ((۱۵-۲۱۲) را ببینید):

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{j=0}^\infty q_j \, z^j \\ &= q_0 \sum_{j=0}^\infty a_{j,0} \, z^j + \sum_{j=0}^\infty q_i \, a_{j-i+1,i} \\ &= q_0 \, A_0(z) + \sum_{i=1}^\infty q_i \, z^i \sum_{m=0}^\infty a_{m,i} \, z^m \, z^{-1} \\ &= q_0 \, A_0(z) + (Q(z) - q_0) \, A_1(z)/z \end{aligned} \qquad \text{(iv)}$$

در جایی که ((ii) را ببینید):

$$A_0(z) = \frac{1}{1+\rho_1(1-z)} \qquad \text{(v)}$$

و

$$A_1(z) = \frac{1}{1+\rho_2(1-z)}. \qquad \text{(vi)}$$

از (iv) داریم:

$$Q(z) = \frac{q_0\,(z\,A_0(z) - A_1(z))}{z - A_1(z)}. \qquad \text{(vii)}$$

از آن جایی

$$\begin{aligned} Q(1) &= 1 = \frac{q_0\,\left[A_0'(1) + A_0(1) - A_1'(1)\right]}{1 - A_1'(1)} \\ &= \frac{q_0\,(1+\rho_1-\rho_2)}{1-\rho_2} \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$q_0 = \frac{1-\rho_2}{1+\rho_1-\rho_2}. \qquad \text{(viii)}$$

با جای‌گذاری $(viii)$ در (vii) می‌توان $Q(z)$ را به صورت زیر دوباره‌نویسی کرد:

$$\begin{aligned} Q(z) &= (1-\rho_2)\,\frac{(1-z)\,A_1(z)}{A_1(z)-z}\cdot\frac{1}{1+\rho_1-\rho_2}\,\frac{1-z\,A_0(z)/A_1(z)}{1-z} \\ &= \left(\frac{1-\rho_2}{1-\rho_2\,z}\right)\frac{1}{1+\rho_1-\rho_2}\,\frac{1-\frac{\rho_2}{1+\rho_1}\,z}{1-\frac{\rho_1}{1+\rho_1}\,z} \\ &= Q_1(z)\,Q_2(z) \end{aligned}$$

(ix)

از آن‌جایی که

$$Q_1(z) = \frac{1-\rho_2}{1-\rho_2\,z} = (1-\rho_2)\sum_{k=0}^{\infty}\rho_2^k\,z^k$$

و

$$Q_2(z) = \frac{1}{1+\rho_1-\rho_2}\left(1-\frac{\rho_2}{1+\rho_1}\,z\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_1}{1+\rho_1}\right)^i z^i.$$

سرانجام با جای‌گذاری $Q_1(z)$ و $Q_2(z)$ در (ix) نتیجه می‌گیریم که

$$q_n = q_0\left[\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\rho_1}{1+\rho_1}\right)^{n-i}\rho_2^i - \sum_{i=0}^{n-1}\rho_2^{i+1}\,\frac{\rho_1^{n-i-1}}{(1+\rho_1)^{n-i}}\right].\quad n=1,2,\cdots$$

با q_0 مانند $(viii)$.

۱۶-۱۳) از (۱۶-۲۰۹)، تبدیل لاپلاس از توزیع زمان انتظار به وسیله رابطه زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}\Psi_w(s) &= \frac{1-\rho}{1-\lambda\left(\frac{1-\Phi_s(s)}{s}\right)}\\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho\,\mu\left(\frac{1-\Phi_s(s)}{s}\right)}.\end{aligned}\qquad \text{(i)}$$

فرض کنید:

$$\begin{aligned}F_r(t) &= \mu\int_0^t[1-B(\tau)]d\tau\\ &= \mu\left[t-\int_0^t B(\tau)d\tau\right].\end{aligned}\qquad \text{(ii)}$$

معرف توزیع زمان خدمت باقی‌مانده باشد. بنابراین تبدیل لاپلاس آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\Phi_F(s) &= L\{F_r(t)\} = \mu\left(\frac{1}{s}-\frac{\Phi_s(s)}{s}\right)\\ &= \mu\left(\frac{1-\Phi_s(s)}{s}\right).\end{aligned}\qquad \text{(iii)}$$

با جای‌گذاری (iii) در (i) داریم:

$$\Psi_w(s) = \frac{1-\rho}{1-\rho\,\Phi_F(s)} = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}[\rho\,\Phi_F(s)]^n,\quad |\Phi_F(s)|<1.\qquad \text{(iv)}$$

با گرفتن تبدیل معکوس از (iv) خواهیم داشت:

$$F_w(t) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n F_r^{(n)}(t),$$

از آن جایی که $F_r^{(n)}(t)$ nامین کانولوشن از $F_r(t)$ با خودش است.

۱۶-۱۴) فرض کنید ρ در (۱۶-۱۹۸) معرف اعداد متوسط از مشتری‌هایی است که در طی رسیدن هر دوره سرویس پس از دیگری می‌رسند. توجه کنید که

$$\rho = A'(1) > 1$$

از آن‌جایی که

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

از قضیه ۱۵-۹ بر احتمال انیشتن این نتیجه می‌شود که اگر $\rho = A'(1) > 1$ باشد معادله:

$$A(z) = z \qquad \text{(i)}$$

دارای یک ریشه واحد مثبت $\pi_0 < 1$ است. از طرفی، احتمالات حالت گذرا ی $\{\delta_i\}$ موافق با معادله (۱۵-۲۳۶) می‌باشد. با جایگذاری مستقیم با $x_i = \pi_0^i$ نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-i+1}\, \pi_0^j \qquad \text{(ii)}$$

از آن‌جایی که از $i \geq 1$، $p_{ij} = a_{j-i+1}$ در (۱۵-۳۳) برای هر صف $M/G/1$. با استفاده $k = j - i + 1$ در (ii)، به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\sum_{k=2-i}^{\infty} a_k\, \pi_0^{k+i-1} = \pi_0^{i-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \pi_0^k$$

$$= \pi_0^{i-1}\, \pi_0 = \pi_0^i = x_i \qquad \text{(iii)}$$

از آن جایی که π_0 موافق با (i) است. بنابراین اگر $\rho > 1$ باشد سیستم $M/G/1$ زودگذر با احتمال $\delta_i = \pi_0^i$ می‌باشد.

۱۶-۱۵) الف) ماتریس گذار احتمال در این جا نسخه بریده شده از (۱۵-۳۴) به صورت زیر داده می‌شود:

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdot & a_{m-2} & 1-\sum\limits_{k=0}^{m-2} a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdot & a_{m-2} & 1-\sum\limits_{k=0}^{m-2} a_k \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdot & a_{m-3} & 1-\sum\limits_{k=0}^{m-3} a_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & 1-(a_0+a_1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 1-a_0 \end{pmatrix} \qquad \text{(i)}$$

و این برابر قسمت چپ بالای ماتریس در (۱۵-۳۴) است که به دنبال آن mامین ستونی را می‌سازد که مجموع هر سطر برابر مقدار واحد است.

ب) با جای‌گذاری مستقیم (i) در (۱۵-۱۶۷)، احتمالات حالت گذار $\{q_j^*\}_{j=0}^{m-1}$ برابر است با

$$q_j^* = q_0^*\, a_j + \sum_{i=1}^{j+1} q_i^*\, a_{j-i+1}, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, m-2 \qquad \text{(ii)}$$

و شرایط نرمالیزه شده نتیجه می‌دهد:

$$q_{m-1}^* = 1 - \sum_{i=0}^{m-2} q_i^*. \qquad \text{(iii)}$$

توجه کنید که (ii) مشابه با اولین $m-1$ معادله در (۱۵-۲۱۰) برای یک صف $M/\ G/1$ است. بنابراین جواب مطلوب $\{q_j^*\}_{j=0}^{m-1}$ بایستی هم‌چنین موافق با اولین $m-1$ معادله در (۱۵-۲۱۰) باشد. از آن جایی که تنها جواب مجموعه (۱۵-۲۱۰) به وسیله $\{q_j\}_{j=0}^{\infty}$ در (۱۶-۲۰۳) است، این نتیجه می‌شود که احتمالات مطلوب در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$q_j^* = c\, q_j, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, m-1 \qquad \text{(iv)}$$

از آن جایی که $\{q_j\}_{j=0}^{m-1}$ مانند (۱۶-۲۰۳) برای یک صف $M/\ G/1$ است. از (iii) هم‌چنین c ثابت نرمالیز شده به صورت زیر می‌باشد:

$$c = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} q_i}. \qquad (\text{v})$$

۱۶-۱۶) الف) پیشامد $\{X(t)=k\}$ به روش‌های متعدد ناسازگار قابل وقوع است. در فاصله زمانی $(0,t)$ تعداد n مشتری می‌رسند و بعد از زمان t تعداد k مشتری به دریافت خدمات ادامه می‌دهند. فرض کنید پیشامد " تعداد n ورود در فاصله $(0,t)$ " $A_n =$ و $B_{k,n}$ پیشامد خدمت‌رسانی دقیقا k مشتری از n مشتری بعد از زمان t دریافت خدمت ادامه یابد. با قضیه احتمال تام داریم:

$$P\{X(t)=k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{A_n \cap B_{k,n}\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{B_{k,n}|A_n\}P(A_n).$$

اما $P(A_n) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$ و برای محاسبه $P\{B_{k,n}|A_n\}$ به صورت ادامه بحث می‌کنیم: از (۹-۲۸) تحت این شرط که تعداد n ورود در فاصله $(0,t)$ وجود دارد، توزیع مشترک لحظات ورود موافق با توزیع مشترک n متغیر تصادفی مستقل مرتب شده به ترتیب صعودی و یکنواخت توزیع شده در فاصله $(0,t)$ است. بنابراین احتمال این‌که زمان خدمت S با زمان شروع داده شده X که دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,t)$ است، در زمان t خاتمه نیابد عبارت است از

$$p_t = \int_0^t P(S > t-x|\mathbf{x}=x) f_{\mathbf{x}}(x)dx$$

$$= \int_0^t [1-B(t-x)]\frac{1}{t}dx = \frac{1}{t}\int_0^t (1-B(\tau))\,d\tau = \frac{\alpha(t)}{t}$$

پس $B_{k,n}$ با A_n داده شده دارای توزیع دوجمله‌ای است، یعنی

$$P\{B_{k,n}|A_n\} = \binom{n}{k} p_t^k (1-p_t)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots n.$$

و

$$\begin{aligned}
P\{X(t)=k\} &= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha(t)}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\int_0^t B(\tau)d\tau\right)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda t}\frac{[\lambda\alpha(t)]^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\left(\lambda t\frac{1}{t}\int_0^t B(\tau)d\tau\right)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{[\lambda\alpha(t)]^k}{k!}\, e^{-\lambda\left[t-\int_0^t B(\tau)d\tau\right]} \\
&= \frac{[\lambda\alpha(t)]^k}{k!}\, e^{-\lambda\int_0^t [1-B(\tau)]d\tau} \\
&= \frac{[\lambda\alpha(t)]^k}{k!}\, e^{-\lambda\,\alpha(t)}, \qquad k=0,1,2,\cdots
\end{aligned}$$

(i)

ب)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\alpha(t) &= \int_0^{\infty}[1-B(\tau)]d\tau \\
&= E\{\mathrm{s}\}
\end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

که در آن از (۵-۵۲) - (۵-۵۳) استفاده کرده‌ایم. با استفاده از (ii) در (i) داریم:

$$\lim_{t\to\infty} P\{x(t)=k\} = e^{-\rho}\frac{\rho^k}{k!} \qquad \text{(iii)}$$

که در آن $\rho=\lambda E\{s\}$ است.